Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§7. Теорема о среднем.

1. Теорема Лагранжа.

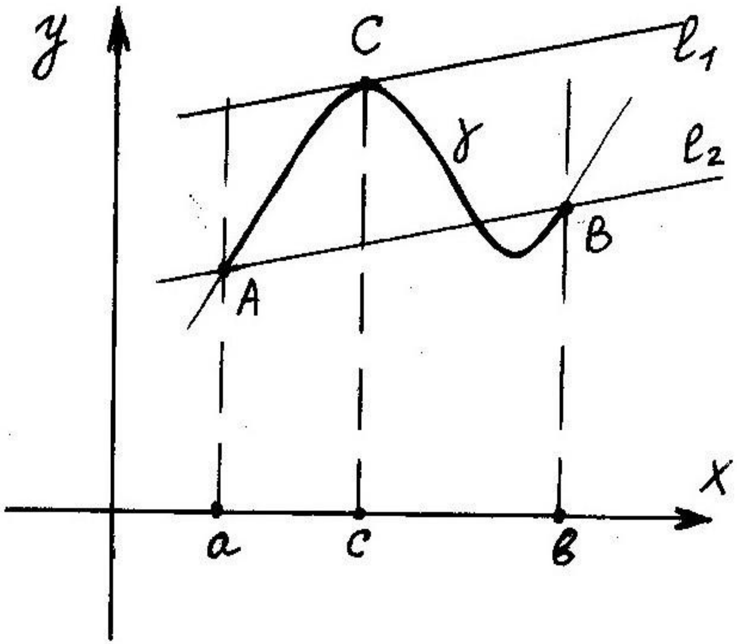
Th Если функция $\varphi : \overset{\overset{\mathbb{R}^1}{\cup}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ дифференцируема на $[a,b]$, то $\exists$ точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$\underline{\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \qquad (*)}$$

(доказ-ся в Мат. Анализе)

Формула $(*)$ — <u>формула конечных приращений.</u>

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



$$(*) \Rightarrow \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \varphi'(c) \overset{\text{обозн.}}{=} k$$

l_1 – касательная к кривой γ (графику ф-ции) в т. $C(c, \varphi(c))$;

l_2 – секущая, проходящая через точки $A(a, \varphi(a))$ и $B(b, \varphi(b))$

Ур-е l_1: $\dfrac{y-\varphi(c)}{x-c} = \varphi'(c) = k \Rightarrow \underline{y = k(x-c)+\varphi(c)}$ (1)

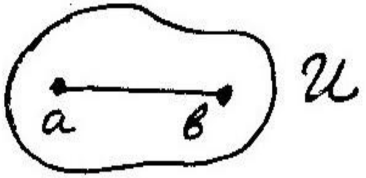
Ур-е l_2: $\dfrac{y-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{x-a}{b-a} \Rightarrow y = \underbrace{\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}}_{k}(x-a)+\varphi(a$

$\Rightarrow \underline{y = k(x-a)+\varphi(a)}$ (2)

След-но, $l_1 \parallel l_2$.

2. Обобщение теоремы Лагранжа.

Рассмотрим отображение $f: \underset{E}{\underset{\cap}{\mathcal{U}}} \to F$, где E, F — ЛНП-ва,
$\mathcal{U}$ — открытое мн-во в E.



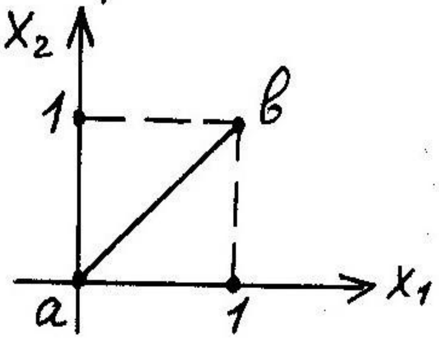
Пусть f дифф-мо по Фреше на U;

$$[a,b]_E = \{(1-t)a + t\cdot b \mid t \in [0,1] \subset \mathbb{R}^1\} \subset \mathcal{U} \quad (a, b \in \mathcal{U}).$$

Сохраняется ли формула (*)?

Сохраняется ли формула (*)?

Пример. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^{\,2} \\ x_2^{\,3} \end{pmatrix}$.



Пусть $a = (0,0)^T$, $\text{в} = (1,1)^T$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 \end{pmatrix}$$ – матрица оператора $f'(x)$ (пр-й Фреше).

Предположим:

формула (*) сохраняет свой вид.

Тогда $f(\text{в}) - f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 & 0 \\ 0 & 3c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 3c_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T \notin [a, \text{в}].$$

Вывод: ф-ла (*) не переносится на случай отображений, действ-х в ЛНП-х.

3. Теорема о среднем как обобщение теоремы Лагранжа.

Th Пусть E, F — ЛНП-ва, $\mathcal{U}$ — открытое мн-во в E, отображение $f : \mathcal{U} \to F$ дифф-мо по Фреше на $\mathcal{U}$ и отрезок $[a,b]_E \subset \mathcal{U}$. Тогда

$$\boxed{\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \sup_{\xi \in [a,b]} \|f'(\xi)\| \cdot \|b-a\|_E} \quad (**)$$

Док-во. Рассмотрим произвольный $l \in F^*$ (ЛОФ на F) и вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = l(f((1-t)a+tb)), \quad \varphi : \underset{\substack{\cap \\ R^1}}{[0,1]} \longrightarrow R^1.$$

Найдем производную $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = \underbrace{[l'(y)\cdot f'(z)]}_{\text{произведение операторов}}\underbrace{g'(t)}_{\text{вектор из } E}, \text{ где } y = f(g(t)),$$

$$z = g(t) = (1-t)a + t\cdot b;$$

$$l'(y) = l \quad (\, l(y+h) - l(y) = l(h), \text{ т.к. } l - \text{лин. ф-л});$$

$$g'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = b - a \text{ (обычная производная)};$$

$$\varphi'(t) = [l\cdot f'(g(t))](b-a) = l[\underbrace{f'(g(t))(b-a)}_{\text{значение оператора на векторе } b-a.}]$$

По теореме Лагранжа: $\exists\, \tau \in (0,1)$, что

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1-0) = \varphi'(\tau) \quad (3).$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \ell(f(b)) - \ell(f(a)) = \underset{\text{линейный ф-л}}{\ell}(f(b)-f(a));$$

след-но, из (3) $\Longrightarrow$ $\ell(f(b)-f(a)) = \ell[f'(g(\tau))(b-a)]. \ (4)$

Следствие из теоремы Хана-Банаха: для всякого $y_0 \in F \ (y_0 \neq \theta)$ $\exists$ ЛОФ ℓ: 1) $\ell(y_0) = \|y_0\|_F$ и 2) $\|\ell\| = 1$.

Пусть $y_0 = f(b) - f(a) \in F$. Тогда

$$\|f(b)-f(a)\| = \ell(f(b)-f(a)) \overset{(4)}{=} \underset{\text{ЛОФ}}{\ell}[\underbrace{f'(g(\tau))}_{\text{ЛОО}}(b-a)] \leq$$

$$\leq \underbrace{\|\ell\|}_{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot \|f'(g(\tau))\| \cdot \|b-a\| = \|f'(g(\tau))\| \cdot \|b-a\| \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in [a,b]} \|f'(\xi)\| \cdot \|b-a\|. \quad \text{ч.т.д.}$$