

# **Элементы нелинейного функционального анализа**

## **Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах**

## § 7. Теорема о среднем.

### 1. Теорема Лагранжа.

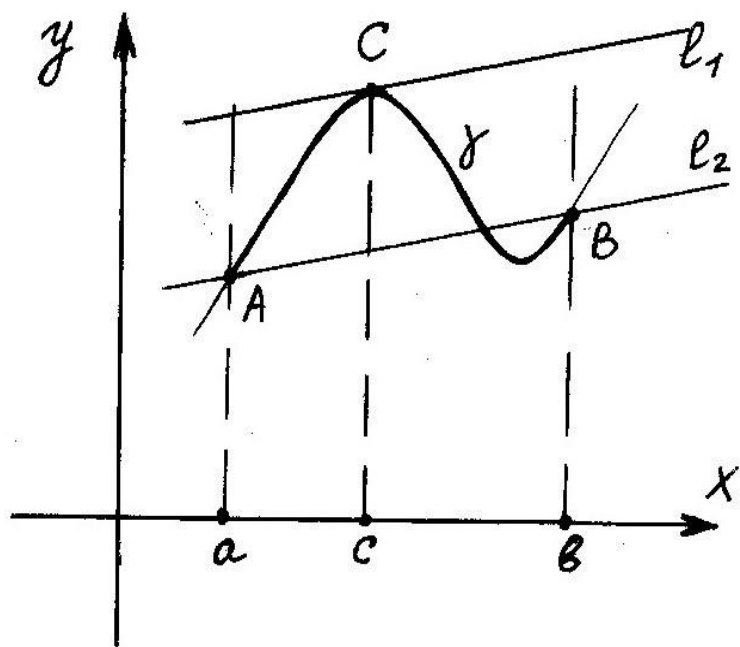
Th  $\exists$  Если функция  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  дифференцируема на  $[a, b]$ , то  $\exists$  точка  $c \in (a, b)$ , такая, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \quad (*)$$

(доказ-ан в Мат. Анализе)

Формула (\*) — формула конечных приращений.

# Геометрический смысл Теоремы Лагранжа



$$(*) \Rightarrow \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi'(c) = k^{\text{средн.}}$$

$l_1$  - касательная к кривой  $\gamma$   
(графику  $\varphi$ -ции) в т.  $C(c, \varphi(c))$ ;

$l_2$  - секущая, проходящая  
через точки  $A(a, \varphi(a))$  и  $B(b, \varphi(b))$ .

$$\text{Ур-е } l_1: \frac{y - \varphi(c)}{x - c} = \varphi'(c) = k \Rightarrow \underline{y = k(x - c) + \varphi(c)} \quad (1)$$

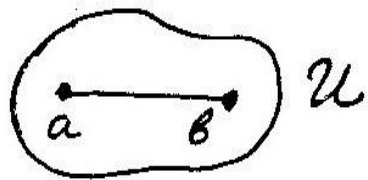
$$\text{Ур-е } l_2: \frac{y - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = \underbrace{\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}}_k (x - a) + \varphi(a)$$

$$\Rightarrow \underline{y = k(x - a) + \varphi(a)} \quad (2)$$

След-но,  $l_1 \parallel l_2$ .

## 2. Обобщение теоремы Лагранжа.

Рассмотрим отображение  $f: \underset{E}{U} \rightarrow F$ , где  $E, F$  — ЛНП-ва,  
 $U$  — открытое мн-во в  $E$ .



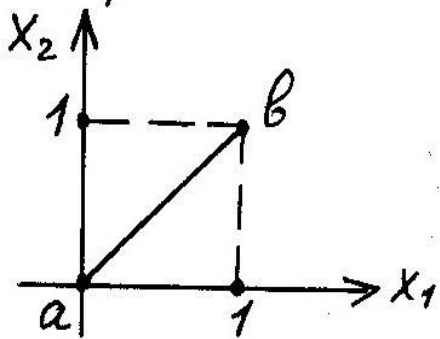
Пусть  $f$  дифф-мо по Фреше на  $U$ ;

$$[a, b]_E = \{(1-t)a + t \cdot b \mid t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^1\} \subset U \quad (a, b \in U).$$

Сокращается ли формула (\*)?

Сохраняется ли формула (\*)?

Пример.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$ .



Пусть  $a = (0, 0)^T$ ,  $b = (1, 1)^T$ .

$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 \end{pmatrix}$  — матрица оператора  $f'(x)$  (кр-й Фреше).

Предположим:

формула (\*) сохраняет свой вид.

$$\text{Тогда } f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 & 0 \\ 0 & 3c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 3c_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T \notin [a, b].$$

Вывод: ф-ла (\*) не переносится на случай отображений, действующих в ЛНП-х.

3. Теорема о среднем как обобщение Теоремы Лагранжа.

Th Пусть  $E, F$  — ЛНП-ва,  $U$  — открытое м-во в  $E$ , отображение  $f: U \rightarrow F$  дифф-мо по Фреше на  $U$  и отрезок  $[a, b]_E \subset U$ . Тогда

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{\xi \in [a, b]} \|f'(\xi)\| \cdot \|b - a\|_E \quad (**)$$

Док-во. Рассмотрим произвольный  $\ell \in F^*$

(ЛОФ на  $F$ ) и вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \ell(\underbrace{f}_{\mathbb{R}^1}((1-t)a + tb)), \quad \varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Найдем производную  $\varphi'(t)$ :

$$\varphi'(t) = \underbrace{[\ell'(y) \cdot f'(z)]}_{\text{произведение операторов}} \underbrace{g'(t)}_{\text{вектор из } E}, \quad \text{где } y = f(g(t)),$$

$$z = g(t) = (1-t)a + t \cdot b;$$

$$\ell'(y) = \ell \quad (\ell(y+h) - \ell(y) = \ell(h), \text{ т.к. } \ell - \text{лин. ф-н});$$

$$g'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = b - a \quad (\text{обычная производная});$$

$$\varphi'(t) = [\ell \cdot f'(g(t))](b-a) = \ell \underbrace{[f'(g(t))(b-a)]}_{\text{значение оператора на векторе } b-a}.$$

По теореме Лагранжа:  $\exists \tau \in (0, 1)$ , что

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1-0) = \varphi'(\tau)(3).$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \ell(f(b)) - \ell(f(a)) = \ell(f(b) - f(a));$$

линейный  $\varphi^{-1}$

след-но, из (3)  $\Rightarrow$   $\ell(f(b) - f(a)) = \ell[f'(g(\tau))(b-a)]$ . (4)

Следствие из теоремы Хаана-Банаха: для любого

$y_0 \in F$  ( $y_0 \neq \theta$ )  $\exists$  л.о.ф.  $\ell$ : 1)  $\ell(y_0) = \|y_0\|_F$  и 2)  $\|\ell\| = 1$ .

Пусть  $y_0 = f(b) - f(a) \in F$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \ell(f(b) - f(a)) \stackrel{(4)}{=} \underbrace{\ell}_{\text{л.о.ф.}} \left[ \underbrace{f'(g(\tau))}_{\text{л.о.о.}}(b-a) \right] \leq \\ &\leq \underbrace{\|\ell\|}_{=1} \cdot \|f'(g(\tau))\| \cdot \|b-a\| = \|f'(g(\tau))\| \cdot \|b-a\| \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in [a,b]} \|f'(\xi)\| \cdot \|b-a\|. \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$