Подготовка к контрольной работе №3

Тема:

Корреляционный и регрессионный анализ

Задачи:

1. Расчет числовых характеристик (к.к. Спирмена, корреляционного отношения)
2. Проверка гипотез (о значимости, о линейности)
3. Построение линейной регрессионной модели в матричной форме

Время: 60 минут

Подготовка к контрольной работе

Задача 1. Проверка коррелированности *X* – вес (кг), *Y*- рост (м)

x_i	59	64	71	63	82	65	54	86	50
y_i	1.52	1.75	1.80	1.72	1.79	1.78	1.67	1.69	1.58

x_i'	3	5	7	4	8	6	2	9	1
y_i'	1	6	9	5	8	7	3	4	2
d_i	2	-1	-2	-1	0	-1	-1	5	-1

$$d_i = x_i' - y_i' \qquad \sum d_i^2 = 4+1+4+1+0+1+1+25+1=38$$

$$\boxed{r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}}$$

$$r_s = 0.68$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_o &: r_s = 0 \\ H_1 &: r_s \neq 0 \end{aligned}}$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 1. Проверка коррелированности *Y* – вес (кг), *X*- рост (м)

x_i	59	64	71	63	82	65	54	86	50
y_i	1.52	1.75	1.80	1.72	1.79	1.78	1.67	1.69	1.58

x_i'	3	5	7	4	8	6	2	9	1
y_i'	1	6	9	5	8	7	3	4	2
d_i	2	-1	-2	-1	0	-1	-1	5	-1

H_0: связь незначима

H_1: связь значима

$$r_s = 0.68$$

$$t_{табл} = t(0.025; 7) = 2.36$$

$$\frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \sim T(n-2)$$

$$t_{набл} = \frac{0.68\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{1-0_3 46}} \approx 2.46$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7
2	8	4	0
4	6	0	3
6	4	3	2

$$\tilde{\eta}_{yx}^2 = \frac{s_{\text{межгр}}^2}{s_{\text{общ}}^2}$$

$$s_{\text{межгр}}^2 = \frac{1}{n}\sum n_x\left(\bar{y}_x - \bar{y}\right)^2$$

$$s_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{n}\sum n_y\left(y - \bar{y}\right)^2$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7	n_x	$\bar{y}_x$
2	8	4	0	12	
4	6	0	3	9	
6	4	3	2	9	
				$n = 30$	

$$\bar{y}\left(x=2\right)=\frac{1}{12}\left(8\cdot 3+4\cdot 5+0\cdot 7\right)=3.67$$

$$\bar{y}\left(x=4\right)=\frac{1}{9}\left(6\cdot 3+0\cdot 5+3\cdot 7\right)=4.33$$

$$\bar{y}\left(x=6\right)=\frac{1}{9}\left(4\cdot 3+3\cdot 5+2\cdot 7\right)=4.56$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7	n_x	$\bar{y}_x$
2	8	4	0	12	3.67
4	6	0	3	9	4.33
6	4	3	2	9	4.56
n_y	18	7	5	$n = 30$	$\bar{y} = 4.13$

$$s^2_{\text{общ}} = \frac{1}{n}\sum n_y \left(y - \bar{y}\right)^2$$

$$s^2_{\text{межгр}} = 0.15$$

$$s^2_{\text{общ}} = 2.32$$

$$\tilde{\eta}^2_{yx} = \frac{s^2_{\text{межгр}}}{s^2_{\text{общ}}} = 0.066$$

$$= \frac{1}{30}\left(18\cdot\left(3-4.13\right)^2 + 7\cdot\left(5-4.13\right)^2 + 5\cdot\left(7-4.13\right)^2\right)$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2 Проверка значимости корреляционного отношения

$$\boxed{\begin{aligned} H_o &: \eta_{yx} = 0 \\ H_1 &: \eta_{yx} > 0 \end{aligned}}$$

$$\frac{\eta_{yx}^2 (n-r)}{\left(1-\eta_{yx}^2\right)(r-1)} \sim F_{(r-1,\, n-r)}$$

$$n = 30, \quad r = 3$$

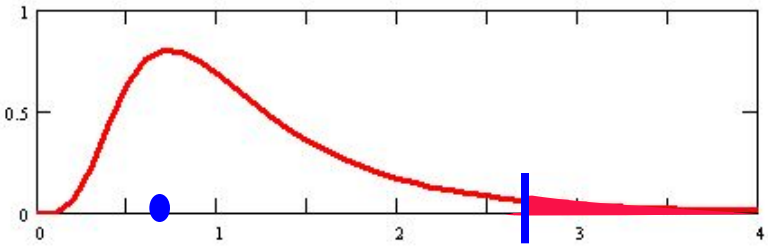
$$\eta_{yx}^2 = 0.066$$

1) $\alpha = 0.05$

2) $F_{табл} = F\left(0.05;\ (2;27)\right) = 3.35$

3) $F_{набл} = \dfrac{0{,}066 \cdot 27}{0.934 \cdot 2} \approx 0{,}95$

4) $F_{набл} < F_{табл} \Rightarrow H_0$



Подготовка к контрольной работе

Задача 2 Проверка линейности

$$H_o: \eta_{yx} = |r_{yx}|$$

$$H_1: \eta_{yx} > |r_{yx}|$$

$$\frac{\left(\eta_{yx}^2 - r_{yx}^2\right)(n-r)}{\left(1-\eta_{yx}^2\right)(r-2)} \sim F_{(r-2,n-r)}$$

$$n = 30, \ r = 3$$

$$\eta_{yx}^2 = 0.594$$

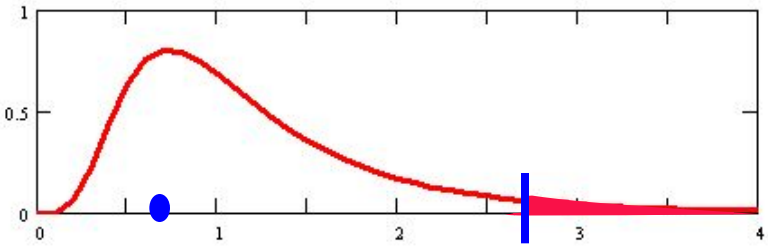
$$r_{yx}^2 = 0.588$$

1) $\alpha = 0.05$

2) $F_{табл} = F_{(0.05;\,(2;27))} = 3.35$

3) $F_{набл} = \dfrac{0{,}006 \cdot 27}{0.934 \cdot 1} \approx 0{,}173$

4) $F_{набл} < F_{табл} \Rightarrow H_0$



Подготовка к контрольной работе

Задача 3. Построение линейной регрессионной модели в матричной форме:

1) записать данные в матричной форме;
2) указать, каким методом решается задача и дать графическую иллюстрацию;
3) найти коэффициенты модели матричным способом;
4) проверить адекватность модели с помощью остаточной дисперсии.

$$y = Xb + \varepsilon$$

МНК: $$\sum \varepsilon_i^2 \to \min$$

$$\hat{b} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{Q\left(\hat{b}\right)}{n - \left(k + 1\right)}$$

Подготовка к контрольной работе

Вычисление обратной матрицы:

1) Найти определитель

$$|A| \neq 0$$

2) Найти алгебраические дополнения

$$A^{*} = \left(A_{ij} \right)$$

3)Записать обратную матрицу

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{*} \right)^{T}$$

Подготовка к контрольной работе

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований:

1) Записать расширенную матрицу $\left(A \mid E\right)$

2) Работая только со строками, привести её к виду

$$\left(E \mid A^{-1}\right)$$

Можно а) менять строки местами;

б) умножать строку на число $k \neq 0$;

в) прибавлять к строке другую, умноженную на число ≠0