Наиболее изученными в ИСО являются задачи, которые решаются при наличии полной информации. Это задачи принятия решений *в условиях определённости*. Если информация о системе и (или) внешней среде частично отсутствует, то имеет место задача принятия решений в условиях неопределённости.

В ИСО принято различать три типа неопределенностей:

1) *неопределенность целей*;

2) *неопределенность знаний об окружающей обстановке и действующих в данном явлении факторах (неопределенность природы*);

3) *неопределенность действий активного или пассивного партнера или противника.*

Кроме этого, необходимо учитывать *отношение к случайности*.

- Стохастическая (вероятностная неопределенность), факторы статистически устойчивы – объекты теории вероятностей.
- Неопределенность не стохастического вида, никаких предположений о стохастической устойчивости не существует.
- Неопределенность промежуточного типа, решение принимается на основе гипотез о законах распределения случайных величин. ЛПР понимает риск несовпадения полученных результатов с реальными условиями.

Если бы губы Никанора Ивановича
да приставить к носу Ивана Кузьмича,
да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча,
да, пожалуй, прибавить к этому еще дородности Ивана Павловича –
я бы тогда тотчас же решилась.

Н. В. Гоголь

Рассмотрим следующие **примеры**.

Компания может перевозить свою продукцию из пункта производства в пункт потребления речным, железнодорожным и автомобильным транспортом. Затраты на перевозку единицы продукции соответственно равны $C1 < C2 < C3$ .

Время перевозки единицы продукции, в зависимости от вида транспорта равно $t1 > t2 > t3$ .

Компания должна перевезти $A$ единиц продукции. Естественно желание компании осуществить перевозку с наименьшими транспортными расходами. Продукция компании является скоропортящейся, поэтому время перевозки должно быть минимально.

Введем переменные $X1, X2, X3$, означающие количество продукции перевозимой речным, железнодорожным и автомобильным транспортом соответственно. Получим ограничения:

$$X1 + X2 + X3 = A\ ,$$

$$Xi \geq 0\ ,\ i = 1,2,3.$$

И две целевые функции:

$$C1\ X1 + C2\ X2 + C3\ X3 \to \min\ ,$$

$$t1\ X1 + t2\ X2 + t3\ X3 \to \min\ .$$

**Дуополия Курно.**

Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке.

Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения:

$$p(u)=a-b(u_1+u_2),$$

где: $a$ - первоначальная цена товара при появлении его на рынке, $b$ – коэффициент убывания цены, $u_1$ и $u_2$ объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины $u_1$ и $u_2$ неотрицательны).

Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны $c_1$ и $c_2$.

Цель каждой фирмы состоят в максимизации своей прибыли.

Получим две целевые функции

$$g^1(u_1,u_2)= p(u)u_1-c_1u_1 \to \max ,$$

$$g^2(u_1,u_2)= p(u)u_2-c_2u_2 \to \max .$$

Ограничения

$u_1 + u_2 \leq d$ , $d$ – объем, выше которого производство становится нерентабельным,

$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0.$

**Неопределенность целей. Многокритериальные задачи.**

В задачах этого типа присутствуют ограничения (обычные системы уравнений или неравенств), которым должны подчиняться переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и несколько критериев, например, $n$:

$$f_1(x_1,\ldots,x_k) \to \max, \ldots, f_n(x_1,\ldots,x_k) \to \max$$

*Это и есть неопределенность цели*. Для решения таких задач необходимо привлекать дополнительные гипотезы.

Существует два основных подхода к решению такого класса задач:

- *сведение к стандартным задачам с одними критерием;*
- *сужение неопределенности.*

## I. Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

1) *Линейная свертка.* Если все критерии измеряются в одной шкале, то строят обобщенный критерий вида:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x_1,\dots,x_k),\ \sum_{i=1}^{n} c_i=1, c_i\geq 0.$$

где $c_i$ – веса соответствующих критериев.

Как правило, веса подбираются экспериментально, они отражают представление оперирующей стороны о содержании выбранного компромисса.

Таким образом, содержание компромисса состоит в ранжировании целей весами – дополнительная гипотеза, с помощью которой происходит сведение к задаче с одним критерием.

## Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

*2) Использование контрольных показателей.*

Пусть задана система контрольных нормативных показателей $f_i^*, i = 1,\dots,n,$ относительно которых критерии должны удовлетворять условию:

$$f_i(x) \ge f_i^*\ ,\ i = 1,\dots,n.$$

а) В некоторых случаях целевую функцию удобно представлять в виде

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*(x)},$$

и решать задачу

$$F(x) \to \max.$$

б) Предположим, что среди функций , выделен основной критерий, например, $f_1(x)$ .
Тогда снова приходим к однокритериальной задаче:

$$f_1(x) \to \max$$

при условии

$$f_i(x) \ge f_i^*\ ,\ i = 2,\dots,n.$$

**Сведение к стандартной задаче с одним критерием.**

*3) Ранжирование критериев.* Критерии ранжируются по степени важности.

Пусть ранжированный ряд имеет вид $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$.

Решаем последовательно *n* задач:

$$f_1(x) \to \min,\ x \in \Omega_0,$$
$$f_2(x) \to \min,\ x \in \Omega_1,$$
$$\dots$$
$$f_n(x) \to \min,\ x \in \Omega_{n-1}.$$

Здесь Ω0 – множество допустимых решений исходной задачи, формируемое её ограничениями, Ω1 - множество оптимальных решений первой задачи, Ω*n*-1 – множество оптимальных решений *n* – 1 задачи. Множество Ω*n* – множество решений *n*-ой задачи является искомым.

**Сведение к стандартной задаче с одним критерием.**

*4) Введение метрики в пространстве целевых функций.*

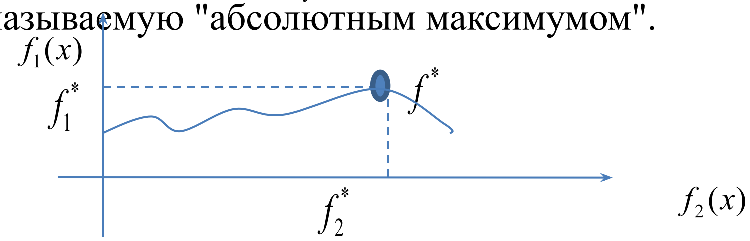
$$f_i(x) \to \max, i = 1,\ldots,n.$$

Предположим мы решили систему однокритериальных задач:

В каждой *i*-ой задаче нашли вектор $x = x^i$ – доставляющий максимум критерию

$$f_i(x):\ f_i(x^i) = f_i^*.$$

Совокупность скалярных величин $f_i^*, i = 1,\ldots,n,$ в пространстве критериев определяет некоторую точку, называемую "абсолютным максимумом".




Если все $x^i, i = 1,\ldots,n,$ различны , то точка $f^*$ недостижима в пространстве критериев.

Введем положительно определенную матрицу $R = |r_{ij}|, i, j = 1,\ldots,n,$

Тогда скалярная величина:

$$h(x) = \sqrt{(f_i(x) - f_i^*) r_{ij} (f_j(x) - f_j^*)}$$

определяет некоторое расстояние от точки соответствующей вектору *x* до точки "абсолютного максимума". Частный случай, когда *R* – единичная матрица, то - Евклидово расстояние.

В качестве критерия можно выбрать:

$$h(x) \to \min_x.$$

**II. Сужение неопределенности. Компромиссы Парето**.

Другой подход к решению многокритериальных задач заключается в попытке сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из неформального анализа те варианты решений, которые являются заведомо плохими. Этот подход используется в случае равнозначности критериев.

Предположим, что сделан некоторый выбор $x^*$, и существует другой выбор $\bar{x}$ такой, что для всех критериев имеет место неравенство:

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \ldots, n,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое. Очевидно, что выбор $\bar{x}$ предпочтительнее выбора $x^*$ .

Вектор называется *не улучшаемым вектором результатов* (*вектором Парето, эффективным вектором*), если из соотношений

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \ldots, n,$$

следует, что ,

$$f_i(\bar{x}) = f_i(x^*), i = 1, \ldots, n.$$

Множество всех векторов Парето называют *множеством Парето*.

*Принцип Парето*: в качестве решения следует выбирать только тот вектор *x*, который принадлежит множеству Парето.

Рассмотрим пример. Фирма по разработке программного обеспечения должна выполнить два проекта 1 и 2 в порядке 1,2. Для выполнения каждого из проектов фирма может привлекать одного, двух или трёх программистов. Пусть $X_1$ число программистов, привлекаемых для выполнения первого, $X_2$ – второго проектов. Время выполнения проекта $i$ равно $t_i(X_i)$, $i$=1,2. Стоимости работ по проектам равны $C_i(X_i)$, $i$=1,2. Требуется минимизировать общее время выполнения проектов и стоимость их выполнения.

Общая стоимость их выполнения $f_1(X_1,X_2) = C_1(X_1)+C_2(X_2)$ , а время выполнения проектов равно $f_2(X_1,X_2) = t_1(X_1)+t_2(X_2)$. Получим задачу

$$f_1(X_1,X_2) \to \min ,\ f_2(X_1,X_2) \to \min$$

$$X_1,\ X_2 \in \{1,2\}.$$

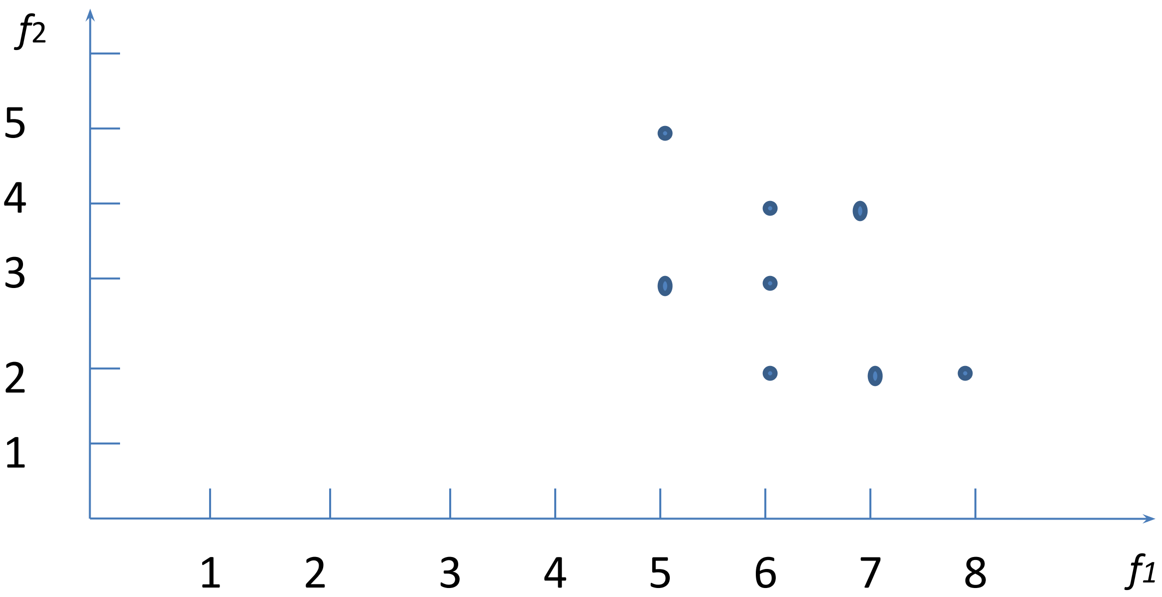
Пусть значения функций заданы в таблице:

Определим все возможные значения пар $(f_1,f_2)$ .

), (5,3), (6,4), (6,2), (6,3), (7,4), (8,2),

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $C_1(X)$ | 1 | 2 | 3 |
| $C_2(X)$ | 4 | 4 | 5 |
| $t_1(X)$ | 2 | 1 | 1 |
| $t_2(X)$ | 3 | 1 | 1 |

Построим в пространстве критериев точки соответствующие парам ($f_1$,$f_2$) .




Поиск точек Парето можно осуществить графически. Находим точки с минимальным значением $f_1$. Затем среди них находим точку с минимальным значением $f_2$. Включаем её в множество Парето. Затем исключаем из рассмотрения все точки, у которых значения по обоим критериям больше или равны соответствующим значениям найденной точки Парето. Для оставшегося множества повторяем процедуру.

Для нашего примера получим множество Парето: (5,3), (6,2).