

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ И ИХ ПРОВЕРКА

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ И ИХ ПРОВЕРКА.

1. Статистические гипотезы, их типы и виды.
2. Статистические критерии.
3. Правило отклонения нулевой и принятия альтернативной гипотезы.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

Под *статистической гипотезой* понимают любое предположение о свойствах случайных величин или событий.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

*Основные типы гипотез.*

*I тип.* Гипотезы о типах вероятностных законов распределения случайных величин.

Например: оценки учащихся по некоторому тесту имеют нормальное распределение в совокупности учащихся пятых классов Санкт-Петербурга.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

*Основные типы гипотез.*

*II тип.* Гипотезы о свойствах числовых параметров.

Например: среднее число верных ответов на контрольные задания не меньше 9.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

*Основные типы гипотез.*

*III тип.* Гипотезы о стохастической (вероятностной) зависимости двух и более признаков (факторов).

Например: успеваемость класса стохастически зависит от уровня обучаемости учащихся.

# 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

*Основные типы гипотез.*

*IV тип.* Гипотезы о равенстве или различии законов распределения случайных величин.

Например:

- а) усвоение курса математики не имеет существенных различий у учащихся, начавших обучение с шести или с семи лет;
- б) количество правильно выполненных заданий у учащихся экспериментальной группы не больше, чем у учащихся контрольной группы.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

Следует различать содержательные и статистические гипотезы.



## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

### Путь формулировки статистических гипотез.

- Сформулировать содержательную гипотезу.
- Выбрать шкалу измерения.
- Подобрать соответствующий статистический критерий.
- Сформулировать статистические гипотезы.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

Статистические гипотезы подразделяются на *нулевые и альтернативные.*

*Нулевая гипотеза* — это гипотеза об отсутствии различий.

Она обозначается  $H_0$ .

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

Статистические гипотезы подразделяются на *нулевые и альтернативные.*

*Альтернативная гипотеза* — это гипотеза о значимости различий.

Она является отрицанием  $H_0$  и обозначается  $H_1$ .

Альтернативную гипотезу иногда называют *экспериментальной гипотезой.*

# 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

Статистические гипотезы подразделяются на *ненаправленные* и *направленные*.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

```
graph TD; A[СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ] --> B[Ненаправленные:]; A --> C[Направленные:];
```

### Ненаправленные:

$H_0$ :  $X_1$  не отличается от  $X_2$

$H_1$ :  $X_1$  отличается от  $X_2$

### Направленные:

$H_0$ :  $X_1$  не превышает  $X_2$

$H_1$ :  $X_1$  превышает  $X_2$

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ.

*К каким видам гипотез относятся следующие?*

- а) усвоение курса математики не имеет существенных различий у учащихся, начавших обучение с шести или с семи лет;
- б) количество правильно выполненных заданий у учащихся экспериментальной группы не больше, чем у учащихся контрольной группы.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Статистические гипотезы проверяются с помощью *статистических критериев*.

*Статистический критерий* — это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

При проверке нулевой гипотезы принципиально возможны четыре случая.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

При проверке нулевой гипотезы принципиально возможны четыре случая.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$		
Отклоняем $H_0$		

(Верные и ошибочные варианты.)



## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$		
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	

Отклонение истинной  $H_0$  называется *ошибкой первого рода*.

Вероятность ошибки первого рода обозначают  $\alpha$ .

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$		
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	

Отклонение истинной  $H_0$  называется *ошибкой первого рода*.

Вероятность ошибки первого рода обозначают  $\alpha$ .

Иначе  $\alpha$  называется уровнем значимости.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$		
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	

В современной литературе уровень значимости обозначается буквой  $p$ .

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Обычно альтернативную гипотезу принимают на одном из следующих уровней значимости:

$p \leq 0,10$  (читать: «десятипроцентный уровень значимости»);

$p \leq 0,05$  (читать: «пятипроцентный уровень значимости»);

$p \leq 0,01$  (читать: «однопроцентный уровень значимости»);

$p \leq 0,001$  (читать: «одномилльный уровень значимости»).

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$		
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	$1 - \alpha$

Вероятность отклонения ложной  $H_0$  будет равна  $1 - \alpha$ .

$1 - \alpha$  — это уровень достоверности.

Он иногда обозначается буквой  $\Theta$ .

$$\Theta = 1 - \alpha$$

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Т.о., каждому уровню значимости соответствует свой уровень достоверности:

$p \leq 0,10$  соответствует  $\Theta \geq 0,90$ ;

$p \leq 0,05$  соответствует  $\Theta \geq 0,95$ ;

$p \leq 0,01$  соответствует  $\Theta \geq 0,99$ ;

$p \leq 0,001$  соответствует  $\Theta \geq 0,999$ .

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$	$1 - \beta$	$\beta$
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	$1 - \alpha$

Принятие ложной  $H_0$  называется *ошибкой второго рода*.

Вероятность ошибки второго рода обозначается буквой  $\beta$ .

Тогда, вероятность принятия истинной  $H_0$  будет равна  $1 - \beta$ .

## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$	$1 - \beta$	$\beta$
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	$1 - \alpha$

$1 - \beta$  — это *мощность критерия*.

Другими словами, мощность критерия — это его способность не допустить ошибок второго рода.



## 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ.

Действия исследователя	Состояние $H_0$	
	$H_0$ истинна	$H_0$ ложна
Принимаем $H_0$	$1 - \beta$	$\beta$
Отклоняем $H_0$	$\alpha$	$1 - \alpha$

Мощность критерия трудно выразить в процентах.

Она устанавливается эмпирически путем применения разных критериев к одним и тем же задачам.

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

#### Правило отклонения $H_0$ и принятия $H_1$ (строгое).

*Если эмпирическое значение критерия меньше критического значения, соответствующего  $p \leq 0,05$ , то принимается  $H_0$ .*

*Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему  $p \leq 0,05$ , или превышает его, но меньше критического значения, соответствующего  $p \leq 0,01$ , то  $H_0$  отклоняется, но мы еще не можем определенно принять  $H_1$ .*

*Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему  $p \leq 0,01$ , или превышает его, то  $H_0$  отклоняется и принимается  $H_1$ .*

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Правило отклонения  $H_0$  и принятия  $H_1$  (строгое).

*Исключения:*

*G (критерий знаков).*

*U (критерий Манна-Уитни).*

*T (критерий Вилкоксона).*

*Для них устанавливаются обратные соотношения.*

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Правило отклонения  $H_0$  и принятия  $H_1$  (строгое).

*Исключения:*

***G***

***U***

***T***

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Проиллюстрируем правило на «оси значимости»:



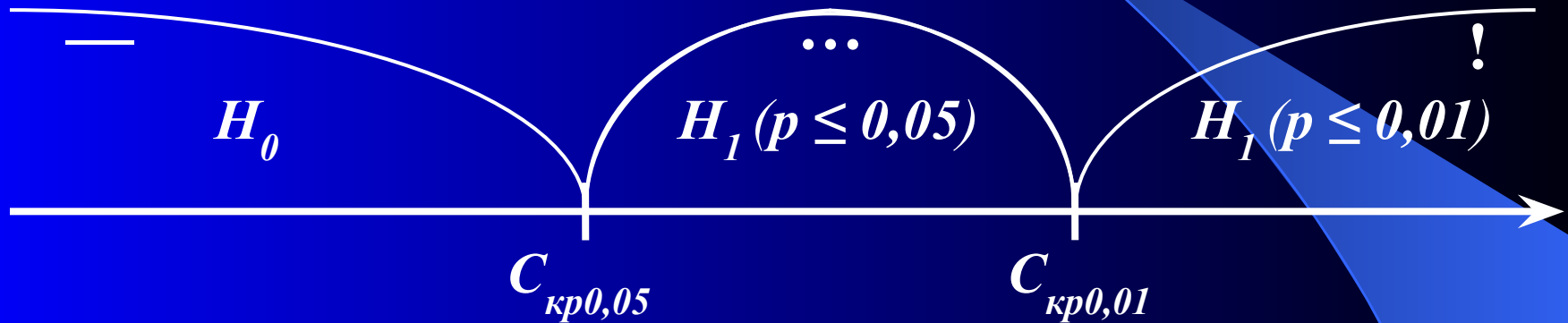
### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

В психолого-педагогических исследованиях  $p \leq 0,05$  считается достаточным для принятия  $H_1$ .

Поэтому мы будем пользоваться следующим (основным) правилом.

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Правило отклонения  $H_0$  и принятия  $H_1$  (основное).



### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

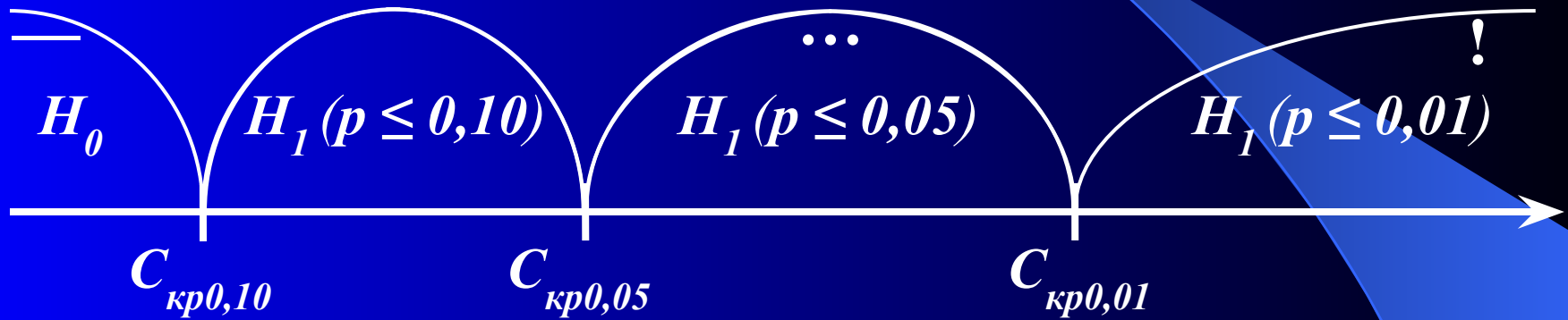
В педагогических исследованиях, если позволяют результаты качественного анализа, иногда и  $p \leq 0,10$  считается достаточным для принятия  $H_1$ .

В этом случае можно воспользоваться следующим (нестрогим) правилом.



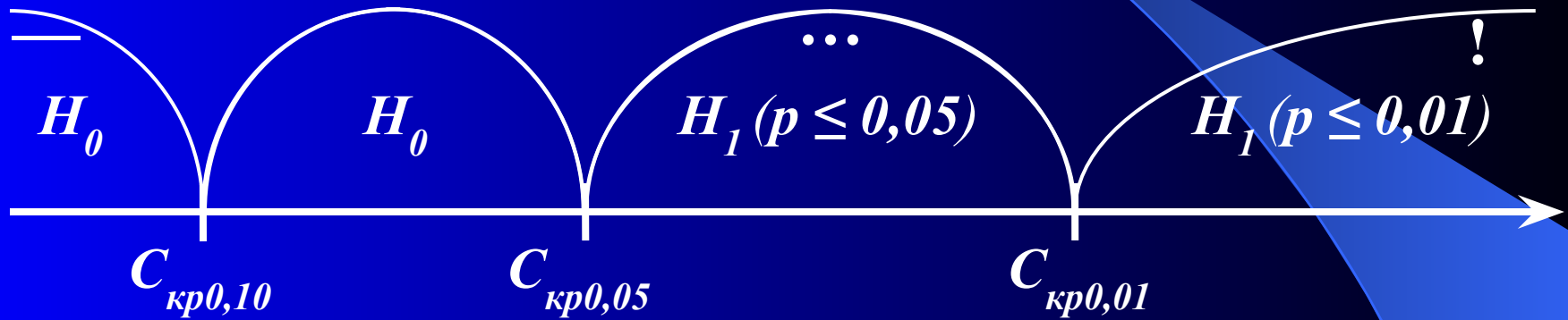
### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Правило отклонения  $H_0$  и принятия  $H_1$  (нестрогое).



### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Правило отклонения  $H_0$  и принятия  $H_1$  (основное).



### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Если мы предполагаем, что различия между группами есть (т.е.  $H_1$  — истинна), а критерий этого не показывает, то можно:

а) увеличить выборку;

б) применить более мощный критерий.

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

Если это не помогло, то возможны следующие объяснения:

- а) некорректно применен критерий;
- б) ошибки в вычислениях;
- в) выборка все еще мала;
- г) мы заблуждаемся.

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

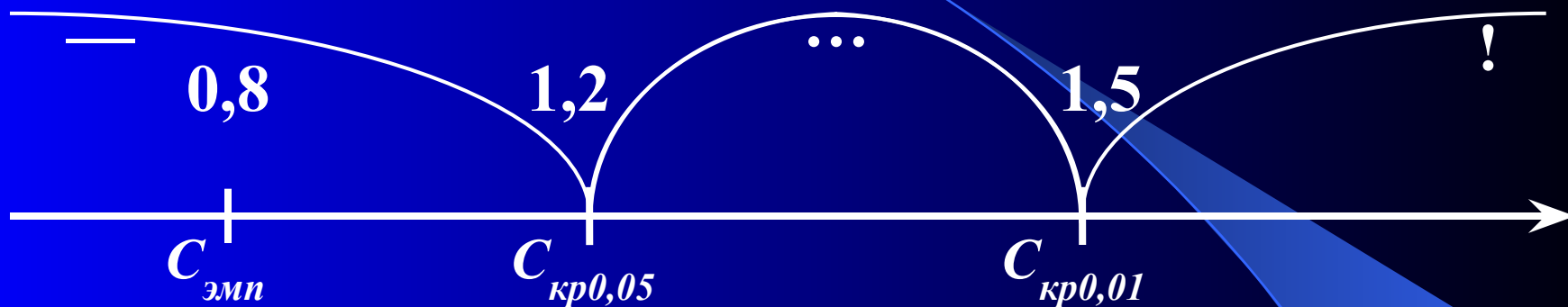
Как отличить  $v)$  от  $z)$ ?

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

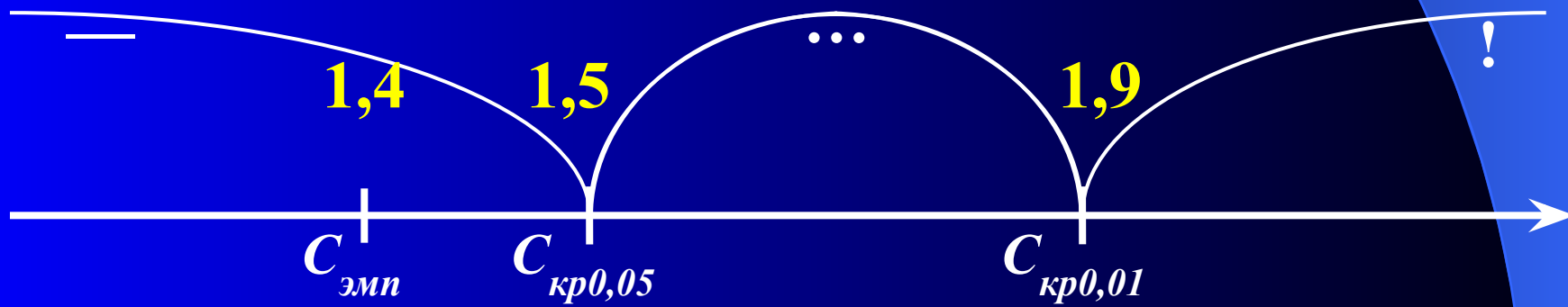
*e)* — выборка все еще мала.

### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

в) — выборка все еще мала.

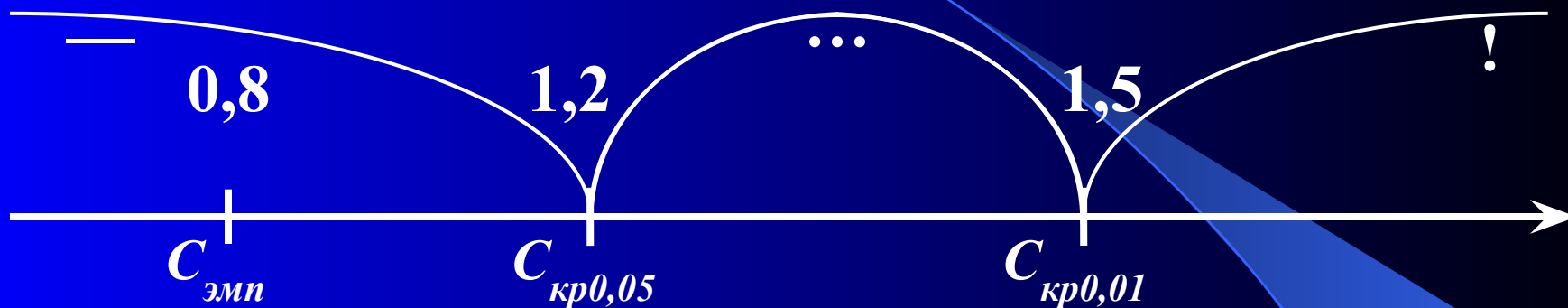


Увеличили выборку на пять человек:

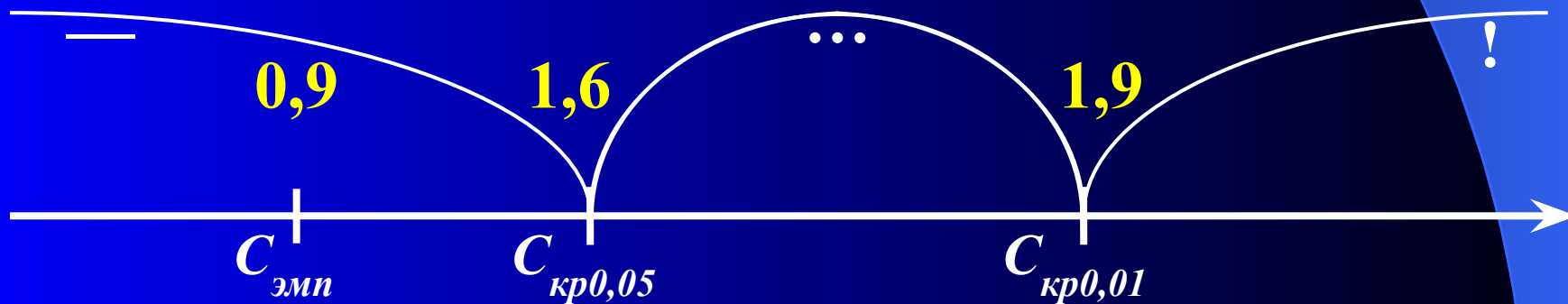


### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

г) — различий между группами нет.



Увеличили выборку на пять человек:





### 3. ПРАВИЛО ПРИНЯТИЯ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ГИПОТЕЗЫ.

## На практике мы в большинстве случаев будем пользоваться основным правилом!

Если эмпирическое значение критерия меньше критического значения, соответствующего  $p \leq 0,05$ , то принимается  $H_0$ .

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему  $p \leq 0,05$ , или превышает его, но меньше критического значения, соответствующего  $p \leq 0,01$ , то  $H_0$  отклоняется и принимается  $H_1$  ( $p \leq 0,05$ ).

Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему  $p \leq 0,01$ , или превышает его, то  $H_0$  отклоняется и принимается  $H_1$  ( $p \leq 0,01$ ).

