МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственной бюджетное профессиональное образовательное учреждение Ростовской области
«Ростовский технологический техникум сервиса»
(ГБПОУ РО «РТТС»)

Тема:"Интеграл. Определенный интеграл. Свойства. Примеры. Применение определенного интеграла для нахождения длин, площадей и объемов”

Подготовила:
Обучающаяся группы №17 1 курса
Маилова Айтач

Определенный интеграл.

Определенным интегралом функции

y=f(x) на [a,b] называется $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$,

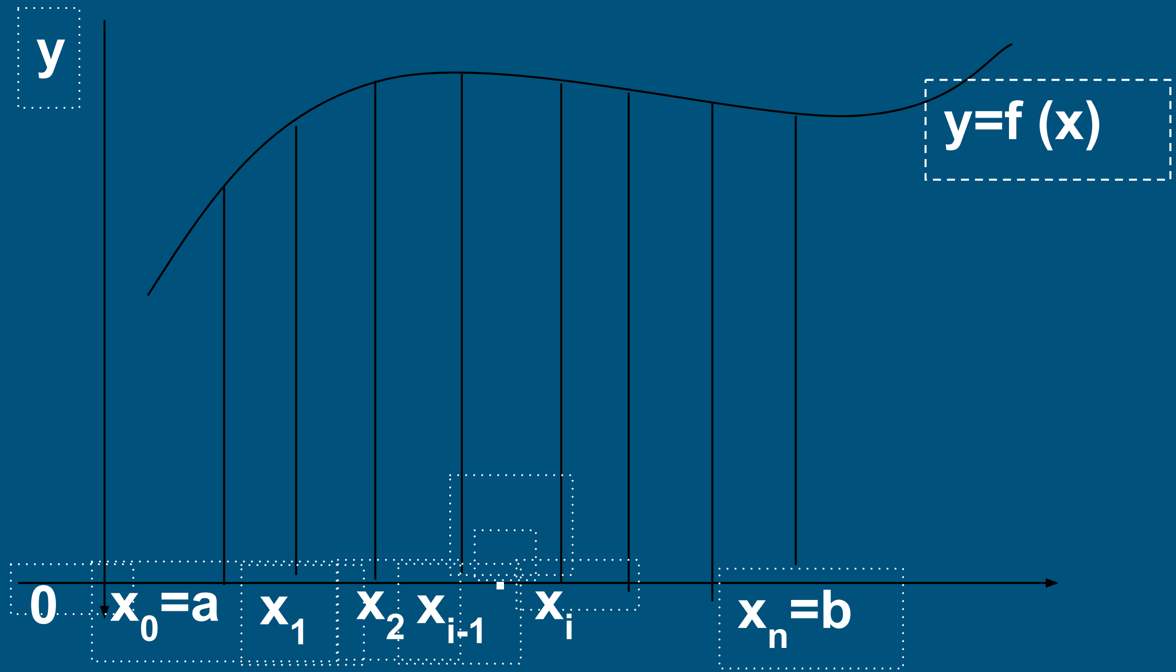
если этот предел существует и не зависит от способа разбиений [a,b] на Δx_i и от выбора точек ξ_i. Определенный интеграл

обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Числа *a* и *b*

называются соответственно нижним и верхним

пределами интегрирования.

Геометрический смысл определённого интеграла.



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Свойства определённого интеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 2. $\int_a^a f(x) = 0$

3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^a f(x)dx$, k-любое число

4. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx +$

$$+\int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

5.Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a,b,c справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Если *F(x)* есть какая-либо первообразная от непрерывной на [a, b] функции f(x), то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

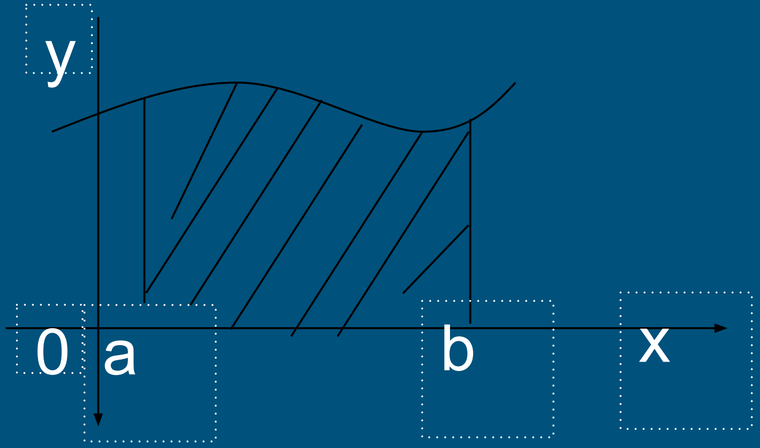
$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \,\Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t), \text{ где } \alpha \le t \le \beta,\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b, \\ y = y(t) \end{cases}$$

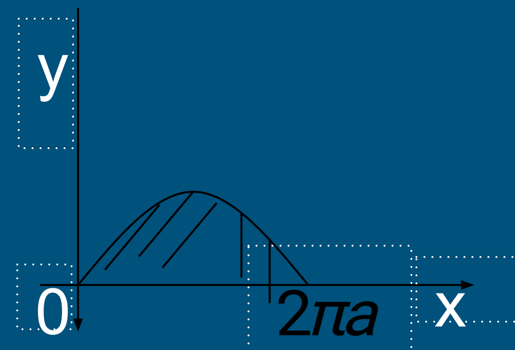
x(t), y(t), x'(t), y'(t) – непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt$$



Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и одной аркой циклоиды: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.



$$S=\int_0^{2\pi} a\cdot(1-\cos x)\cdot a\cdot(t-\sin t)'\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+a^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=a^2\cdot 2\pi+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi\cdot a^2+\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi=3\pi a^2$$

Вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая задана уравнением y=f(x), где f(x) и f’(x) непрерывны на [,].

a b

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Пусть кривая задана в параметрической

форме x=x(t), y=y(t), t $\in[\alpha, \beta]$, причём x(t),

y(t), x’(t) $\neq$ 0, y’(t) непрерывны на $[\alpha, \beta]$,

$$x(\alpha) = a, x(\beta) = b.$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$