

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Государственной бюджетное профессиональное образовательное учреждение Ростовской  
области

«Ростовский технологический техникум сервиса»  
(ГБПОУ РО «РТТС»)

Тема: "Интеграл. Определенный интеграл. Свойства.  
Примеры. Применение определенного интеграла  
для нахождения длин, площадей и объемов"

Подготовила:  
Обучающаяся группы №17 1 курса  
Маилова Айтач

# Определенный интеграл.

Определенным интегралом функции

$y=f(x)$  на  $[a,b]$  называется  $\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

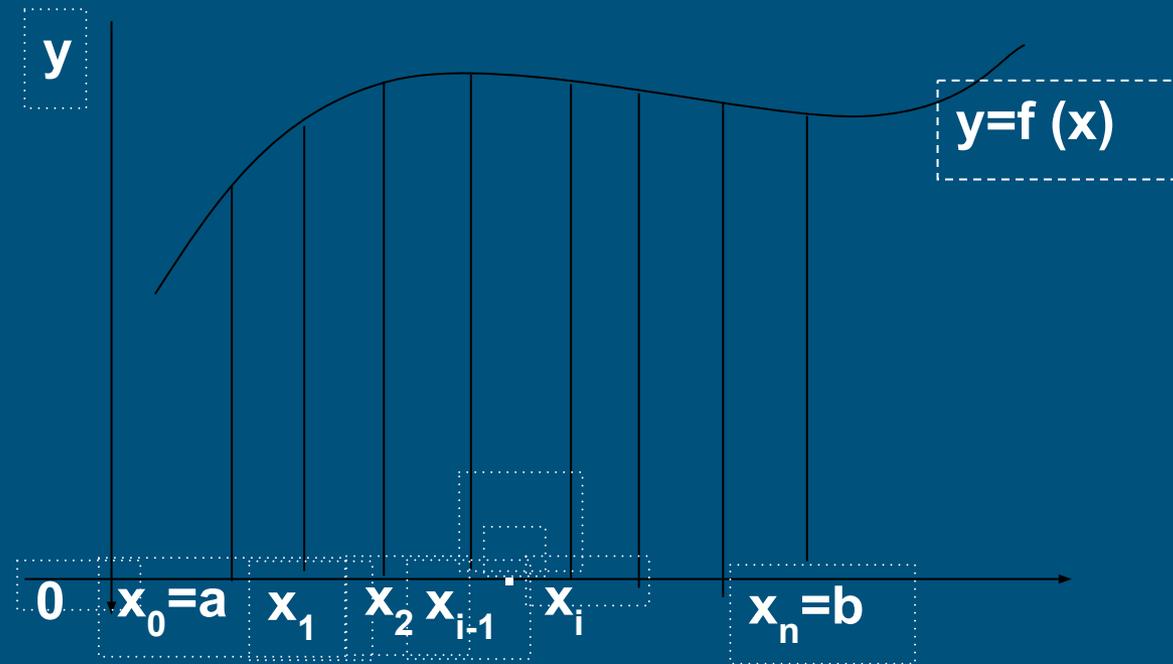
если этот предел существует и не зависит от способа разбиений  $[a,b]$  на  $\Delta x_i$  и от выбора точек  $\xi_i$ . Определенный интеграл

обозначается:  $\int_a^b f(x) dx$  Числа  $a$  и  $b$

называются соответственно нижним и верхним

пределами интегрирования.

# Геометрический смысл определённого интеграла.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

# Свойства определённого интеграла.

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \qquad 2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ } k \text{ — любое число}$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \\ + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

5. Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел  $a, b, c$  справедливо:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

# Формула Ньютона-Лейбница.

Если  $F(x)$  есть какая-либо первообразная от непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , то справедлива формула

$a b$

Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

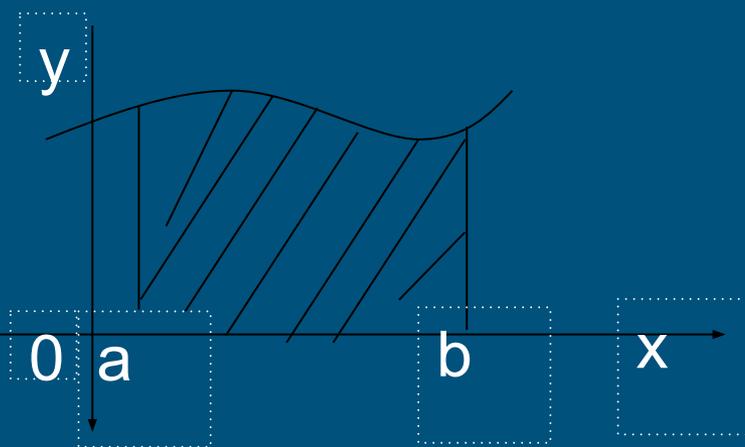
$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Площадь криволинейной трапеции,  
ограниченной кривой, заданной  
параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t), \text{ где } a \leq t \leq \beta, x(a) = a, x(\beta) = b, \\ y = y(t) \end{cases}$$

$x(t), y(t), x'(t), y'(t)$  – непрерывны на  $[a, \beta]$ .

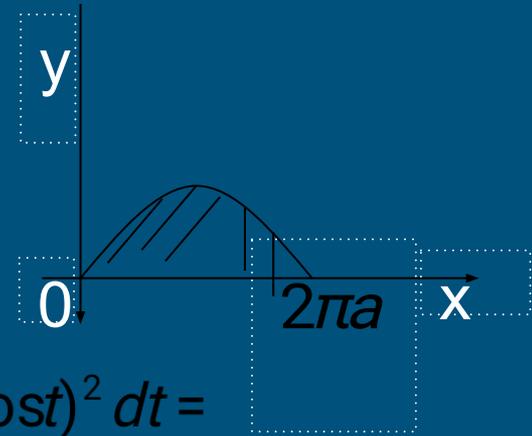
$$S = \int_a^\beta y(t) \cdot x'(t) dt$$



Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой

циклоиды:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos x) \cdot a \cdot (t - \sin t)' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 (t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + \\ &+ a^2 \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi \cdot a^2 + \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая задана уравнением  $y=f(x)$ , где  $f(x)$  и  $f'(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ .

*$a b$*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пусть кривая задана в параметрической

форме  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , причём  $x(t)$ ,  
 $y(t)$ ,  $x'(t) \neq 0$ ,  $y'(t)$  непрерывны на  $[a, \beta]$

$\neq$

$[a, \beta]$

$$x(a) = a, x(\beta) = b.$$

$$I = \int_a^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$