УК
Теория и примеры типовых задач

Проверка (испытание) гипотез

Введение

Очень часто генеральная совокупность должна подчиняться некоторым параметрам. Например, фасовочная машина должна наполнять пакеты сахаром по 1 кг. Как узнать, действительно ли генеральная совокупность подчиняется этим ограничениям? С этой целью проводят *испытание гипотез*.

Из генеральной совокупности проводят выборку объема n. Для этой выборки вычисляют нужные характеристики. Затем формулируют две гипотезы: основную H_0 и альтернативную H_1. Основная гипотеза H_0 – это то утверждение, которое подлежит проверке.

Введение

Например, гипотеза H_0: генеральная средняя $a = 2$. Альтернативная гипотеза H_1 в этом примере может быть сформулирована любым из следующих трех способов:

а) H_1: $a > 2$ (*правосторонняя проверка*);

б) H_1: $a < 2$ (*левосторонняя проверка*);

в) H_1: $a \neq 2$ (*двусторонняя проверка*).

Исследователь задает доверительную вероятность p — величину, которая отражает степень уверенности исследователя в результате испытания. Для односторонней проверки $\alpha = 1 - p$, для двусторонней проверки $\alpha = (1 - p)/2$. Величина $1 - p$ называется *уровнем значимости*.

Введение

По α, n в зависимости от вида решаемой задачи по таблицам находят одну (для односторонней проверки) или две (для двусторонней проверки) граничные точки, которые наносят на координатную ось. Порядок нахождения граничных точек показан далее.

По результатам выборки вычисляется величина, называемая *статистикой*. Формула для вычисления статистики зависит от вида решаемой задачи. Значение статистики наносят на координатную ось. В зависимости от взаимного расположения значения статистики и граничных точек возможен один из трех вариантов:

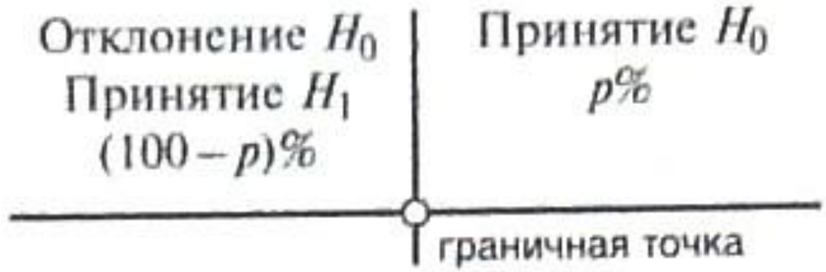
1) принимается H_0;

2) отклоняется H_0 и без всякой проверки принимается H_1;

3) доказательство является неубедительным, нужно больше данных.

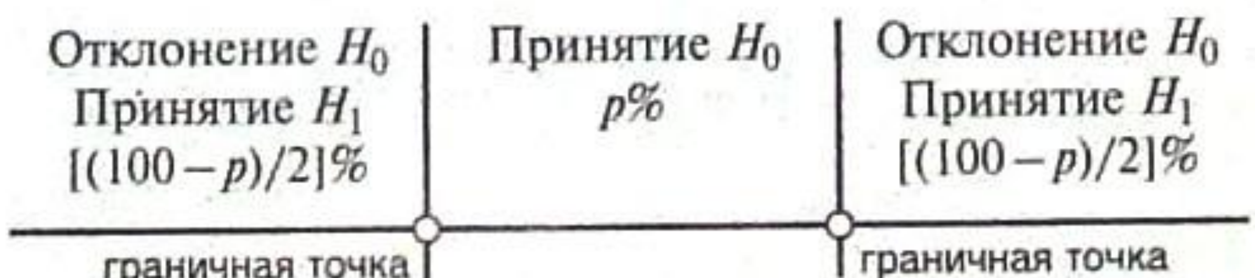
Введение

Для левосторонней проверки:



Для правосторонней проверки:

Для двусторонней проверки:



Введение

Чем выше доверительная вероятность, тем шире область принятия H_0.

Процедура испытания гипотез является довольно строгой, и у исследователя здесь весьма мало простора для выбора. И все же исследователь дважды сталкивается с необходимостью сделать решающий выбор:

1) исследователь должен выбрать между односторонней и двусторонней проверками;

2) следует выбрать значение доверительной вероятности.

Введение

В основе выбора между односторонней и двусторонней проверками лежат предположения исследователя относительно генеральной совокупности, из которой извлечена выборка. Эти предположения отражены в гипотезе H_1, которая противоположна гипотезе H_0 и обычно утверждает то, во что верит исследователь. В большинстве ситуаций исследователь желает принять гипотезу H_1 путем отклонения гипотезы H_0.

Введение (ок.)

Если исследователя интересуют различия в определенном направлении или если направления различий можно предсказать, то используется односторонняя проверка.

Если исследователь не уверен в направлении сдвигов или если его интересует возможность того, что истинное значение параметра генеральной совокупности выше либо ниже значения параметра из нулевой гипотезы, то используется двусторонняя проверка.

Принятие гипотезы H_0 означает, что гипотеза H_0 не противоречит имеющимся у нас выборочным данным. Вполне возможно, что при испытании гипотезы H_0 против другой альтернативной гипотезы гипотеза H_0 будет отвергнута.

ИГ на основе выборочной средней при известной генеральной

Для выборки объема n вычисляется выборочная средняя $\bar{X}$. a – предполагаемое значение генеральной средней. Граничные точки: z_α (для правосторонней проверки), $-z_\alpha$ (для левосторонней проверки), $\pm z_\alpha$ (для двусторонней проверки). Значение z_α находим по таблице (см. § 12.1). Статистика $z = \dfrac{\bar{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$.

ИГ на основе выборочной средней при известной генеральной дисперсии σ^2

Пример 55. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 100$ г. В случайной выборке объема $n = 25$ пачек средний вес $\overline{X} = 101{,}5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

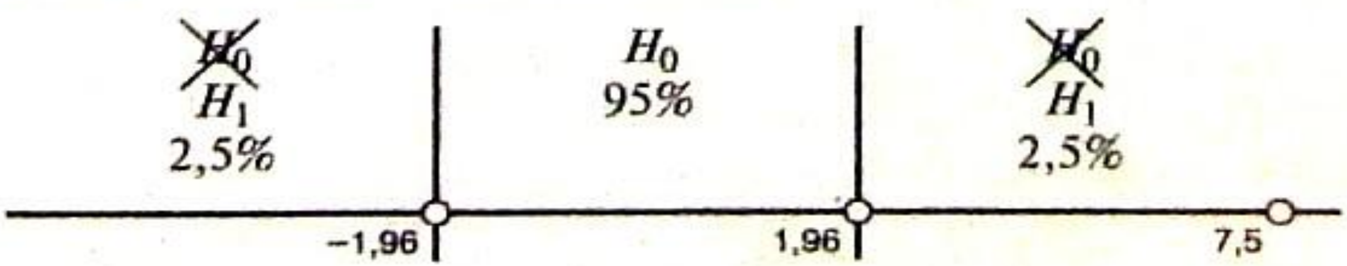
H_1: $a \neq 100$ г.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 1{,}96$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{101{,}5 - 100}{1/\sqrt{25}} = 7{,}5.$

Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Автомат нужно отрегулировать.

ИГ на основе выборочной средней при известной генеральной

Пример 56. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объема $n = 16$ деталей средняя длина $\overline{X} = 19{,}8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 20$ мм.

H_1: $a < 20$ мм.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}326 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}326$.

Статистика $z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{19{,}8 - 20}{0{,}5/\sqrt{16}} = -1{,}6.$

Отметим значения на числовой оси.

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Станок настроен правильно.

ИГ на основе выборочной средней при неизвестной генеральной

Для выборки объема n вычисляются выборочная средняя $\bar{X}$ и выборочное стандартное отклонение s. Пусть a – предполагаемое значение генеральной средней. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha,n-1}$. В Excel для двусторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР ($1 - p$; $n - 1$), для односторонней проверки $t_{\alpha;n-1}$ = СТЬЮДРАСПОБР(2($1 - p$); $n - 1$). Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки). Статистика $t = \dfrac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n-1}}$.

ИГ на основе выборочной средней при неизвестной

Пример 57. Производитель утверждает, что средний вес пачки чая не меньше $a = 100$ г. Инспектор отобрал 10 пачек чая и взвесил. Их вес оказался 97, 102, 103, 98, 96, 105, 98, 100, 101, 99 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 99\%$.

H_0: для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

H_1: $a < 100$ г.

Проведем левостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}01;10-1} = 2{,}821 \Rightarrow$ граничная точка $-2{,}821$. Найдем $\bar{X}$ и s.

ИГ на основе выборочной средней при неизвестной генеральной дисперсии

Номер пачки	Вес, г x_i	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$
1	97	–2,9	8,41
2	102	2,1	4,41
3	103	3,1	9,61
4	98	–1,9	3,61
5	96	–3,9	15,21
6	105	5,1	26,01
7	98	–1,9	3,61
8	100	0,1	0,01
9	101	1,1	1,21
10	99	–0,9	0,81
Сумма	999	0	72,9

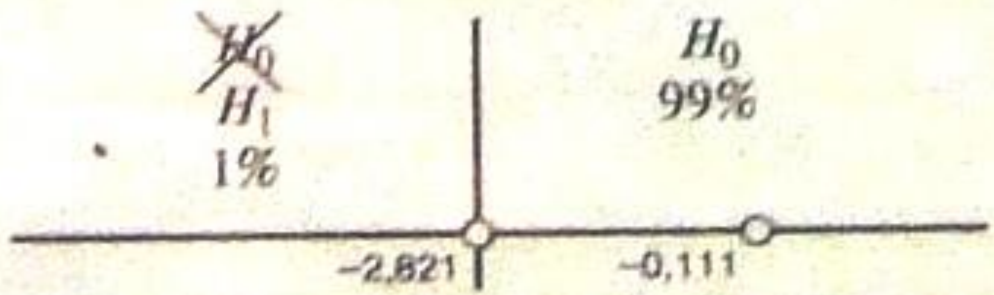
ИГ на основе выборочной средней при неизвестной генеральной дисперсии (ок.)

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 999/10 = 99{,}9 \text{ г.}$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2/n = 72{,}9/10 = 7{,}29 \text{ г}^2,\ s = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7 \text{ г.}$$

Статистика $t = \dfrac{\overline{X} - a}{s/\sqrt{n-1}} = \dfrac{99{,}9 - 100}{2{,}7/\sqrt{10-1}} \approx -0{,}111.$

Отметим значения на числовой оси.



Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1%. Выборка инспектора не противоречит утверждению производителя.

ИГ на основе выборочной доли

Для выборки объема n вычисляется выборочная доля $\hat{p}$ = (число элементов выборки, обладающих нужным свойством)/(объем выборки) и сравнивается с генеральной долей $\bar{p}$. Граничные точки: z_a (для правосторонней проверки), $-z_a$ (для левосторонней проверки), $\pm z_a$ (для двусторонней проверки). z_a находим по таблице (см. § 12.1).

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \bar{p}}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}}$.

Пример 58. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 3%. В случайной выборке объема $n = 100$ изделий оказалось 5 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: доля бракованных изделий равна 3%, то есть $\overline{p} = 0{,}03$.

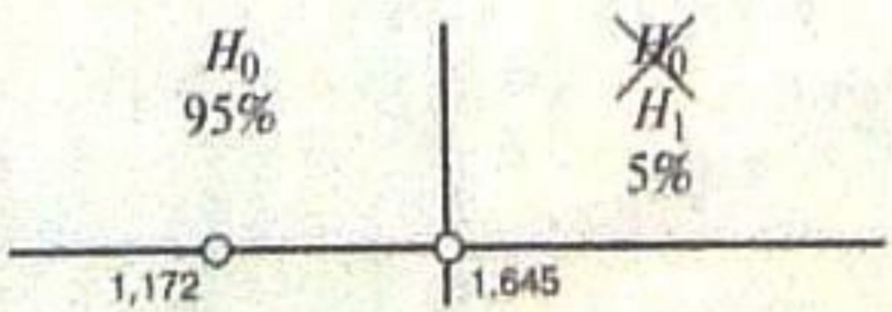
H_1: $\overline{p} > 0{,}03$.

Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка. Оценка $\hat{p} = 5/100 = 0{,}05$.

Статистика $z = \dfrac{\hat{p} - \overline{p}}{\sqrt{\overline{p}(1 - \overline{p})/n}} = \dfrac{0{,}05 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}03(1 - 0{,}03)/100}} \approx 1{,}172.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Выборка не противоречит утверждению производителя.

ИГ о двух генеральных дисперсиях

Очень часто про две независимые выборки объема n_1 и n_2 соответственно нужно узнать, взяты ли они из нормальных генеральных совокупностей с одинаковой дисперсией. Для каждой выборки находим выборочную дисперсию s_1^2 и s_2^2 соответственно. Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1)$. Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1)$. Статистика F = (бóльшая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии).

ИГ о двух генеральных дисперсиях (ок.)

Обозначим через n_A объем выборки, у которой больше оценка генеральной дисперсии, через n_B обозначим объем другой выборки. Так как дисперсия неотрицательна, то нам потребуется одна граничная точка $F_{\alpha;n_A-1;n_B-1}$, которую находят из таблицы F-распределения (распределения Фишера). Можно воспользоваться статистической функцией FРАСПОБР(α; $n_A - 1$; $n_B - 1$) мастера функций f_x пакета Excel.

Пример 59. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_1^2 = 20\%^2$. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 10$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $s_2^2 = 30\%^2$. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски инвестиций 1 и 2? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Оценка генеральной дисперсии по первой выборке $\sigma_1^2 = n_1 s_1^2/(n_1 - 1) = 12 \times 20/(12 - 1) \approx 21{,}818$.

Оценка генеральной дисперсии по второй выборке $\sigma_2^2 = n_2 s_2^2/(n_2 - 1) = 10 \times 30/(10 - 1) \approx 33{,}333$.

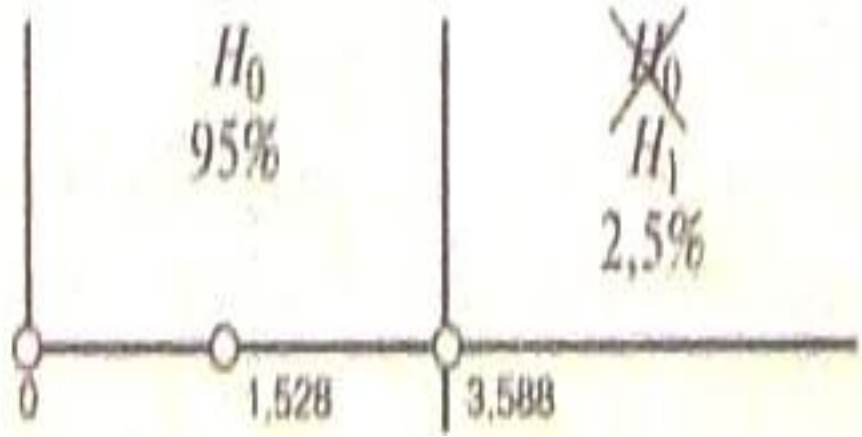
Статистика F = (большая оценка генеральной дисперсии)/(меньшая оценка генеральной дисперсии) = 33,333/21,818 ≈ 1,528.

Так как 33,333 > 21,818, то $n_A = 10$, $n_B = 12$.

Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow F_{\alpha;n_A-1;n_B-1} = F_{0{,}025;10-1;12-1} = 3{,}588 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 3{,}588$.

Отметим значения на числовой оси.



Мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Риски инвестиций равны.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии

В Excel существует надстройка *Пакет анализа*, которая позволяет автоматически провести испытание гипотезы о двух генеральных дисперсиях. Нужно воспользоваться командой *Сервис*. В раскрывшемся списке команд должна присутствовать команда *Анализ данных*. При ее отсутствии необходимо выбрать команду *Надстройки* и поставить «галочку» рядом с командой *Пакет анализа*. Если же команда *Пакет анализа* отсутствует, то нужно произвести доустановку Excel.

Сервис → Анализ данных → Двухвыборочный F-тест для дисперсии → ОК. Откроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Двухвыборочный F-тест для дисперсии (ок.)

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал*, *Новый рабочий лист*, *Новая рабочая книга*) → *ОК*. Откроется итоговое окно.

Здесь проверка всегда односторонняя. Если в графе *P(F<=f) односторонняя* указана величина, меньшая выбранного *Альфа*, то мы отклоняем гипотезу H_0 на уровне значимости *Альфа*.

Если же надстройки *Пакет анализа* нет, то можно воспользоваться статистической функцией ФТЕСТ (массив 1; массив 2) мастера функций f_x пакета Excel. Массив 1 и массив 2 — это ссылки на ячейки, содержащие значения двух выборок. Функция ФТЕСТ выдает удвоенное значение величины *P(F<=f) односторонняя* из предыдущей таблицы.

Сравнение средних величин двух выборок при известных генеральных дисперсиях

- **Пример 60.** Автомат 1 и 2 фасуют чай в пачки со стандартными отклонениями s_1=1 г. и s_2=2 г. соответственно. В случайных выборках для автоматов 1 и 2 объёмом n_1=20 и n_2=15 средний вес пачки X_1=101 г. и X_1=98 г. соответственно.

  Доверительная вероятность p=95%.

  Верно ли, что оба автомата фасуют пачки одинакового среднего веса?

  Примем H_0: $a_1 = a_2$, или $a_1 - a_2 = 0$ (т.е. средний вес одинаков); H_1: $a_1 \neq a_2$.

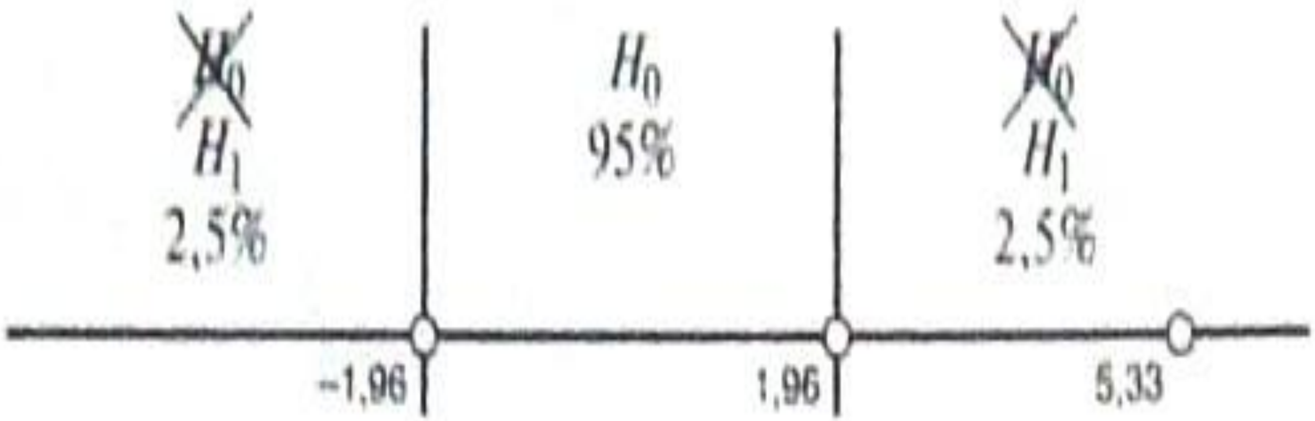
  Проведём двухстороннюю проверку.

  $(1-p)/2=(1-0{,}95)/2=0{,}025 \rightarrow z_a = 1{,}96 \rightarrow$ граничные точки : +1,96; -1,96.

Сравнение средних величин двух выборок при известных генеральных дисперсиях

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \dfrac{101 - 98}{\sqrt{1^2/20 + 2^2/15}} \approx 5{,}33.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Средний вес пачек чая для этих автоматов различен.

Двухвыборочный *z* – тест для средних

Excel позволяет провести испытание гипотезы о равенстве средних двух нормальных распределений с известными генеральными дисперсиями.

Сервис → *Анализ данных* → *Двухвыборочный z-тест для средних* → *ОК*. Раскроется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе *Интервал переменной 1:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения первой выборки. В графе *Интервал переменной 2:* указывается ссылка на ячейки, содержащие значения второй выборки.

Двухвыборочный *z* – тест для средних

Если первая из ячеек содержит пояснительный текст, то рядом со словом *Метки* нужно поставить «галочку». В графе *Альфа* указывается уровень значимости $1 - p$ (по умолчанию там уже указано 0,05, но исследователь может выбрать и свое значение). В графе *Гипотетическая средняя разность:* пишем 0. В графах *Дисперсия переменной 1 (известная):* и *Дисперсия переменной 2 (известная):* указываются значения σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Также указываются параметры вывода (*Выходной интервал, Новый рабочий лист, Новая рабочая книга*) → *OK*. Откроется итоговое окно.

В графах *P(Z<=z)* дано значение уровня значимости для односторонней и двусторонней проверок. Если это значение меньше заданного *Альфа*, то гипотеза H_0 отвергается.

ИГ по выборочным средним при неизвестных генеральных дисперсиях

Пример 61. Для производства каждой из $n_1 = 10$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 1$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 16$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 2$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 13.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии равны.

H_0: $a_1 = a_2$.

H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

ИГ по выборочным средним при неизвестных генеральных дисперсиях

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n_1+n_2-2} = t_{0{,}05;10+16-2} = 1{,}711$. Это граничная точка. Статистика

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{30 - 28}{\sqrt{\frac{10\times 1 + 16\times 2}{10 + 16 - 2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{16}\right)}} \approx 3{,}75.$$

Отметим значения на числовой оси.

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Случай неравенства генеральных дисперсий (*см. также «ИГ о двух генеральных дисперсиях»)

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$, где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ – выборочные средние этих выборок.

Случай неравенства генеральных дисперсий (*см. также результаты примера 59 выше)

Пример 62. Для производства каждой из $n_1 = 51$ детали по первой технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $s_1^2 = 6$ с^2). Для производства каждой из $n_2 = 41$ детали по второй технологии было затрачено в среднем $\overline{X}_2 = 25$ с (выборочная дисперсия $s_2^2 = 3$ с^2). Можно ли сделать вывод, что по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Применив результаты § 13.4, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии различны.

H_0: $a_1 = a_2$.

H_1: $a_1 > a_2$.

$p = 0{,}95$. Проведем правостороннюю проверку.

$\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Это граничная точка.

Случай неравенства генеральных дисперсий (*см. также результаты примера 59 выше) (ок.)

Статистика $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}} = \dfrac{30 - 25}{\sqrt{\dfrac{6}{51 - 1} + \dfrac{3}{41 - 1}}} \approx 11{,}323.$

Отметим значения на числовой оси.

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Испытание гипотез по спаренным данным

Иногда выборки не являются независимыми из-за наличия факторов, влияющих на выборки неизвестным путем.

Тогда группируют элементы попарно (по одному из каждой выборки) и проводят испытание гипотезы на среднюю разностей между парными измерениями.

Пусть n — объем парной выборки. В каждой паре находим d — разность значений. Для полученных разностей ищем выборочную среднюю $\overline{X}_d$ и выборочное стандартное отклонение s_d. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$.

Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}}$.

Испытание гипотез по спаренным данным

Пример 64. Можно ли утверждать, что шины заводов 1 и 2 имеют разную износоустойчивость? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Номер машины	X — расстояние для шин завода 1, тыс. км	Y — расстояние для шин завода 2, тыс. км	$d = X - Y$	d^2
1	60,2	59,4	0,8	0,64
2	62,3	58,3	4	16
3	61,3	62,1	–0,8	0,64
4	60,7	63,4	–2,7	7,29
5	63,4	60,8	2,6	6,76
Сумма	—	—	3,9	31,33

$\overline{X}_d = (\sum d)/n = 3{,}9/5 = 0{,}78.$

$s_d^2 = (\sum d^2)/n - \overline{X}_d^2 = 31{,}33/5 - 0{,}78^2 = 5{,}6576.$ $s_d \approx 2{,}379.$

H_0: средняя $a_d = 0$ (нет разницы между шинами).

H_1: $a_d \neq 0$ (есть разница).

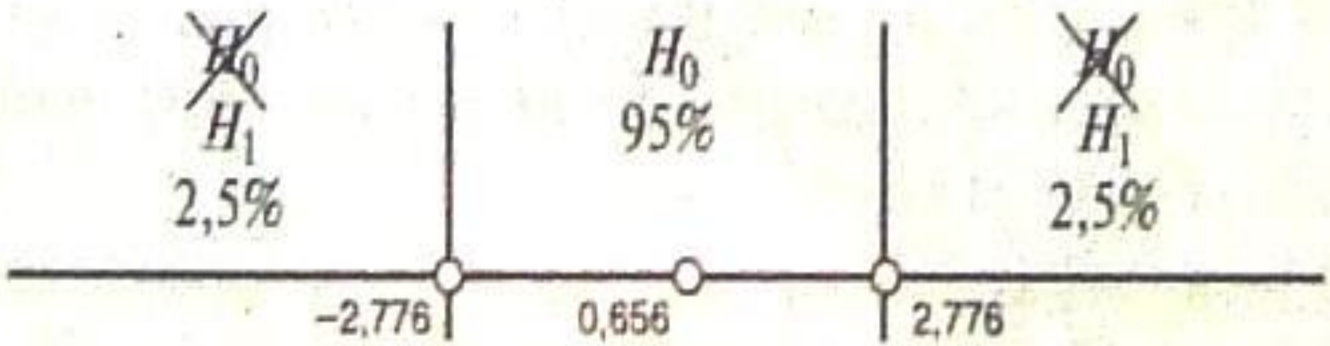
Проведем двустороннюю проверку.

$\alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}025;5-1} = 2{,}776 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 2{,}776$.

Испытание гипотез по спаренным данным

$$\text{Статистика } t = \frac{\overline{X}_d}{s_d/\sqrt{n-1}} = \frac{0{,}78}{2{,}379/\sqrt{5-1}} \approx 0{,}656.$$

Отметим значения на числовой оси.



Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5%. Износоустойчивость шин одинакова.

ИГ о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности

Иногда требуется провести испытание гипотезы о принадлежности нового наблюдения той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка.

Гипотеза H_0 утверждает, что новое наблюдение принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка. Альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что это не так.

ИГ о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности

Для выборки объема n вычисляются выборочная средняя $\bar{X}$ и выборочное стандартное отклонение s. Пусть $X_{нов}$ — результат очередного наблюдения. По таблице t-распределения находим $t_{\alpha;n-1}$. Граничные точки: $t_{\alpha;n-1}$ (для правосторонней проверки), $-t_{\alpha;n-1}$ (для левосторонней проверки), $\pm t_{\alpha;n-1}$ (для двусторонней проверки).

Статистика $t = \dfrac{X_{нов} - \bar{X}}{s\sqrt{(n+1)/(n-1)}}$.

ИГ о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности

Пример 65. Автомат фасует чай в пачки. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\overline{X} = 100$ г, выборочное стандартное отклонение $s = 0{,}5$ г. Вес очередной пачки чая $X_{нов} = 98{,}7$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Предполагается, что все пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $p = 95\%$.

H_0: новое наблюдение принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка, то есть автомат регулировать не нужно.

H_1: новое наблюдение не принадлежит той же нормальной генеральной совокупности, что и выборка, то есть автомат нужно отрегулировать.

Проведем двустороннюю проверку.

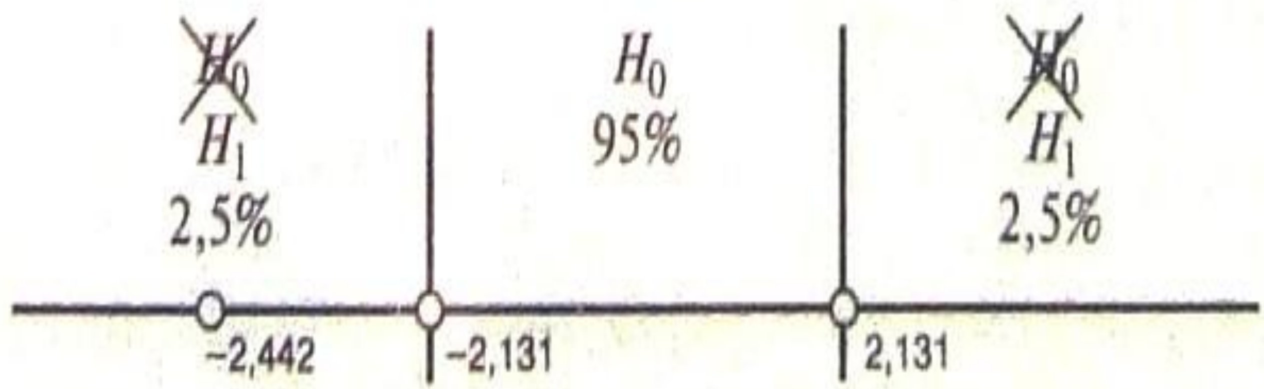
$p = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}025;16-1} = 2{,}131 \Rightarrow$ граничные точки $\pm 2{,}131$.

ИГ о принадлежности нового наблюдения генеральной совокупности

Статистика $t = \dfrac{X_{\text{нов}} - \bar{X}}{s\sqrt{(n+1)/(n-1)}} = \dfrac{98{,}7 - 100}{0{,}5\sqrt{(16+1)/(16-1)}} \approx$

$\approx -2{,}442.$

Отметим значения на числовой оси.



Мы отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Автомат нужно отрегулировать.

Непараметрические испытания (нч.)

До сих пор мы предполагали, что генеральные совокупности распределены нормально или приблизительно нормально. Теперь мы откажемся от этих условий. Будем проверить гипотезу о наличии связи между значениями двух величин.

H_0: нет связи между значениями двух величин.

H_1: есть связь между значениями двух величин.

Составляется *таблица наблюдаемых частот*. По строкам изменяются значения первой величины, по столбцам — значения второй величины. В клетке с индексами (i, j) записана частота $f_{ij} = n_{ij}$ — число элементов, у которых значения первой и второй величин равны i и j соответственно. f_{ij} — наблюдаемая частота события.

Непараметрические испытания (пр.)

соответственно, f_0 – наблюдаемые...

По таблице наблюдаемых частот строят показанным далее способом *таблицу ожидаемых частот*. f_E – ожидаемая частота события. Должно выполняться условие $f_E \geq 5$ для каждой клетки таблицы, иначе надо объединить какие-то строки или столбцы.

Таблицу наблюдаемых частот и таблицу ожидаемых частот часто называют *таблицами сопряженности*. Пусть n – общее число наблюдений, m = (число строк таблицы – 1) × (число столбцов таблицы – 1). Если таблица сопряженности содержит только одну строку, то m = число столбцов таблицы – 1.

... уровень значимости $\alpha = 1 - p$. Для

Непараметрические испытания (пр.)

m = число столбцов таблицы − 1.

Доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$. Для α и m по таблице χ^2_e-распределения («хи-квадрат») находим $\chi^2_{\alpha,m}$. Это граничная точка. Статистика $\chi^2_e = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E}$. Если таблица сопряженности имеет размер 2×2 и $n \leq 100$, то вводится поправка Йетса:
$\chi^2_e = \sum \frac{(|f_0 - f_E| - 0,5)^2}{f_E}$. Отметим значения на числовой оси. Для нахождения $\chi^2_{\alpha,m}$ можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ОБР(α; m) мастера функций f_x пакета Excel.

Непараметрические испытания (пр.)

Пример 66. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов?

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	25	18	10	5
четыре	20	16	15	6
три	15	20	22	13
два	8	10	7	15

Непараметрические испытания (пр.)

Это таблица наблюдаемых частот f_0. В клетке (1, 1) написано число 25, то есть 25 человек получили и по физике, и по математике отличные оценки. В клетке (4, 2) написано число 10, то есть 10 человек получили хорошие оценки по физике и неудовлетворительные оценки по математике. И т. д.

H_0: нет связи между оценками.

H_1: есть связь между оценками.

Построим таблицу ожидаемых частот f_E. Суммируем числа по строкам и столбцам.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	25	18	10	5	58
четыре	20	16	15	6	57
три	15	20	22	13	70
два	8	10	7	15	40
Сумма	68	64	54	39	225

Непараметрические испытания (пр.)

Всего получены результаты экзаменов $n = 225$ человек. Отличный результат по математике показали 58 человек, то есть доля тех, кто получил отличные оценки по математике, равна 58/225. Если верна гипотеза H_0, то можно ожидать, что 58/225 из 68 студентов, получивших по физике отличные оценки, показали отличные знания и по математике. Аналогично можно рассчитать и другие ожидаемые частоты.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	68×58/225	64×58/225	54×58/225	39×58/225	58
четыре	68×57/225	64×57/225	54×57/225	39×57/225	57
три	68×70/225	64×70/225	54×70/225	39×70/225	70
два	68×40/225	64×40/225	54×40/225	39×40/225	40
Сумма	68	64	54	39	225

Непараметрические испытания (пр.)

Ожидаемые частоты нельзя округлять до целого значения.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	17,5	16,5	13,9	10,9	58
четыре	17,2	16,2	13,7	9,9	57
три	21,2	19,9	16,8	12,1	70
два	12,1	11,4	9,6	6,9	40
Сумма	68	64	54	39	225

Если в какой-то клетке получилось значение < 5, то с целью уничтожения этого в таблицах нужно объединить какие-то строки или столбцы. При округлении надо следить, чтобы исходные суммы не изменились.

Доверительная вероятность $p = 0{,}95$, уровень значимости $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. m = (число строк таблицы − 1)×(число столбцов таблицы − 1) = (4 − 1)×(4 − 1) = 9.

Непараметрические испытания (пр.)

Для α и m по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha,m} = \chi^2_{0,05;9} = 16{,}92$. Это граничная точка. Найдем значение статистики χ^2.

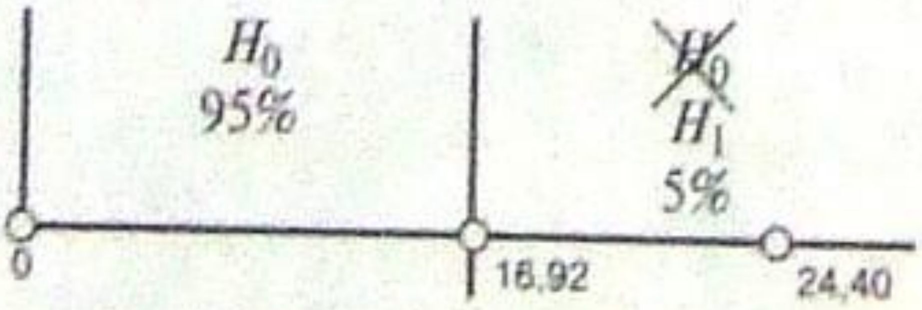
f_0	f_E	$f_0 - f_E$	$(f_0 - f_E)^2$	$(f_0 - f_E)^2/f_E$
25	17,5	7,5	56,25	3,21
20	17,2	2,8	7,84	0,46
15	21,2	−6,2	38,44	1,81
8	12,1	−4,1	16,81	1,39
18	16,5	1,5	2,25	0,14
16	16,2	−0,2	0,04	0,00
20	19,9	0,1	0,01	0,00
10	11,4	−1,4	1,96	0,17
10	13,9	−3,9	15,21	1,09
15	13,7	1,3	1,69	0,12
22	16,8	5,2	27,04	1,61
7	9,6	−2,6	6,76	0,70
5	10,1	−5,1	26,01	2,58
6	9,9	−3,9	15,21	1,54
13	12,1	0,9	0,81	0,07
15	6,9	8,1	65,61	9,51
Сумма	—	0	—	24,40

Поясним, как заполняется таблица.

Непараметрические испытания (пр.)

Наблюдаемые частоты f_0 пишем в 1-м столбце, а соответствующие им ожидаемые частоты f_E — во 2-м столбце. Далее производим над столбцами действия, указанные в 1-й строке.

Статистика $\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E} = 24{,}40$ (сумма чисел 5-го столбца). Отметим значения на числовой оси.



Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Есть связь между оценками, полученными студентами на экзаменах по математике и физике.

Непараметрические испытания (ок.)

Замечание. Вместо заполнения последней таблицы можно воспользоваться статистической функцией ХИ2ТЕСТ мастера функций f_x пакета Excel. f_x → *статистические* → *ХИ2ТЕСТ* → *ОК*. Появляется диалоговое окно. В графе *фактический интервал* указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся наблюдаемые частоты. В графе *ожидаемый интервал* указывается ссылка на ячейки, в которых хранятся ожидаемые частоты. *ОК*. Если полученное значение превышает уровень значимости $\alpha = 1 - p$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Порядковые испытания (нч.)

До этого момента мы работали с данными, которые можно измерить. Но бывают ситуации, когда важнее упорядочивание данных, чем прямое измерение. Это — *порядковые испытания*, а сами данные называются порядковыми. Для порядковых данных составляются две последовательности одинаковой длины $n \geq 10$. Нас интересует, есть ли между ними связь. Задается доверительная вероятность p, уровень значимости $\alpha = 1 - p$.

H_0: между двумя последовательностями нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между двумя последовательностями существует некая связь.

По α находим по таблице граничную точку $z_\alpha > 0$ (см. § 12.1). Для последовательностей вычисляем *ранговый коэффициент корреляции Спирмена* $r_s = 1 - 6\frac{\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$. Статистика $z = r_s\sqrt{n - 1}$.

Порядковые испытания

Пример 67. Два человека дегустируют 10 сортов чая. Каждый из них расположил эти сорта в порядке убывания предпочтений (второй и третий столбцы). Есть ли какая-нибудь связь между этими результатами? Доверительная вероятность $p = 95\%$.

Сорт чая	Дегустатор 1	Дегустатор 2	d	d^2
А	6	5	1	1
Б	4	6	−2	4
В	3	4	−1	1
Г	10	7	3	9
Д	5	1	4	16
Е	1	2	−1	1
Ж	8	8	0	0
З	2	3	−1	1
И	7	9	−2	4
К	9	10	−1	1
Сумма	—	—	—	38

Порядковые испытания

d – это разность между значениями дегустаторов для одного и того же сорта чая, то есть 4-й столбец – это разность 2-го и 3-го столбцов. Каждое число 4-го столбца возводим в квадрат и результат пишем в 5-м столбце. В последней строке указана сумма чисел 5-го столбца.

H_0: между результатами этих исследований нет связи, они не согласованы друг с другом.

H_1: между результатами этих исследований существует некая связь.

$p = 0{,}95$, $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}645$. Это граничная точка.

Порядковые испытания (ок.)

Ранговый коэффициент корреляции Спирмена:

$$r_s = 1 - 6\frac{\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - 6\frac{38}{10(10^2-1)} \approx 0,77.$$

Статистика $z = r_s\sqrt{n-1} = 0,77\sqrt{10-1} = 2,31 > 1,645.$

Мы отвергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5%. Между результатами исследований существует некая связь.

Ок.
Проверка (испытание) гипотез