Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ: СОЧЕТАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Сочетания и размещения.

При подсчете вероятности события, иногда бывает довольно таки сложно подсчитать общее количество исходов. На данном уроке мы как раз и займемся способами подсчета количества исходов.

На прошлом уроке мы уже повторили правило умножения. В курсе алгебры девятого класса мы уже изучали некоторые понятия, давайте повторим некоторые из них.

Определение. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! (n факториал)

$$n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

n факториал – состоящий из n множителей.

Заметим важное свойство факториала:

$$n!= (n-1)!\cdot n$$

n	1	2	3	4	5	6	7
n!	1	1·2=2	2·3=6	6·4=24	24·5=120	120·6=720	720·7=5040

Сочетания и размещения.

Количество перестановок из n элементов, можно вычислять используя следующую теорему:

Теорема. N отличных друг от друга предметов можно расставить по одному на N разных мест ровно N! способами.

$$P_N = N!$$

Где P – количество перестановок из N элементов, без повторений.

Сочетания и размещения.

Пример. К Иван Васильевичу пришли гости: Александр, Алексей, Петр и Николай. За столом 5 стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место Ивана Васильевича известно.

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если Петр и Николай всегда сидят рядом.

г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если Алексей и Александр не могут сидеть рядом.

Решение.

а) Способы которыми можно рассадить гостей и хозяина, не что иное как количество перестановок наших гостей возле разных стульев. Воспользуемся теоремой: Всего у нас 5 человек тогда, 5! способов расстановки. **Ответ**: 120 способов.

б) Место Иван Васильевича уже известно, тогда гости могут выбрать 4 оставшихся стула, а это 4!=24 способа выбора. **Ответ**: 24.

в) Петр и Николай сидят рядом, тогда первый из них может выбрать 5 способами себе место, а вот второму останется выбор только из двух мест, рядом с первым. Остается 3 места для 3 человек: 3!=6 способов. Тогда всего способов: $5·2·6=60$. **Ответ**: 60.

г) Алексей может выбрать место 5 способами, но вот Александру остается для выбора всего два места, так рядом с Алексеем он сидеть не может. Тогда способов: $5·2·3!=60$. **Ответ**: 60.

Сочетания и размещения.

Пример. В чемпионате по хоккею участвовало восемь команд, каждая команда сыграла с другой по одной игре. Сколько всего сыграно игр?

Решение.

Данную задачу можно решать различными способами. Начнем с самого очевидного, но не всегда самого простого, составим таблицу сыгранных игр и непосредственно подсчитаем количество игр.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1:1	2:3	4:2	4:1	5:3	3:7	8:5
2			3:3	5:4	3:1	3:5	2:4	1:2
3				6:2	6:4	1:6	0:0	3:2
4					6:5	5:3	1:0	2:2
5						4:1	2:3	1:1
6							5:8	3:5
7								5:4
8								

Команда сама с собой играть не может (закрашенные клетки), тогда у нас остается 64-8=56 клеток. Игр у нас произошло ровно в два раза меньше, так внизу таблицы могут быть записаны те же результаты, только в обратном порядке, в зависимости от победы или поражения. Тогда у нас 28 игр.

Сочетания и размещения.

Второй способ: Пронумеровав или зная названия команд можно подсчитать, что первая команда сыграет 7 игр, второй команде уже останется сыграть 6 игр, так как уже сыграла игру с первой командой и так далее, получим:

$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

Посмотрим внимательно на нашу задачу, у нас есть 8 команд, в каждой игре участвуют 2 команды, тогда нам надо найти количество сочетаний или количество игр 8 команд, в каждой игре по 2 команды. Порядок выбора команд совершенно не важен.

Сочетания и размещения.

Количество сочетаний из n элементов по 2 легко вычисляется по формуле:

Теорема. Для множества, состоящего из n элементов, любые два элемента этого множества (без повторения) могут быть выбраны – способами.

Иначе говоря, число сочетаний 2 объектов множества, без учета порядка, состоящего из n элементов вычисляется:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Сочетания и размещения.

Пример. Ребята 11 А и 11 Б решили поиграть в шахматы. В 11 А учатся 10 человек, а в 11 Б 8 человек. Сколькими способами:

а) Могут сыграть ребята 11 А между собой

б) Могут сыграть ребята 11 Б между собой

в) Сколько игр возможно между ребятами 11 А и 11 Б

г) Сколько всего игр возможно?

Решение.

а) В 11 А у нас учатся 10 человек, в шахматы играют два человека. Тогда нам надо найти количество сочетаний из 10 человек по 2, порядок нам в данной задаче не важен. Тогда воспользуемся теоремой: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

б) По аналогии с предыдущим примером: $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

в) Когда играют друг против друга ребята из разных классов, то тут следует считать по правилу умножения. Выбор ученика одного из классов не зависит от выбора ученика другого класса, тогда у нас для 11 А – 10 способов выбора, а для 11 Б – 8 способов. **Тогда количество возможных игр: 10·8=80**

г) Здесь нам не важен ни порядок, ни кто с кем играем. тогда это количество сочетаний из учеников обоих классов по 2: $C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$

Сочетания и размещения.

Часто встречаются задачи, в которых порядок размещения элементов важен, тогда нам следует воспользоваться следующей теоремой:

Теорема. Если множество состоит из n элементов, и требуется выбрать два элемента, с учетом их порядка, то такой выбор можно провести n(n-1) способами.

Определение. Число всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных называют числом размещений из n элементов по 2 и обозначается A_n^2

Сочетания и размещения.

Пример. В классе 20 учеников. К доске нужно вызвать двух человек, сколькими способами можно это сделать если:

а) Сначала надо решить пример на квадратные уравнения, потом неравенство

б) Ученики могут выйти к доске одновременно.

Решение.

а) В этой задаче порядок важен, тогда $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$

б) Нам порядок не важен, тогда используем формулу числа сочетаний:

$$C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

Сочетания и размещения.

Мы рассмотрели случай когда в выборе участвовало 2 элемента, а как же быть в случае когда их гораздо больше, ведь таких задач гораздо больше. Давайте запишем формулы для общего случая:

Число сочетаний из n элементов по k элементам (без учета порядка) вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Число размещений по k элементам (с учетом порядка) вычисляется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Замети

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

Сочетания и размещения.

Пример. В классе 25 учеников, нужно выбрать 4 ученика таким образом:

а) Один должен подготовить доклад, второй решить геометрическую задачу, третий подготовить презентацию, четвертый выучить стих.

б) 4 ученика должны подготовить выступление на школьном празднике.

Решение.

а) Здесь нам порядок важен, тогда

$$A_{25}^{4} = \frac{25!}{4!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

б) тут нам порядок не важен

$$C_n^k = \frac{25!}{4!\,(21)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$$

Сочетания и размещения.

В конце урока запишем ряд важных свойств:

1) 0!=1

2) $$C_n^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

3) $$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

4) $$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Давайте проверим 4 свойство:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k$$

Сочетания и размещения.

Задачи для самостоятельного решения.

1) К Мише пришли гости: Саша, Леша, Петя, Коля, Аркаша. Торт разрезали на 6 кусков.

а) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта?

б) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта, если Миша уже выбрал себе кусочек.

в) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта, если Аркаша всегда выбирает соседний от куска Саши.

2) Ребята 11 А и 11 Б решили поиграть в шахматы. В 11 А учатся 13 человек, а в 11 Б 9 человек. Сколькими способами:

а) Могут сыграть ребята 11 А между собой

б) Могут сыграть ребята 11 Б между собой

в) Сколько игр возможно между ребятами 11 А и 11 Б

г) Сколько всего игр возможно?

3) Из 16 дежурных надо выбрать трех для столовой. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

4) Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали олимпийских игр по теннису, если участвовало 15 стран?