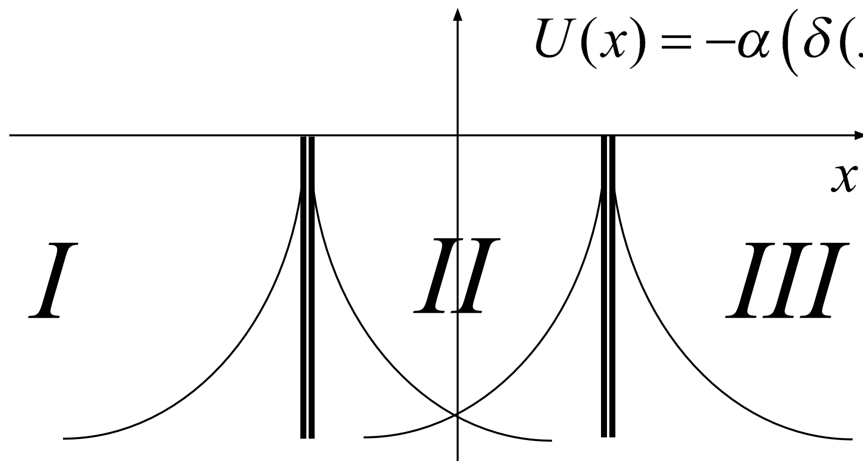
Связанные состояния в двух дельта-функционных ямах

$$U(x) = -\alpha\left(\delta(x+a) + \delta(x-a)\right)$$



Уравнение Шрёдингера

$$\psi'' - k^2\psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2m\,|\,E\,|}{\hbar^2}}$$

Коммутатор

$$\left[\hat{H}, \hat{I}\right] = ?$$

Решения?

Решение чётное

$$I, III: \psi(x) = A \cdot \mathrm{e}^{-k|x|}$$

$$II: \psi(x) = B \cdot \cosh kx$$

Решение нечётное

$$I, III: \psi(x) = \pm A \cdot \mathrm{e}^{-k|x|}$$

$$II: \psi(x) = B \cdot \sinh kx$$

Условия сшивки?

Условие сшивки для чётных уровней

$$\begin{cases} A\cdot \mathrm{e}^{-ka} - B\cdot \cosh ka = 0 \\ -kA\cdot \mathrm{e}^{-ka} - kB\cdot \sinh ka = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{-ka} \end{cases}$$

Уравнение для энергии связанного состояния?

Промежуточные формулы

$$\begin{cases} A\cdot \mathrm{e}^{-ka} - B\cdot \cosh ka = 0 \\ A\cdot \mathrm{e}^{-ka}\left[k - \dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\right] + kB\cdot \sinh ka = 0 \end{cases}$$

Преобразование детерминанта

$$k\cdot \sinh ka + \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right]\cdot \cosh ka = \frac{1}{2}\left[k\,\mathrm{e}^{ka} - k\,\mathrm{e}^{-ka} + k\,\mathrm{e}^{ka} + k\,\mathrm{e}^{-ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{-ka}\right] = 0$$

Или

$$k\,\mathrm{e}^{ka} - \frac{m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{ka} - \frac{m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{-ka} = 0 \quad \Rightarrow \quad k - \frac{m\alpha}{\hbar^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2ka}\right) = 0$$

Записать уравнение для энергии через безразмерные параметры

$$\gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha\, a}{\hbar^2}$$

Уравнение для энергии чётного связанного состояния

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 + \mathrm{e}^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Нечётные уровни?

Условия сшивки для нечётных уровней

$$\begin{cases} A\cdot \mathrm{e}^{-ka} - B\cdot \sinh ka = 0 \\ -kA\cdot \mathrm{e}^{-ka} - kB\cdot \cosh ka = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{-ka} \end{cases}$$

Промежуточные формулы

$$\begin{cases} A\cdot \mathrm{e}^{-ka} - B\cdot \sinh ka = 0 \\ A\cdot \mathrm{e}^{-ka}\left[k - \dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\right] + kB\cdot \cosh ka = 0 \end{cases}$$

Детерминант

$$k\cdot \cosh ka + \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right]\cdot \sinh ka = \frac{1}{2}\left[k\,\mathrm{e}^{ka} + k\,\mathrm{e}^{-ka} + k\,\mathrm{e}^{ka} - k\,\mathrm{e}^{-ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{ka} + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\cdot \mathrm{e}^{-ka}\right] = 0$$

Уравнение для энергии нечётного связанного состояния?

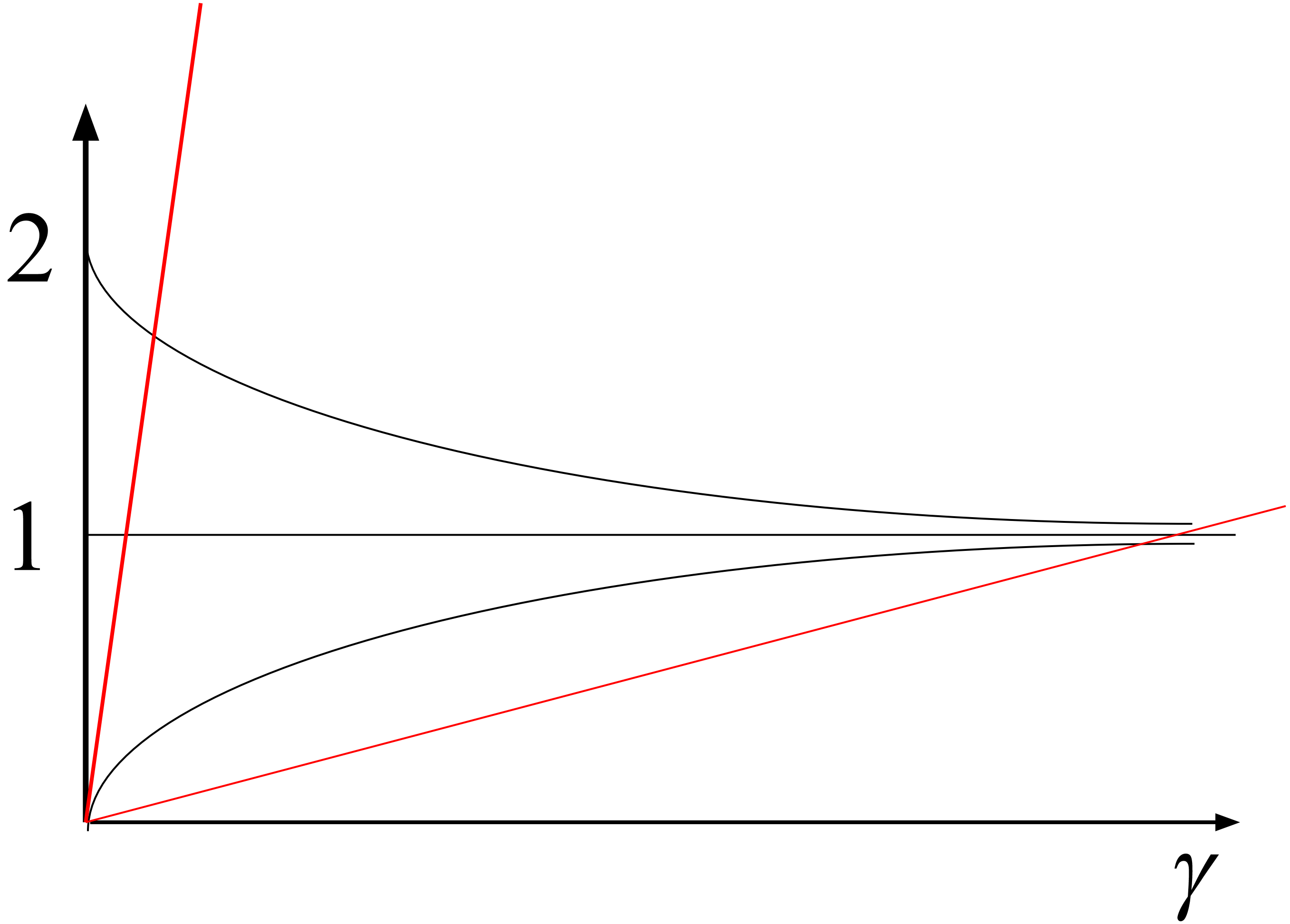
Уравнение для энергии нечётного связанного состояния

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 - \mathrm{e}^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Общее уравнение для энергии связанных состояний

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 \pm \mathrm{e}^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Найти графическое решение уравнения и определить условие возникновения нечётного уровня?



Условие возникновения нечётного уровня?

Найти энергию уровней для сильно раздвинутых ям?

$$\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \gg 1$$

Условие возникновения нечётного уровня

$$\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} > \frac{1}{2}$$

Найти энергию уровней для сильно раздвинутых ям

$$\gamma \approx \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)} = \xi\left(1 \pm \mathrm{e}^{-2\xi}\right)$$

Условие возникновения нечётного уровня.
Решение уравнения Шрёдингера с нулевой энергией

Ищем решение уравнения Шрёдингера с нулевой энергией, накладывая условие ограниченности решения в пространстве

$$\psi'' = 0$$

$$I, III : \psi(x) = \pm A$$
$$II : \psi(x) = B \cdot x$$

Условие сшивки?

Условие сшивки

$$\begin{cases} A - B \cdot a = 0 \\ -B = -\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot B \cdot a \end{cases}$$

Или

$$\frac{m\alpha a}{\hbar^2} = \xi = \frac{1}{2}$$