КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Парабола

Парабола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (1) — каноническим уравнением параболы.

Теорема.

Парабола представляет собой множество точек, равноудаленных от данной прямой (директрисы параболы) и данной точки (фокуса параболы), не лежащей на директрисе.

◄ Пусть парабола задана уравнением (1) Имеем:

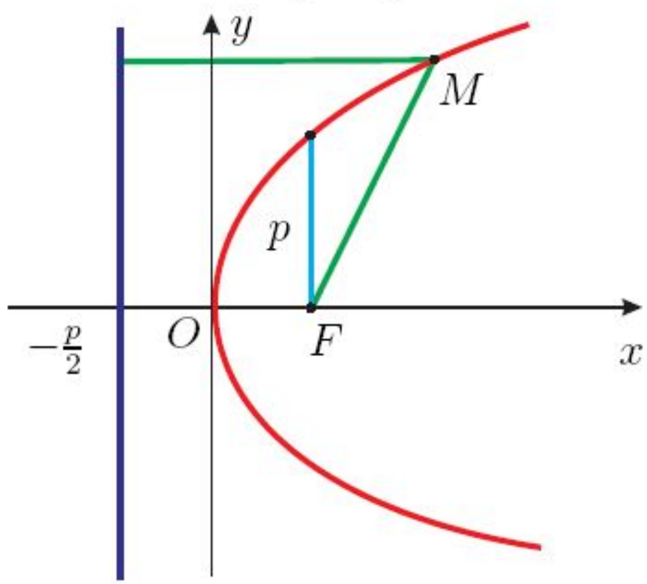
$$y^2 = 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \iff \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

т.е. точка (x, y) параболы равноудалена от прямой $x = -p/2$ и точки $(p/2, 0)$, которая является фокусом параболы, поскольку при $x = p/2$ имеем $y^2 = p^2$.

Обратно, рассмотрим прямую $x = -p/2$ и точку $F(p/2, 0)$. Точка $M(x, y)$ удалена от указанной прямой на расстояние $|x + p/2|$, а от точки F — на расстояние $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$. Условие равенства этих расстояний

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

после возведения в квадрат и несложных преобразований дает уравнение (1). ►



Основные термины, связанные с параболой:

(1) ось Ox — ось параболы;

(2) фокальная хорда — отрезок с концами на параболе, проведенный через фокус перпендикулярно оси;

(3) p — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);

(4) $p/2$ — фокусное расстояние

(5) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;

(6) прямая $x = -p/2$ — директриса.

2. Эллипс

Эллипс — это линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (2) — каноническим уравнением эллипса.

Основные термины, связанные с эллипсом:

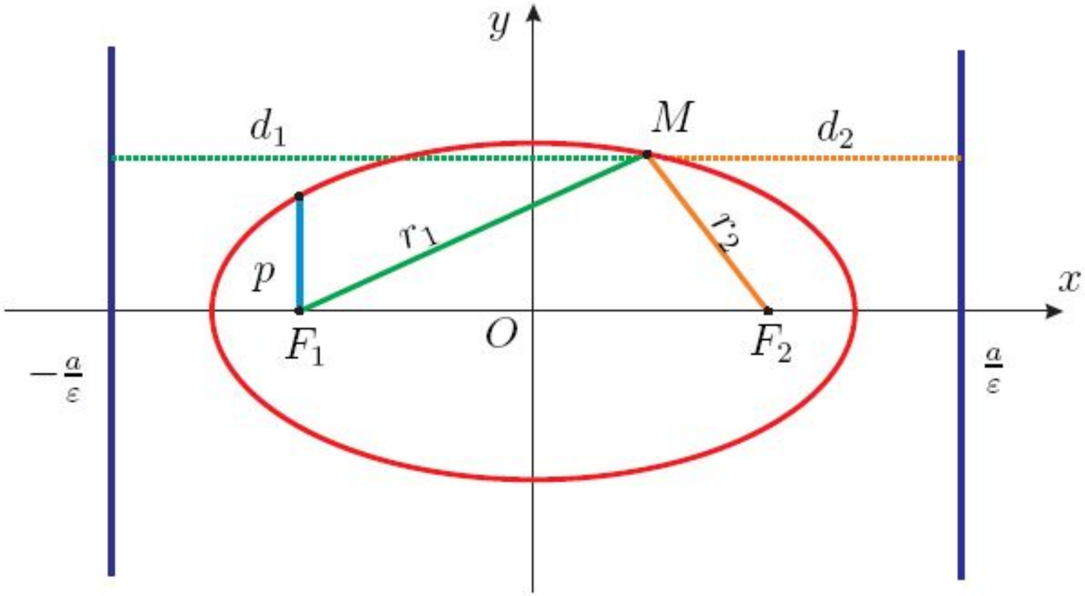
(1) a — большая полуось;
(2) b — малая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — большая (фокальная) ось;
(9) ось OY — малая ось;

(10) фокальная хорда — отрезок с концами на эллипсе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;

(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);

(12) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;

(13) точка $O(0,0)$ — центр эллипса.



Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, сумма расстояний от которых до фокусов постоянна: $F_1M + F_2M = 2a$.

◀ Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ эллипса равны

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 ax + a^2 = (\varepsilon x + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$, $\varepsilon < 1$, имеем $|\varepsilon x| < a$, так что

$$r_1 = a + \varepsilon x.$$

Аналогично находим

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x,y)$ — точка плоскости, для которой сумма $F_1M + F_2M$ постоянна и равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Уничтожив радикалы, придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad \blacktriangleright$$

Теорема.

Директориальное свойство эллипса: Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε).

$\blacktriangleleft$ Расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса до левой и правой директрис равны

$$d_1=\left|x+\frac{a}{\varepsilon}\right|=\left|\frac{\varepsilon x+a}{\varepsilon}\right|=\frac{r_1}{\varepsilon},\quad d_2=\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|=\left|\frac{\varepsilon x-a}{\varepsilon}\right|=\frac{r_2}{\varepsilon}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}=\varepsilon\left|x\pm\frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

то

$$(x\pm c)^2+y^2=(\varepsilon x\pm a)^2$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2=a^2-c^2 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad \blacktriangleright$$

3. Гипербола

Гипербола — эта линия, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Указанная система координат называется канонической, уравнение (3) — каноническим уравнением гиперболы.

Выразим из уравнения гиперболы y:

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

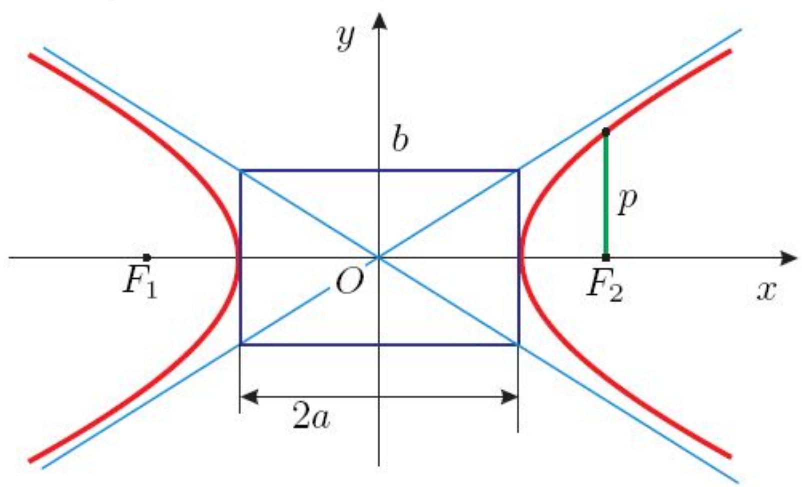
Имеем:

$$y = \pm b\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm b\frac{x}{a}\left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b}{a}x + o(1).$$

Таким образом, прямые

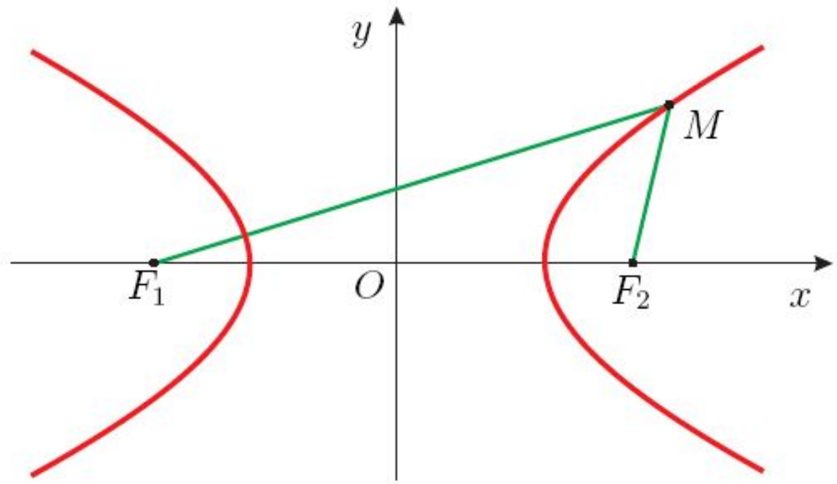
$$y = \pm\frac{b}{a}x \iff ay \pm bx = 0$$

являются асимптотами гиперболы.



Основные термины, связанные с гиперболой:

(1) a — вещественная полуось;
(2) b — мнимая полуось;
(3) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(4) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы;
(5) $2c$ — фокусное расстояние;
(6) $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(7) прямые $x = \pm a/\varepsilon$ — директрисы;
(8) ось OX — вещественная (фокальная) ось;
(9) ось OY — мнимая ось;
(10) фокальная хорда — отрезок с концами на гиперболе, проведенный через фокус перпендикулярно фокальной оси;
(11) $p = b^2/a$ — (фокальный) параметр (равен половине длины фокальной хорды);
(12) точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы;
(13) точка $O(0, 0)$ — центр гиперболы;
(14) прямые $ay \pm bx = 0$ — асимптоты гиперболы.



Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M, F_2M называются фокальными радиусами точки M.

Теорема.

Фокальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов по абсолютной величине постоянна: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Теорема.

Директориальное свойство гиперболы: Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно (и равно ε*).*

Полярные уравнения параболы, эллипса, гиперболы

Получим уравнения конических сечений в полярной системе координат, ось которой совпадает с главной осью кривой, а полюс находится в фокусе.

Поместим полюс в фокус параболы. Имеем:

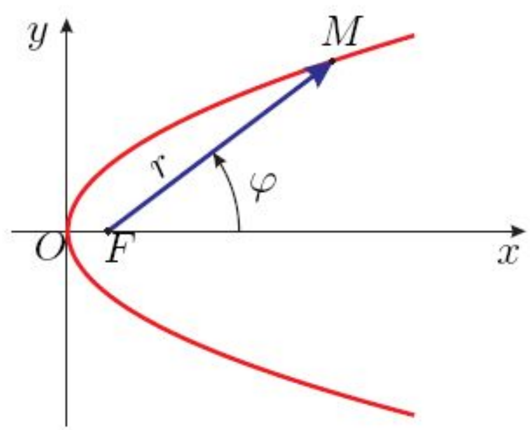
$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(директориальное свойство параболы). Таким образом,

$$r\cos\varphi = r - p \iff r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$



Поместим полюс в левый фокус эллипса. Имеем:

$$x + c = r\cos\varphi$$

(связь декартовых и полярных координат) и

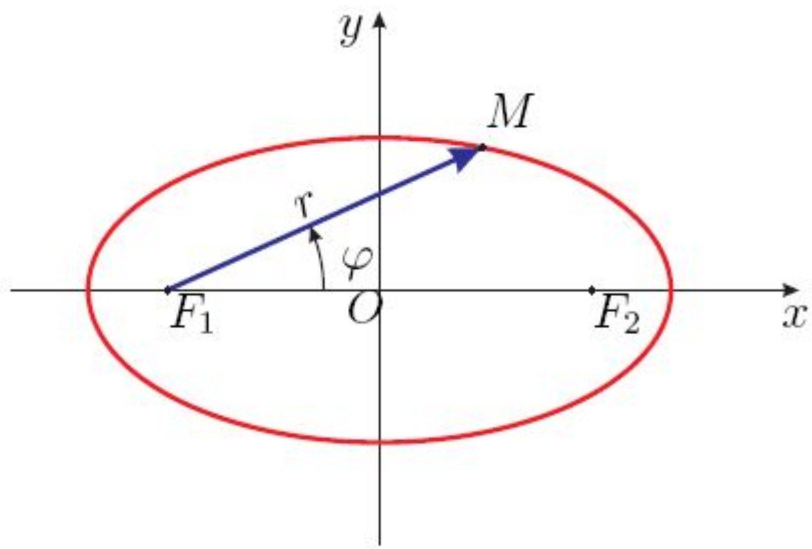
$$r = \varepsilon x + a$$

(выражение для левого фокального радиуса). Таким образом,

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi - c) + a \iff r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p,$$

так что

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$



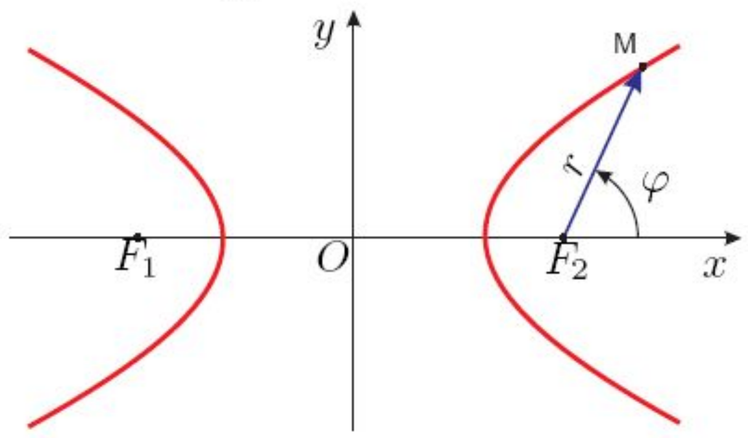
В случае гиперболы поместим полюс в правый фокус и ограничимся рассмотрением правой ветви гиперболы. Имеем:

$$r = \varepsilon x - a, \quad x - c = r\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Таким образом, парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна ее ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением.



Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением (3.34):

$$a_{11}\cdot x^2+2\cdot a_{12}\cdot x\cdot y+a_{22}\cdot y^2+2\cdot a_1\cdot x+2\cdot a_2\cdot y+a_0=0.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Если в уравнении имеется член с произведением неизвестных $(a_{12}\ne 0)$, то делаем поворот системы координат:

$$\begin{cases} x=x'\cdot\cos\varphi-y'\cdot\sin\varphi,\\ y=x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi\end{cases}$$

на угол φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющий равенству $\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$. При этом получим "почти" приведенное уравнение линии второго порядка:

$$\lambda_1\cdot(x')^2+\lambda_2\cdot(y')^2+2\cdot a_1'\cdot x'+2\cdot a_2'\cdot y'+a_0=0.$$

Если $a_{12}=0$, переходим к пункту 2, поворот системы координат делать не нужно, так как исходное уравнение имеет "почти" приведенный вид.

2. Выполняем параллельный перенос системы координат:

а) если в уравнении нет линейных членов, то переходим к пункту 3;

б) если в уравнении имеется линейный член с какой-либо неизвестной и квадратичный член с этой же неизвестной, то, дополняя эти члены до полного квадрата, делаем замену, чтобы в уравнении не стало линейного члена с этой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1\ne 0$ и $a_1'\ne 0$, то выполняем преобразования:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2\cdot a_1'\cdot x' = \lambda_1 \left[(x')^2 + 2\frac{a_1'}{\lambda_1}x' + \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 \right] - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = \lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_1\left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2,$$

а затем замену неизвестных $x'' = x' + \dfrac{a'}{\lambda_1},\ y'' = y'$, после которой в уравнении не будет линейного члена с неизвестной x'';

в) если в уравнении имеется только один линейный член с какой-либо неизвестной, а квадрат этой неизвестной отсутствует, то при помощи замены этой переменной надо сделать равным нулю свободный член уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$\lambda\cdot(x')^2 + 2\cdot a_2'\cdot y' + a_0 = 0,$$

то, выполняя замену неизвестных $x'' = x',\ y'' = y' + \dfrac{a_0}{2a_0'}$, получаем уравнение без свободного члена:

$$\lambda_1\cdot(x'')^2 + 2\cdot a_2'\cdot y'' = 0.$$

3. Полученное в результате упрощений (пункт 2) уравнение имеет "почти" канонический вид. Для окончательного упрощения "почти" канонического уравнения при необходимости применяются следующие преобразования:

а) переименование координатных осей: $x' = y'',\ y' = x''$;
б) изменение направления координатной оси, например оси абсцисс: $x' = -x'',\ y' = y''$;
в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;
г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения.