

Наиболее изученными в ИСО являются задачи, которые решаются при наличии полной информации. Это задачи принятия решений *в условиях определённости*. Если информация о системе и (или) внешней среде частично отсутствует, то имеет место задача принятия решений в условиях неопределённости.

В ИСО принято различать три типа неопределенностей:

- 1) *неопределенность целей*;
- 2) *неопределенность знаний об окружающей обстановке и действующих в данном явлении факторах (неопределенность природы)*;
- 3) *неопределенность действий активного или пассивного партнера или противника*.

Кроме этого, необходимо учитывать *отношение к случайности*.

- ❖ Стохастическая (вероятностная неопределенность), факторы статистически устойчивы – объекты теории вероятностей.
- ❖ Неопределенность не стохастического вида, никаких предположений о стохастической устойчивости не существует.
- ❖ Неопределенность промежуточного типа, решение принимается на основе гипотез о законах распределения случайных величин. ЛПР понимает риск несовпадения полученных результатов с реальными условиями.

Если бы губы Никанора Ивановича  
да приставить к носу Ивана Кузьмича,  
да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча,  
да, пожалуй, прибавить к этому еще дородности Ивана Павловича –  
я бы тогда тотчас же решилась.

Н. В. Гоголь

Рассмотрим следующие **примеры**.

Компания может перевозить свою продукцию из пункта производства в пункт потребления речным, железнодорожным и автомобильным транспортом. Затраты на перевозку единицы продукции соответственно равны  $C1 < C2 < C3$  .

Время перевозки единицы продукции, в зависимости от вида транспорта равно  $t1 > t2 > t3$  .

Компания должна перевезти  $A$  единиц продукции. Естественно желание компании осуществить перевозку с наименьшими транспортными расходами. Продукция компании является скоропортящейся, поэтому время перевозки должно быть минимально.

Введем переменные  $X1, X2, X3$ , означающие количество продукции перевозимой речным, железнодорожным и автомобильным транспортом соответственно. Получим ограничения:

$$X1 + X2 + X3 = A ,$$

$$Xi \geq 0 , i = 1,2,3.$$

И две целевые функции:

$$C1 X1 + C2 X2 + C3 X3 \rightarrow \min ,$$

$$t1 X1 + t2 X2 + t3 X3 \rightarrow \min .$$

**Дуополия Курно.**

Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке.

Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения:

$$p(u) = a - b(u_1 + u_2),$$

где:  $a$  - первоначальная цена товара при появлении его на рынке,  $b$  – коэффициент убывания цены,  $u_1$  и  $u_2$  объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины  $u_1$  и  $u_2$  неотрицательны).

Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны  $c_1$  и  $c_2$ .

Цель каждой фирмы состоит в максимизации своей прибыли.

Получим две целевые функции

$$g^1(u_1, u_2) = p(u)u_1 - c_1u_1 \rightarrow \max ,$$

$$g^2(u_1, u_2) = p(u)u_2 - c_2u_2 \rightarrow \max .$$

Ограничения

$u_1 + u_2 \leq d$ ,  $d$  – объем, выше которого производство становится нерентабельным,

$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ .

### **Неопределенность целей. Многокритериальные задачи.**

В задачах этого типа присутствуют ограничения (обычные системы уравнений или неравенств), которым должны подчиняться переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и несколько критериев, например,  $n$ :

$$f_1(x_1, \dots, x_k) \rightarrow \max, \dots, f_n(x_1, \dots, x_k) \rightarrow \max$$

*Это и есть неопределенность цели.* Для решения таких задач необходимо привлекать дополнительные гипотезы.

Существует два основных подхода к решению такого класса задач:

- *сведение к стандартным задачам с одним критерием;*
- *сужение неопределенности.*

## I. Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

1) *Линейная свертка.* Если все критерии измеряются в одной шкале, то строят обобщенный критерий вида:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x_1, \dots, x_k), \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, c_i \geq 0.$$

где  $c_i$  – веса соответствующих критериев.

Как правило, веса подбираются экспериментально, они отражают представление оперирующей стороны о содержании выбранного компромисса.

Таким образом, содержание компромисса состоит в ранжировании целей весами – дополнительная гипотеза, с помощью которой происходит сведение к задаче с одним критерием.

**Сведение к стандартной задаче с одним критерием.**

2) *Использование контрольных показателей.*

Пусть задана система контрольных нормативных показателей  $f_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , относительно которых критерии должны удовлетворять условию:

$$f_i(x) \geq f_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

а) В некоторых случаях целевую функцию удобно представлять в виде

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*(x)},$$

и решать задачу

$$F(x) \rightarrow \max.$$

б) Предположим, что среди функций, выделен основной критерий, например  $f_1(x)$ . Тогда снова приходим к однокритериальной задаче:

при условии  $f_1(x) \rightarrow \max$

$$f_i(x) \geq f_i^*, \quad i = 2, \dots, n.$$

### Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

3) *Ранжирование критериев.* Критерии ранжируются по степени важности.

Пусть ранжированный ряд имеет вид  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ .

Решаем последовательно  $n$  задач:

$$f_1(x) \rightarrow \min, x \in \Omega_0,$$

$$f_2(x) \rightarrow \min, x \in \Omega_1,$$

...

$$f_n(x) \rightarrow \min, x \in \Omega_{n-1}.$$

Здесь  $\Omega_0$  – множество допустимых решений исходной задачи, формируемое её ограничениями,  $\Omega_1$  – множество оптимальных решений первой задачи,  $\Omega_{n-1}$  – множество оптимальных решений  $n - 1$  задачи. Множество  $\Omega_n$  – множество решений  $n$ -ой задачи является искомым.



**Сведение к стандартной задаче с одним критерием.**

4) Введение метрики в пространстве целевых функций.

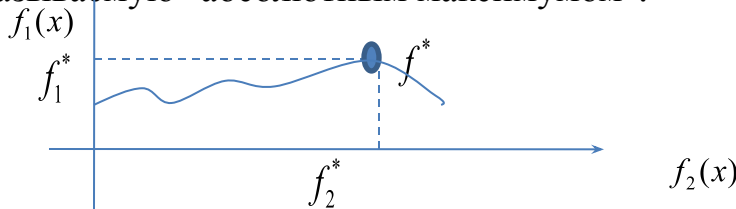
$$f_i(x) \rightarrow \max, i = 1, \dots, n.$$

Предположим мы решили систему однокритериальных задач:

В каждой  $i$ -ой задаче нашли вектор  $x = x^i$  – доставляющий максимум критерию

$$f_i(x): f_i(x^i) = f_i^*.$$

Совокупность скалярных величин  $f_i^*, i = 1, \dots, n$ , в пространстве критериев определяет некоторую точку, называемую "абсолютным максимумом".



Если все  $x^i, i = 1, \dots, n$ , различны, то точка  $f^*$  недостижима в пространстве критериев.

$$R = \|r_{ij}\|, i, j = 1, \dots, n,$$

Введем положительно определенную матрицу

Тогда скалярная величина:

$$h(x) = \sqrt{(f_i(x) - f_i^*)r_{ij}(f_j(x) - f_j^*)}$$

определяет некоторое расстояние от точки соответствующей вектору  $x$  до точки "абсолютного максимума". Частный случай, когда  $R$  – единичная матрица, то - Евклидово расстояние.

В качестве критерия можно выбрать:

$$h(x) \rightarrow \min_x.$$

## II. Сужение неопределенности. Компромиссы Парето.

Другой подход к решению многокритериальных задач заключается в попытке сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из неформального анализа те варианты решений, которые являются заведомо плохими. Этот подход используется в случае равнозначности критериев.

Предположим, что сделан некоторый выбор  $x^*$ , и существует другой выбор  $\bar{x}$  такой, что для всех критериев имеет место неравенство:

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \dots, n,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое. Очевидно, что выбор  $\bar{x}$  предпочтительнее выбора  $x^*$ .

Вектор называется *не улучшаемым вектором результатов (вектором Парето, эффективным вектором)*, если из соотношений

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \dots, n,$$

следует, что ,

$$f_i(\bar{x}) = f_i(x^*), i = 1, \dots, n.$$

Множество всех векторов Парето называют *множеством Парето*.

*Принцип Парето:* в качестве решения следует выбирать только тот вектор  $x$ , который принадлежит множеству Парето.

Рассмотрим пример. Фирма по разработке программного обеспечения должна выполнить два проекта 1 и 2 в порядке 1,2. Для выполнения каждого из проектов фирма может привлекать одного, двух или трёх программистов. Пусть  $X_1$  число программистов, привлекаемых для выполнения первого,  $X_2$  – второго проектов. Время выполнения проекта  $i$  равно  $t_i(X_i)$ ,  $i=1,2$ . Стоимости работ по проектам равны  $C_i(X_i)$ ,  $i=1,2$ . Требуется минимизировать общее время выполнения проектов и стоимость их выполнения. Общая стоимость их выполнения  $f_1(X_1, X_2) = C_1(X_1) + C_2(X_2)$ , а время выполнения проектов равно  $f_2(X_1, X_2) = t_1(X_1) + t_2(X_2)$ . Получим задачу

$$f_1(X_1, X_2) \rightarrow \min, f_2(X_1, X_2) \rightarrow \min$$

$$X_1, X_2 \in \{1, 2, 3\}.$$

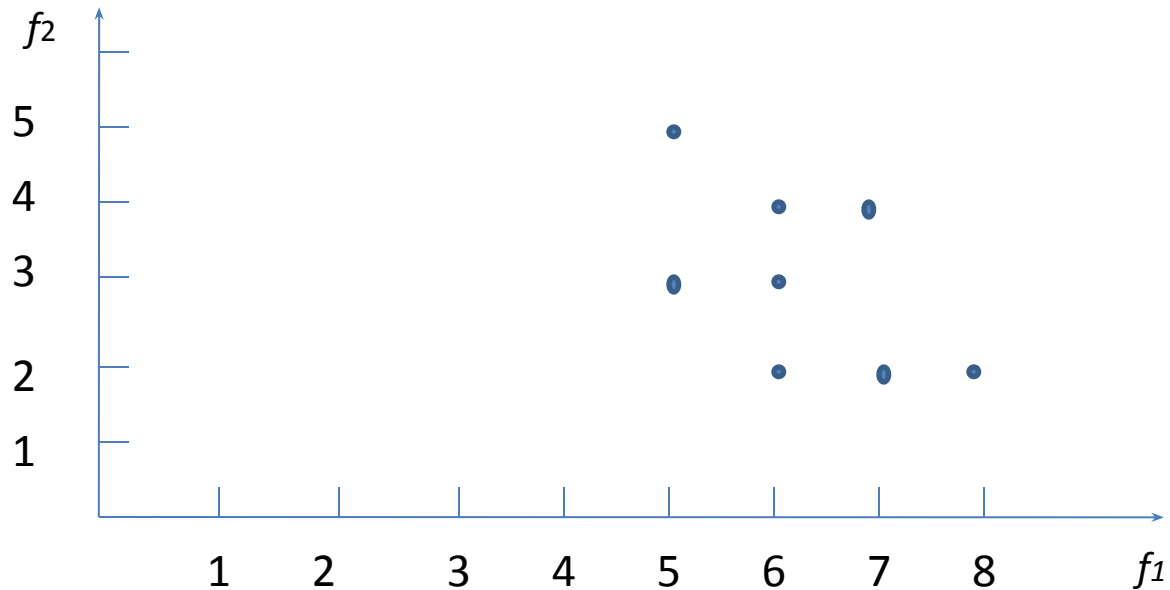
Пусть значения функций заданы в таблице:

Определим все возможные значения пар  $(f_1, f_2)$ .

$X$	1	2	3
$C_1(X)$	1	2	3
$C_2(X)$	4	4	5
$t_1(X)$	2	1	1
$t_2(X)$	3	1	1

$(4, 2), (5, 3), (6, 4), (6, 2), (6, 3), (7, 4), (8, 2),$

Построим в пространстве критериев точки соответствующие парам  $(f_1, f_2)$ .



Поиск точек Парето можно осуществить графически. Находим точки с минимальным значением  $f_1$ . Затем среди них находим точку с минимальным значением  $f_2$ . Включаем её в множество Парето. Затем исключаем из рассмотрения все точки, у которых значения по обоим критериям больше или равны соответствующим значениям найденной точки Парето. Для оставшегося множества повторяем процедуру.

Для нашего примера получим множество Парето:  $(5,3), (6,2)$ .