Наиболее изученными в ИСО являются задачи, которые решаются при наличии полной информации. Это задачи принятия решений *в условиях определённости*. Если информация о системе и (или) внешней среде частично отсутствует, то имеет место задача принятия решений в условиях неопределённости.

В ИСО принято различать три типа неопределенностей:

1) *неопределенность целей*;

2) *неопределенность знаний об окружающей обстановке и действующих в данном явлении факторах (неопределенность природы*);

3) *неопределенность действий активного или пассивного партнера или противника.*

Кроме этого, необходимо учитывать *отношение к случайности*.

- Стохастическая (вероятностная неопределенность), факторы статистически устойчивы – объекты теории вероятностей.
- Неопределенность не стохастического вида, никаких предположений о стохастической устойчивости не существует.
- Неопределенность промежуточного типа, решение принимается на основе гипотез о законах распределения случайных величин. ЛПР понимает риск несовпадения полученных результатов с реальными условиями.

Если бы губы Никанора Ивановича
да приставить к носу Ивана Кузьмича,
да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча,
да, пожалуй, прибавить к этому еще дородности Ивана Павловича –
я бы тогда тотчас же решилась.

Н. В. Гоголь

Рассмотрим следующие **примеры**.

Компания может перевозить свою продукцию из пункта производства в пункт потребления речным, железнодорожным и автомобильным транспортом. Затраты на перевозку единицы продукции соответственно равны $C1 < C2 < C3$.

Время перевозки единицы продукции, в зависимости от вида транспорта равно $t1 > t2 > t3$.

Компания должна перевезти A единиц продукции. Естественно желание компании осуществить перевозку с наименьшими транспортными расходами. Продукция компании является скоропортящейся, поэтому время перевозки должно быть минимально.

Введем переменные $X1$, $X2$, $X3$, означающие количество продукции перевозимой речным, железнодорожным и автомобильным транспортом соответственно. Получим ограничения:

$$X1 + X2 + X3 = A,$$

$$Xi \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

И две целевые функции:

$$C1\, X1 + C2\, X2 + C3\, X3 \to \min,$$

$$t1\, X1 + t2\, X2 + t3\, X3 \to \min.$$

Дуополия Курно.

Две фирмы выпускают однородный товар и продают его на рынке.

Цена, складывающаяся на рынке, линейно убывает с ростом суммарного предложения:

$$p(u)=a-b(u_1+u_2),$$

где: a - первоначальная цена товара при появлении его на рынке, b – коэффициент убывания цены, u_1 и u_2 объемы выпуска продукции первой и второй фирмой соответственно (по своему смыслу величины u_1 и u_2 неотрицательны).

Пусть затраты первой и второй фирм на выпуск единицы продукции равны c_1 и c_2.

Цель каждой фирмы состоят в максимизации своей прибыли.

Получим две целевые функции

$$g^1(u_1,u_2)= p(u)u_1-c_1u_1 \to \max ,$$

$$g^2(u_1,u_2)= p(u)u_2-c_2u_2 \to \max .$$

Ограничения

$u_1 + u_2 \le d$, d – объем, выше которого производство становится нерентабельным,

$u_1 \ge 0$, $u_2 \ge 0$.

Неопределенность целей. Многокритериальные задачи.

В задачах этого типа присутствуют ограничения (обычные системы уравнений или неравенств), которым должны подчиняться переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и несколько критериев, например, n:

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) \to \max, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_k) \to \max$$

Это и есть неопределенность цели. Для решения таких задач необходимо привлекать дополнительные гипотезы.

Существует два основных подхода к решению такого класса задач:

- *сведение к стандартным задачам с одними критерием;*
- *сужение неопределенности.*

I. Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

1) *Линейная свертка.* Если все критерии измеряются в одной шкале, то строят обобщенный критерий вида:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x_1,...,x_k),\ \sum_{i=1}^{n} c_i=1, c_i \geq 0.$$

где c_i – веса соответствующих критериев.

Как правило, веса подбираются экспериментально, они отражают представление оперирующей стороны о содержании выбранного компромисса.

Таким образом, содержание компромисса состоит в ранжировании целей весами – дополнительная гипотеза, с помощью которой происходит сведение к задаче с одним критерием.

Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

2) Использование контрольных показателей.

Пусть задана система контрольных нормативных показателей $f_i^*, i = 1,..., n,$ относительно которых критерии должны удовлетворять условию:

$$f_i(x) \geq f_i^*, \; i = 1,..., n.$$

а) В некоторых случаях целевую функцию удобно представлять в виде

$$F(x) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i^*(x)},$$

и решать задачу

$$F(x) \to \max.$$

б) Предположим, что среди функций , выделен основной критерий, например, $f_1(x)$.

Тогда снова приходим к однокритериальной задаче:

$$f_1(x) \to \max$$

при условии

$$f_i(x) \geq f_i^*, \; i = 2,..., n.$$

Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

3) Ранжирование критериев. Критерии ранжируются по степени важности.

Пусть ранжированный ряд имеет вид $f_1(x),\ f_2(x),\dots,f_n(x).$

Решаем последовательно *n* задач:

$$f_1(x)\to\min,\ x\in\Omega_0,$$
$$f_2(x)\to\min,\ x\in\Omega_1,$$
$$\dots$$
$$f_n(x)\to\min,\ x\in\Omega_{n-1}.$$

Здесь Ω0 – множество допустимых решений исходной задачи, формируемое её ограничениями, Ω1 - множество оптимальных решений первой задачи, Ω*n*-1 – множество оптимальных решений *n* – 1 задачи. Множество Ω*n* – множество решений *n*-ой задачи является искомым.

Сведение к стандартной задаче с одним критерием.

4) Введение метрики в пространстве целевых функций.

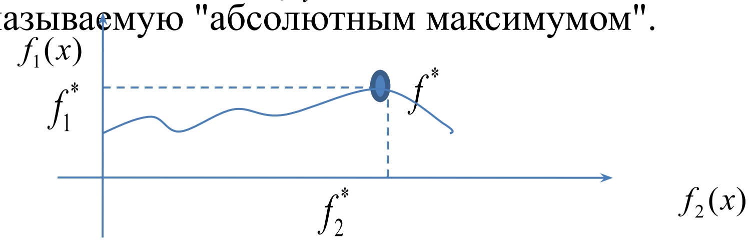
$$f_i(x) \to \max, i = 1, \ldots, n.$$

Предположим мы решили систему однокритериальных задач:

В каждой *i*-ой задаче нашли вектор $x = x^i$ – доставляющий максимум критерию

$$f_i(x):\ f_i(x^i) = f_i^*.$$

Совокупность скалярных величин $f_i^*, i = 1, \ldots, n,$ в пространстве критериев определяет некоторую точку, называемую "абсолютным максимумом".



Если все $x^i, i = 1, \ldots, n,$ различны, то точка f^* недостижима в пространстве критериев.

Введем положительно определенную матрицу $R = |r_{ij}|, i, j = 1, \ldots, n,$

Тогда скалярная величина:

$$h(x) = \sqrt{(f_i(x) - f_i^*) r_{ij} (f_j(x) - f_j^*)}$$

определяет некоторое расстояние от точки соответствующей вектору *x* до точки "абсолютного максимума". Частный случай, когда *R* – единичная матрица, то - Евклидово расстояние.

В качестве критерия можно выбрать:

$$h(x) \to \min_x.$$

II. Сужение неопределенности. Компромиссы Парето.

Другой подход к решению многокритериальных задач заключается в попытке сократить множество исходных вариантов, т.е. исключить из неформального анализа те варианты решений, которые являются заведомо плохими. Этот подход используется в случае равнозначности критериев.

Предположим, что сделан некоторый выбор x^*, и существует другой выбор $\bar{x}$ такой, что для всех критериев имеет место неравенство:

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \ldots, n,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое. Очевидно, что выбор $\bar{x}$ предпочтительнее выбора x^* .

Вектор называется *не улучшаемым вектором результатов* (*вектором Парето, эффективным вектором*), если из соотношений

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x^*), i = 1, \ldots, n,$$

следует, что ,

$$f_i(\bar{x}) = f_i(x^*), i = 1, \ldots, n.$$

Множество всех векторов Парето называют *множеством Парето*.

Принцип Парето: в качестве решения следует выбирать только тот вектор *x*, который принадлежит множеству Парето.

Рассмотрим пример. Фирма по разработке программного обеспечения должна выполнить два проекта 1 и 2 в порядке 1,2. Для выполнения каждого из проектов фирма может привлекать одного, двух или трёх программистов. Пусть X_1 число программистов, привлекаемых для выполнения первого, X_2 – второго проектов. Время выполнения проекта i равно $t_i(X_i)$, i=1,2. Стоимости работ по проектам равны $C_i(X_i)$, i=1,2. Требуется минимизировать общее время выполнения проектов и стоимость их выполнения.

Общая стоимость их выполнения $f_1(X_1,X_2) = C_1(X_1)+C_2(X_2)$, а время выполнения проектов равно $f_2(X_1,X_2) = t_1(X_1)+t_2(X_2)$. Получим задачу

$$f_1(X_1,X_2) \to \min \text{ , } f_2(X_1,X_2) \to \min$$

$$X_1,\ X_2 \in \{1,2\}.$$

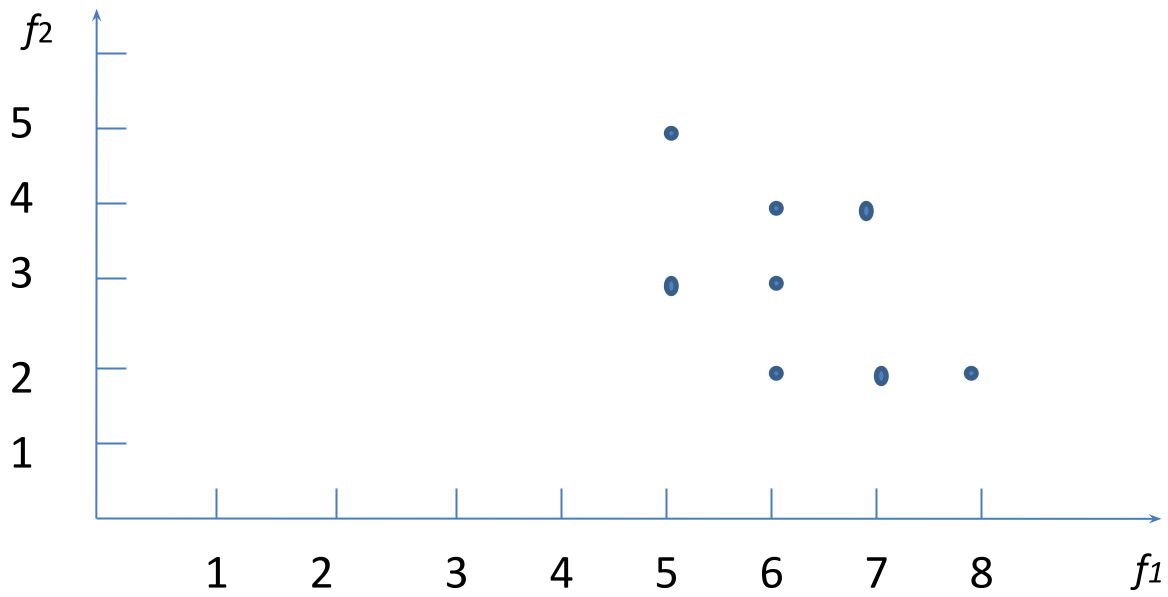
Пусть значения функций заданы в таблице:

Определим все возможные значения пар (f_1,f_2) .

), (5,3), (6,4), (6,2), (6,3), (7,4), (8,2),

X	1	2	3
$C_1(X)$	1	2	3
$C_2(X)$	4	4	5
$t_1(X)$	2	1	1
$t_2(X)$	3	1	1

Построим в пространстве критериев точки соответствующие парам (f_1,f_2) .



Поиск точек Парето можно осуществить графически. Находим точки с минимальным значением f_1. Затем среди них находим точку с минимальным значением f_2. Включаем её в множество Парето. Затем исключаем из рассмотрения все точки, у которых значения по обоим критериям больше или равны соответствующим значениям найденной точки Парето. Для оставшегося множества повторяем процедуру.

Для нашего примера получим множество Парето: (5,3), (6,2).