

Подготовка к контрольной работе №3

Тема:

Корреляционный и регрессионный анализ

Задачи:

1. Расчет числовых характеристик (к.к. Спирмена, корреляционного отношения)
2. Проверка гипотез (о значимости, о линейности)
3. Построение линейной регрессионной модели в матричной форме

Время: 60 минут

Подготовка к контрольной работе

Задача 1. Проверка коррелированности X – вес (кг),
 Y – рост (м)

x_i	59	64	71	63	82	65	54	86	50
y_i	1.52	1.75	1.80	1.72	1.79	1.78	1.67	1.69	1.58

x'_i	3	5	7	4	8	6	2	9	1
y'_i	1	6	9	5	8	7	3	4	2
d_i	2	-1	-2	-1	0	-1	-1	5	-1

$$d_i = x'_i - y'_i \quad \sum d_i^2 = 4 + 1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 + 25 + 1 = 38$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}$$

$$r_s = 0.68$$

$$H_0 : r_s = 0$$

$$H_1 : r_s \neq 0$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 1. Проверка коррелированности Y – вес (кг),
 X – рост (м)

x_i	59	64	71	63	82	65	54	86	50
y_i	1.52	1.75	1.80	1.72	1.79	1.78	1.67	1.69	1.58

x'_i	3	5	7	4	8	6	2	9	1
y'_i	1	6	9	5	8	7	3	4	2
d_i	2	-1	-2	-1	0	-1	-1	5	-1

H_0 : связь незначима

H_1 : связь значима

$$r_s = 0.68$$

$$t_{табл} = t(0.025; 7) = 2.36$$

$$\frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \sim T_{(n-2)} \quad t_{набл} = \frac{0.68 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{1-0.46}} \approx 2.46$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7
2	8	4	0
4	6	0	3
6	4	3	2

$$\tilde{\eta}_{yx}^2 = \frac{s_{\text{межгр}}^2}{s_{\text{общ}}^2}$$

$$s_{\text{межгр}}^2 = \frac{1}{n} \sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2$$

$$s_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{n} \sum n_y (y - \bar{y})^2$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7	n_x	\bar{y}_x
2	8	4	0	12	
4	6	0	3	9	
6	4	3	2	9	

$$\bar{y}(x=2) = \frac{1}{12} (8 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 7) = 3.67$$

$n = 30$

$$\bar{y}(x=4) = \frac{1}{9} (6 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7) = 4.33$$

$$\bar{y}(x=6) = \frac{1}{9} (4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7) = 4.56$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2. Расчет корреляционного отношения

X \ Y	3	5	7	n_x	\bar{y}_x
2	8	4	0	12	3.67
4	6	0	3	9	4.33
6	4	3	2	9	4.56
n_y	18	7	5	$n = 30$	$\bar{y} = 4.13$

$$s_{\text{Межгр}}^2 = 0.15 \quad s_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{n} \sum n_y (y - \bar{y})^2$$

$$s_{\text{общ}}^2 = 2.32 \quad \tilde{\eta}_{yx}^2 = \frac{s_{\text{Межгр}}^2}{s_{\text{общ}}^2} = 0.066$$

$$= \frac{1}{30} \left(18 \cdot (3 - 4.13)^2 + 7 \cdot (5 - 4.13)^2 + 5 \cdot (7 - 4.13)^2 \right)$$

Подготовка к контрольной работе

Задача 2 Проверка значимости корреляционного отношения

$$\begin{array}{l} H_0 : \eta_{yx} = 0 \\ H_1 : \eta_{yx} > 0 \end{array}$$

$$\frac{\eta_{yx}^2 (n - r)}{(1 - \eta_{yx}^2)(r - 1)} \sim F_{(r-1, n-r)}$$

$$n = 30, r = 3$$

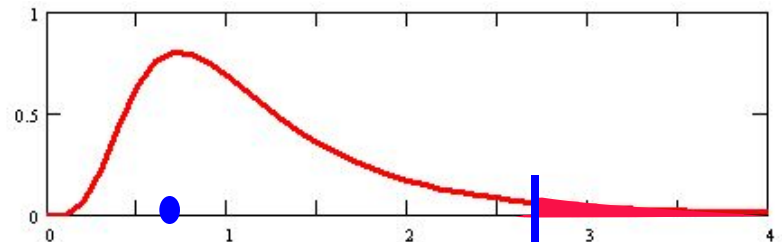
$$\eta_{yx}^2 = 0.066$$

$$1) \alpha = 0.05$$

$$2) F_{табл} = F(0.05; (2; 27)) = 3.35$$

$$3) F_{набл} = \frac{0,066 \cdot 27}{0.934 \cdot 2} \approx 0,95$$

$$4) F_{набл} < F_{табл} \Rightarrow H_0$$



Подготовка к контрольной работе

Задача 2 Проверка линейности

$$H_0 : \eta_{yx} = |r_{yx}|$$

$$H_1 : \eta_{yx} > |r_{yx}|$$

$$\frac{(\eta_{yx}^2 - r_{yx}^2)(n - r)}{(1 - \eta_{yx}^2)(r - 2)} \sim F_{(r-2, n-r)}$$

$$n = 30, r = 3$$

$$\eta_{yx}^2 = 0.594$$

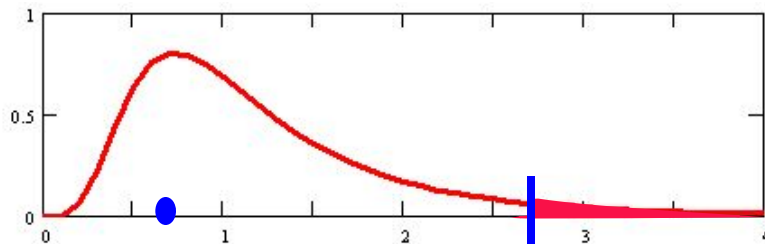
$$r_{yx}^2 = 0.588$$

1) $\alpha = 0.05$

2) $F_{табл} = F_{(0.05; (2; 27))} = 3.35$

3) $F_{набл} = \frac{0,006 \cdot 27}{0,934 \cdot 1} \approx 0,173$

4) $F_{набл} < F_{табл} \Rightarrow H_0$



Подготовка к контрольной работе

Задача 3. Построение линейной регрессионной модели в матричной форме:

- 1) записать данные в матричной форме;
- 2) указать, каким методом решается задача и дать графическую иллюстрацию;
- 3) найти коэффициенты модели матричным способом;
- 4) проверить адекватность модели с помощью остаточной дисперсии.

$$y = Xb + \varepsilon$$

$$\text{МНК: } \sum \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

$$\hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y$$

$$S_{\varepsilon}^2 = \frac{Q(\hat{b})}{n - (k + 1)}$$

Подготовка к контрольной работе

Вычисление обратной матрицы:

1) Найти определитель

$$|A| \neq 0$$

2) Найти алгебраические дополнения

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{ij} \end{pmatrix}$$

3) Записать обратную матрицу

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$$

Подготовка к контрольной работе

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований:

- 1) Записать расширенную матрицу $(A | E)$
- 2) Работая только со строками, привести её к виду

Можно $\left(E | A^{-1} \right)$
а) менять строки местами;

б) умножать строку на число $k \neq 0$;

в) прибавлять к строке другую,
умноженную на число $\neq 0$