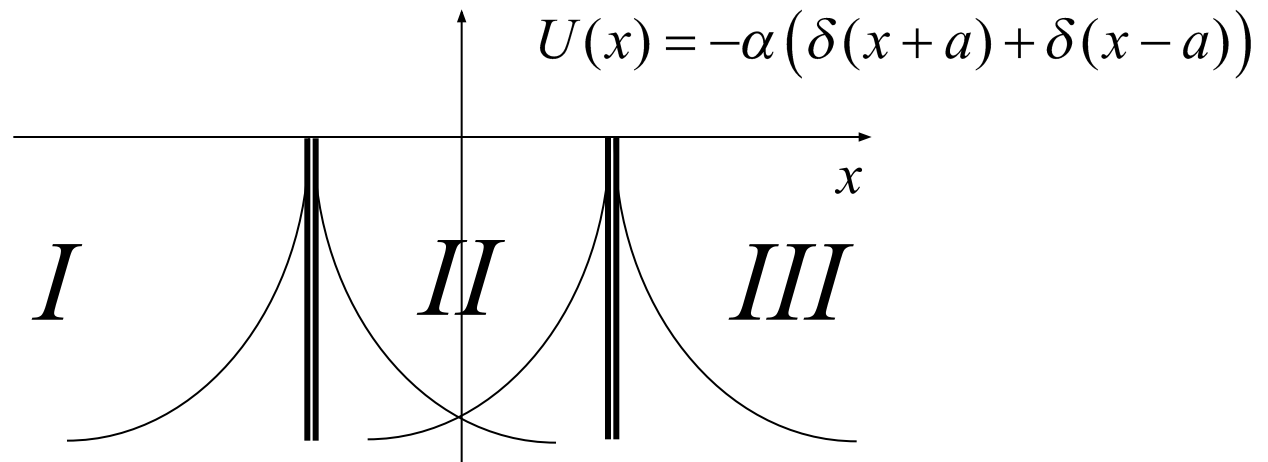


Связанные состояния в двух дельта-функциональных ямах



Уравнение Шрёдингера

$$\psi'' - k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2m |E|}{\hbar^2}}$$

Коммутатор

$$[\hat{H}, \hat{I}] = ?$$

Решения?

Решение чётное

$$I, III : \psi(x) = A \cdot e^{-k|x|}$$

$$II : \psi(x) = B \cdot \cosh kx$$

Решение нечётное

$$I, III : \psi(x) = \mp A \cdot e^{-k|x|}$$

$$II : \psi(x) = B \cdot \sinh kx$$

Условия сшивки?

Условие сшивки для чётных уровней

$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} - B \cdot \cosh ka = 0 \\ -kA \cdot e^{-ka} - kB \cdot \sinh ka = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot A \cdot e^{-ka} \end{cases}$$

Уравнение для энергии связанного состояния?

Промежуточные формулы

$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} - B \cdot \cosh ka = 0 \\ A \cdot e^{-ka} \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \right] + kB \cdot \sinh ka = 0 \end{cases}$$

Преобразование детерминанта

$$k \cdot \sinh ka + \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \right] \cdot \cosh ka = \frac{1}{2} \left[k e^{ka} - k e^{-ka} + k e^{ka} + k e^{-ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{-ka} \right] = 0$$

Или

$$k e^{ka} - \frac{m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{ka} - \frac{m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{-ka} = 0 \quad \Rightarrow \quad k - \frac{m\alpha}{\hbar^2} (1 + e^{-2ka}) = 0$$

Записать уравнение для энергии через безразмерные параметры

$$\gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Уравнение для энергии чётного связанного состояния

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 + e^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Нечётные уровни?

Условия сшивки для нечётных уровней

$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} - B \cdot \sinh ka = 0 \\ -kA \cdot e^{-ka} - kB \cdot \cosh ka = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot A \cdot e^{-ka} \end{cases}$$

Промежуточные формулы

$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} - B \cdot \sinh ka = 0 \\ A \cdot e^{-ka} \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \right] + kB \cdot \cosh ka = 0 \end{cases}$$

Детерминант

$$k \cdot \cosh ka + \left[k - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \right] \cdot \sinh ka = \frac{1}{2} \left[k e^{ka} + k e^{-ka} + k e^{ka} - k e^{-ka} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{ka} + \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot e^{-ka} \right] = 0$$

Уравнение для энергии нечётного связанного состояния?

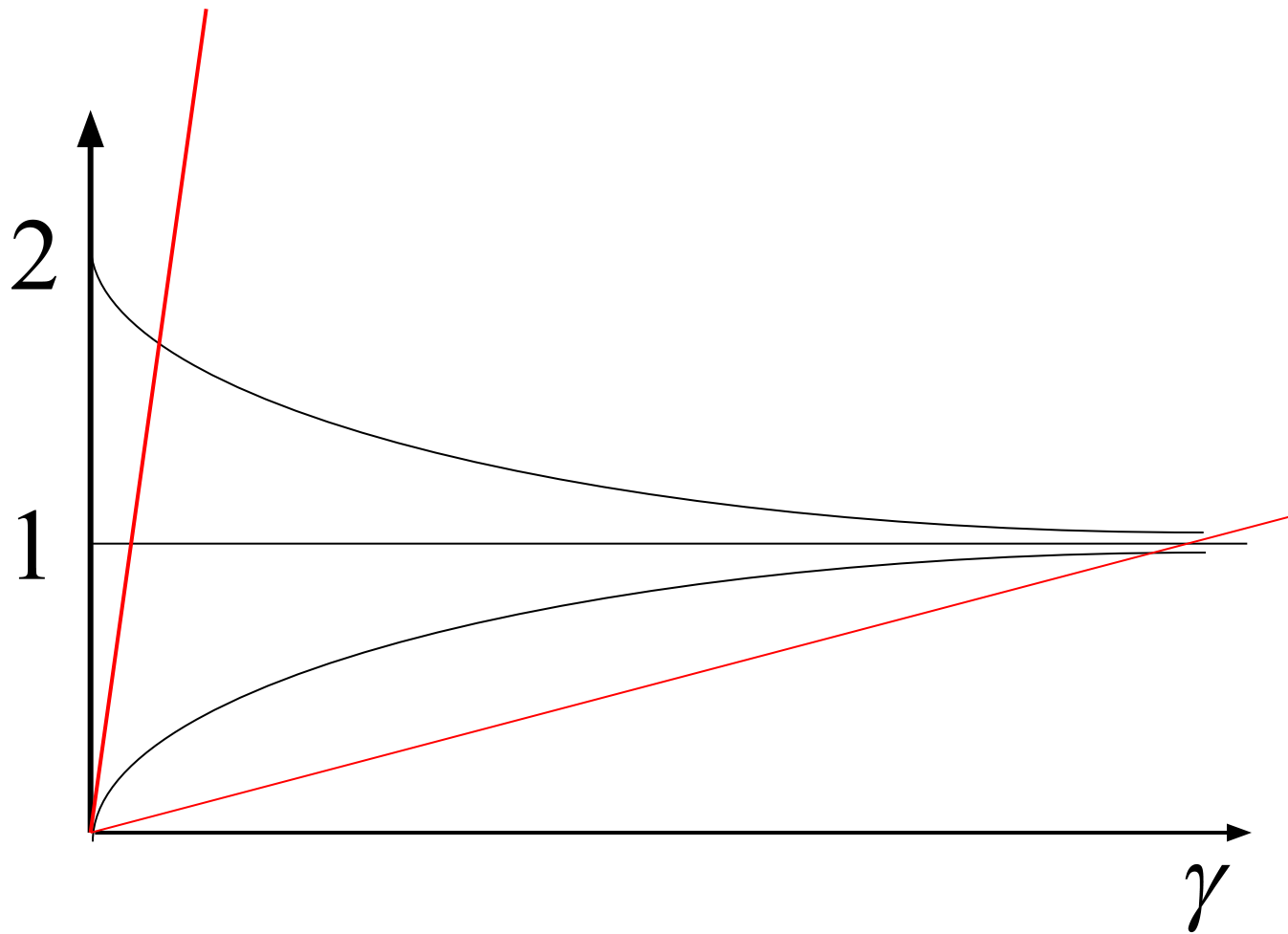
Уравнение для энергии нечётного связанного состояния

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 - e^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Общее уравнение для энергии связанных состояний

$$\frac{\gamma}{\xi} = 1 \pm e^{-2\gamma}, \quad \gamma = ka, \quad \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2}$$

Найти графическое решение уравнения и определить условие возникновения нечётного уровня?



Условие возникновения нечётного уровня?

Найти энергию уровней для сильно раздвинутых ям?

$$\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \approx 1$$

Условие возникновения нечётного уровня

$$\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} > \frac{1}{2}$$

Найти энергию уровней для сильно раздвинутых ям

$$\gamma \approx \gamma^{(0)} + \gamma^{(1)} = \xi \left(1 \pm e^{-2\xi} \right)$$

Условие возникновения нечётного уровня.
Решение уравнения Шрёдингера с нулевой энергией

Ищем решение уравнения Шрёдингера с нулевой энергией,
накладывая условие ограниченности решения в пространстве

$$\psi'' = 0$$

$$I, III : \psi(x) = \boxtimes A$$

$$II : \psi(x) = B \cdot x$$

Условие сшивки?

Условие сшивки

$$\begin{cases} A - B \cdot a = 0 \\ -B = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \cdot B \cdot a \end{cases}$$

Или

$$\frac{m\alpha a}{\hbar^2} = \xi = \frac{1}{2}$$