



Математические методы в психологии

2 лекция:

Статистические критерии

Меры различий



Статистический критерий

- это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью (Суходольский Г.В., 1972, с. 291).

Типы статистических критериев

По используемым параметрам:

- **Параметрические** - основаны на конкретном типе распределения генеральной совокупности (как правило, нормальном) или используют параметры этой совокупности (среднее, дисперсии и т. д.).

Пример: Корреляционный анализ Пирсона, Т-критерий Стьюдента

- **Непараметрические** - оперируют с частотами, рангами и т.д., не учитывающие форму распределения выборочных данных и поэтому имеющие более широкую область применения

Пример: Корреляционный анализ Спирмена, Критерий Манна-Уитни

По цели:

▣ **Меры сравнения** – позволяют проверить гипотезу о наличии или отсутствии различий между переменными.

Пример: Т-критерий Стьюдента, Критерий Манна-Уитни

▣ **Меры связи** – позволяют проверить гипотезу о наличии или отсутствии взаимосвязи между переменными.

Пример: Корреляционный анализ Пирсона,
Корреляционный анализ Спирмена

По цели (продолжение)

- **Многомерные критерии** – выполняют такие интеллектуальные функции как структурирование эмпирической информации (факторный анализ), классификации (кластерный анализ), экстраполяции (множественный регрессионный анализ), распознавание образов (дискриминантный анализ).
- **Многофункциональные критерии** - эти критерии могут использоваться по отношению к самым разнообразным данным (независимо от шкалы), выборкам (зависимым и независимым) и задачам.

Пример: Угловое преобразование Фишера, Факторный анализ, Кластерный анализ.

По типу выборки:

□ Критерии для несвязанных выборок

Несвязанные (независимые) выборки - выборки, в которые объекты исследования набирались независимо друг от друга.

Например, если основная и контрольная группы при сравнении различных методов лечения формируются с помощью случайного выбора из некоторого набора пациентов, то такие выборки являются независимыми.

□ Пример: Т-критерий Стьюдента для несвязанных выборок, Манна-Уитни U тест

По типу выборки (продолжение):

□ Критерии для связанных выборок

Связанные (зависимые) выборки - каждое наблюдение одной выборки неразрывно связано (находится в паре) с одним из наблюдений другой выборки

Например, изучение влияния рекламы на отношение потребителя к торговой марке до и после просмотра рекламного ролика потребителем.

□ Пример: Т-критерий Стьюдента для связанных выборок, Критерий Знаков

Классификация наиболее важных статистических методов, которая может быть использована при выборе теста для решения конкретной задачи

	Методы	
задачи	параметрические (для количественных нормально распределенных признаков)	непараметрические (для количественных признаков независимо от вида распределения, а также для качественных — порядковых или номинальных — признаков)
Выполнение описательной статистики	Вычисление средних значений, средних квадратических отклонений и т.д.	Вычисление медиан и интерквартильных интервалов, пропорций
Сравнение двух независимых групп по одному признаку	X-критерий Стьюдента для независимых выборок	Критерии Манна— Уитни, Колмогорова-Смирнова, Вальда— Вольфовица, χ^2 , точный критерий Фишера
Сравнение двух зависимых групп по одному признаку	X-критерий Стьюдента для зависимых выборок	Критерий Вилкоксона, критерий знаков, критерий МакНемара

Классификация наиболее важных статистических методов, которая может быть использована при выборе теста для решения конкретной задачи

	Методы	
Сравнение трех независимых групп и более по одному признаку	ANOVA	ANOVA по Краскелу—Уоллису, медианный критерий, критерий χ^2
Сравнение трех зависимых групп и более по одному признаку	Критерий Кокрана	ANOVA по Фридмену, критерий Кокрана
Анализ взаимосвязи двух признаков	Корреляционный анализ по Пирсону	Критерий χ^2 , корреляционный анализ по Спирмену, Кендаллу, гамма и др.
Одновременный анализ трех признаков и более	Регрессионный анализ Дискриминантный анализ Факторный анализ Кластерный анализ	Логистический регрессионный анализ, логлинейный анализ, анализ древовидных диаграмм, анализ конъюнкций и др.



Меры сравнения

1. Q - Критерий Розенбаума
2. U критерий Манна-Уитни
3. H - критерий Крускала-Уоллиса
4. S – критерий тенденций Джонкира
5. F критерий Фишера
6. T-критерий Стьюдента для одной выборки
7. T-критерий Стьюдента для двух независимых выборок
8. T-критерий Стьюдента для двух зависимых выборок

Правила ранжирования:

- №1. Наименьшему значению начисляется ранг 1.
- №2. Наибольшему значению начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых значений.

Например, если $n=7$, то наибольшее значение получит ранг 7, за возможным исключением для тех случаев, которые предусмотрены правилом №3.

- №3 В случае, если несколько значений равны, им начисляется ранг, представляющий собой среднее значение из тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны.



Проранжируйте следующие числа

1) 4

2) 20

3) 6

4) 10

5) 9

6) 10

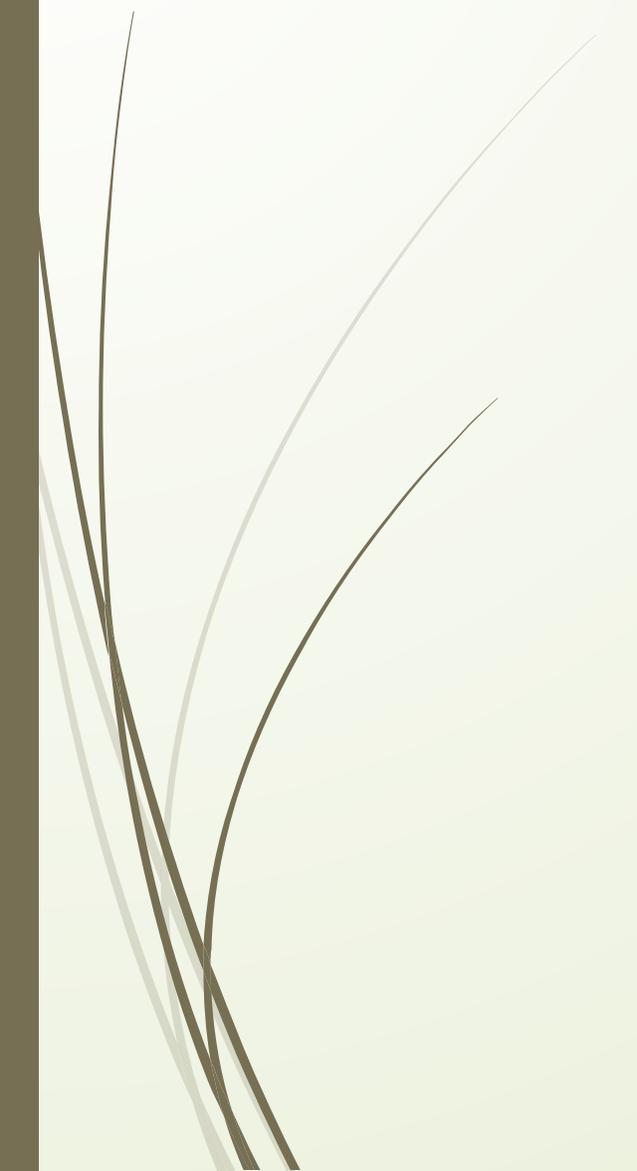


Правильный ответ

Число	Ранг
4	1
6	2
9	3
10	4,5
10	4,5
20	6



Непараметрические меры различий



Q - Критерий Розенбаума

□ **Назначение критерия:** Используется для оценки различия между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного.

Гипотезы:

H_0 : Уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H_1 : Уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

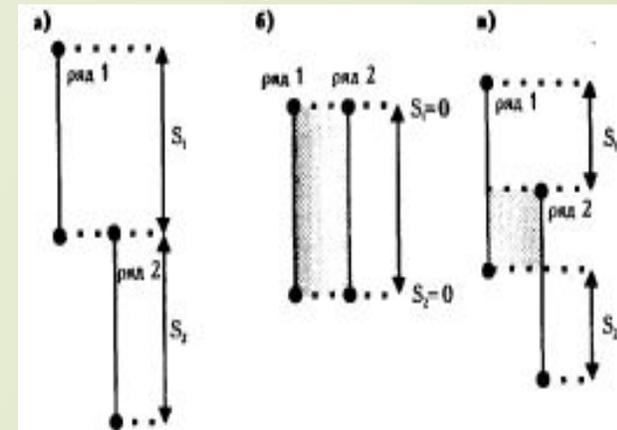


Рис. 2.2. Возможные соотношения рядов значений в двух выборках; S_1 - зона значений 1-го ряда, которые выше максимального значения 2-го ряда; S_2 - зона значений второго ряда, которые ниже минимального значения 1-го ряда; штриховкой отмечены перекрывающиеся зоны двух рядов

Q - Критерий Розенбаума (ограничения)

- 1. В каждой из сопоставляемых выборок должно быть не менее 11 наблюдений. При этом объемы выборок должны примерно совпадать.
- 2. Диапазоны разброса значений в двух выборках должны не совпадать между собой, в противном случае применение критерия бессмысленно.

Непараметрический критерий
Как минимум порядковая шкала.

U критерий Манна-Уитни

□ **Назначение:** предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. Он позволяет выявлять различия между малыми выборками, когда $n_1, n_2 \geq 3$, и является более мощным, чем критерий Розенбаума.

□ **Гипотезы**

H_0 : Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1 : Уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

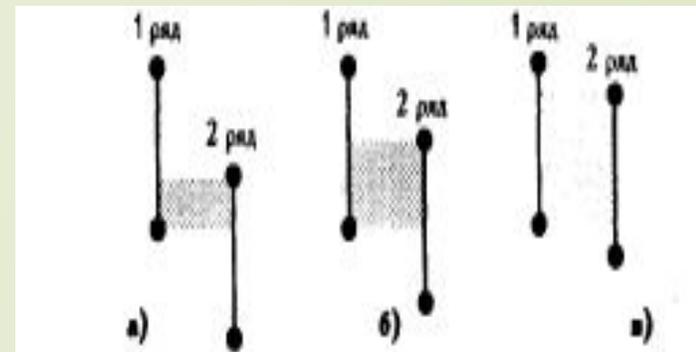


Рис. 2.5. Возможные варианты соотношений рядов значений в двух выборках; штриховкой обозначены зоны вычисления

U критерий Манна-Уитни (ограничения)

- 1. В каждой выборке должно быть не менее 3 наблюдений; допускается, чтобы в одной выборке было 2 наблюдения, но тогда во второй их должно быть не менее 5. .

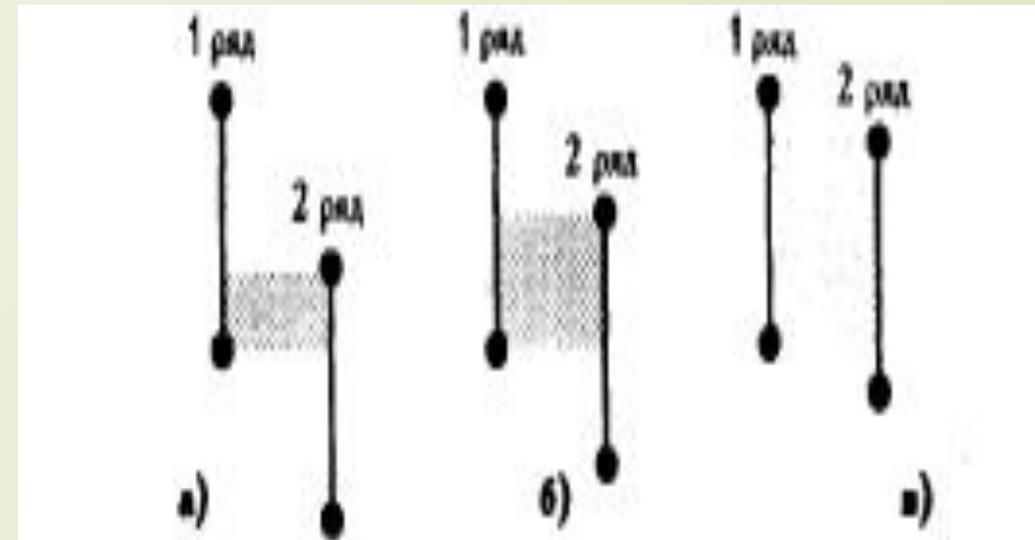


Рис. 25. Возможные варианты сопоставлений рядов значений в двух выборках; штриховкой обозначены зоны заштриховки

H - критерий Крускала-Уоллиса

□ **Назначение критерия:** предназначен для оценки различии одновременно между тремя, четырьмя и т.д. выборками по уровню какого-либо признака. Он позволяет установить, что уровень признака изменяется при переходе от группы к группе, но не указывает на направление этих изменений.

□ *Гипотезы*

H_0 . Между выборками 1, 2, 3 и т. д. существуют лишь случайные различия по уровню исследуемого признака.

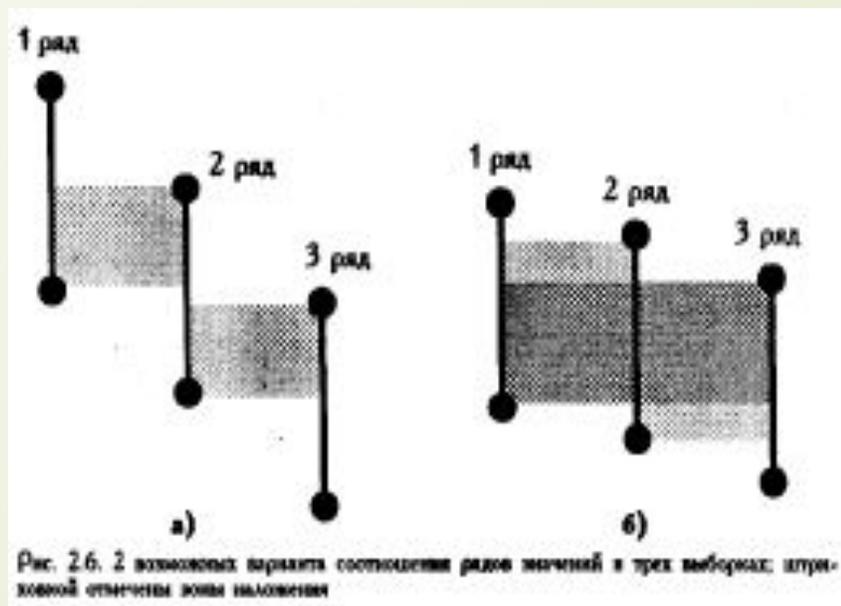
H_1 : Между выборками 1, 2, 3 и т. д. существуют неслучайные различия по уровню исследуемого признака.

H - критерий Крускала-Уоллиса (ограничения)

- 1. При сопоставлении 3-х выборок допускается, чтобы в одной из них было $n=3$, а двух других $n=2$. Но при таких численных составах выборок мы сможем установить различия лишь на низшем уровне значимости ($p \leq 0,05$).
- 2. Для того, чтобы оказалось возможным диагностировать различия на более высоком уровне значимости ($p \leq 0,01$), необходимо, чтобы в каждой выборке было не менее 3 наблюдений, или чтобы по крайней мере в одной из них было 4 наблюдения, а в двух других - по 2; при этом неважно, в какой именно выборке сколько испытуемых, а важно соотношение 4:2:2.
- 3. При множественном сопоставлении выборок достоверные различия между какой-либо конкретной парой (или парами) их могут оказаться стертыми. Это ограничение можно преодолеть, если провести все возможные попарные сопоставления, число которых будет равняться $\frac{1}{2} \cdot [c \cdot (c-1)]$ таких попарных сопоставлений используется, естественно, критерий для двух выборок, например U или ϕ^*

H - критерий Крускала-Уоллиса (графическое отображение)

- Критерий H оценивает общую сумму перекрещивающихся зон при сопоставлении всех обследованных выборок. Если суммарная область наложения мала, то различия достоверны; если она достигает определенной критической величины и превосходит ее, то различия между выборками оказываются недостоверными.



S – критерий тенденций Джонкира

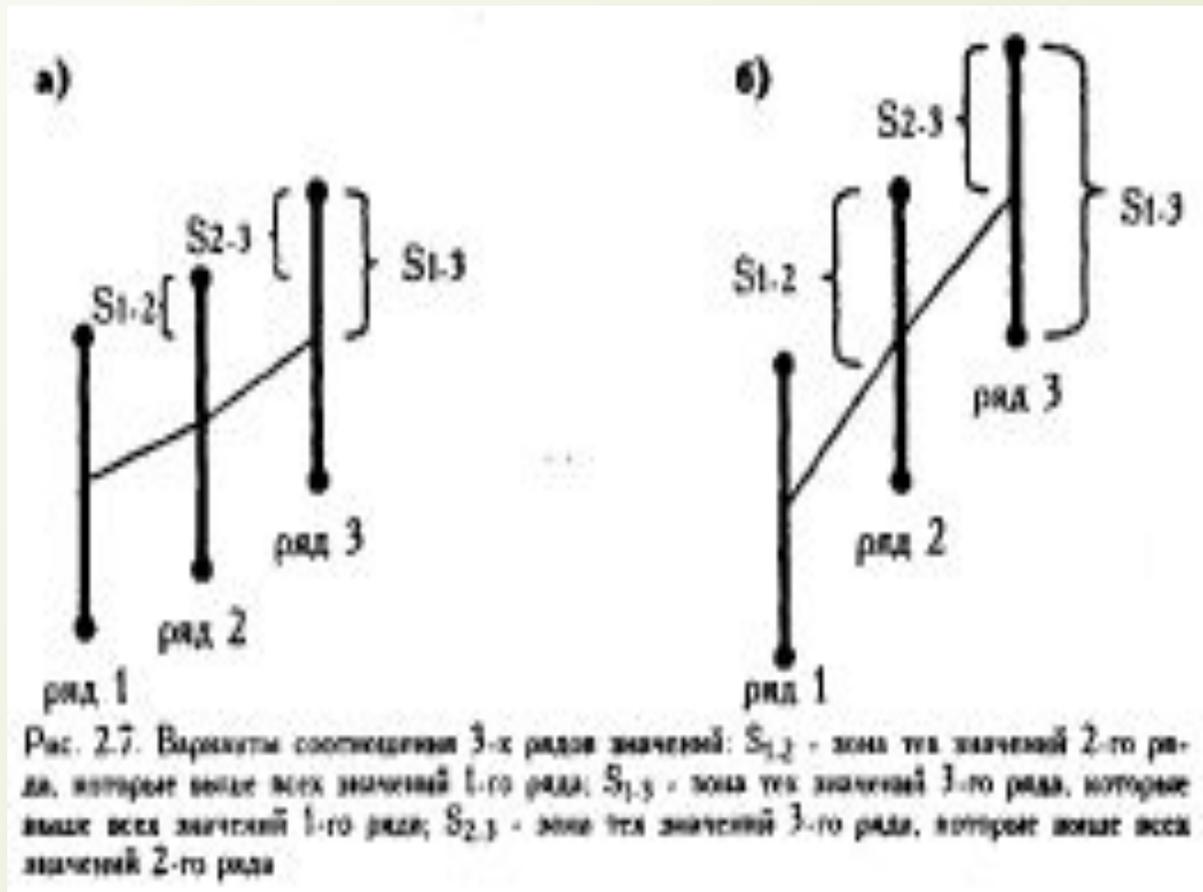
□ **Назначение критерия:** Критерий S предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке при сопоставлении трех и более выборок.

□ *Гипотезы*

H_1 : Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке является случайной.

H_0 : Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке не является случайной.

S – критерий тенденций Джонкира (графическое отображение)

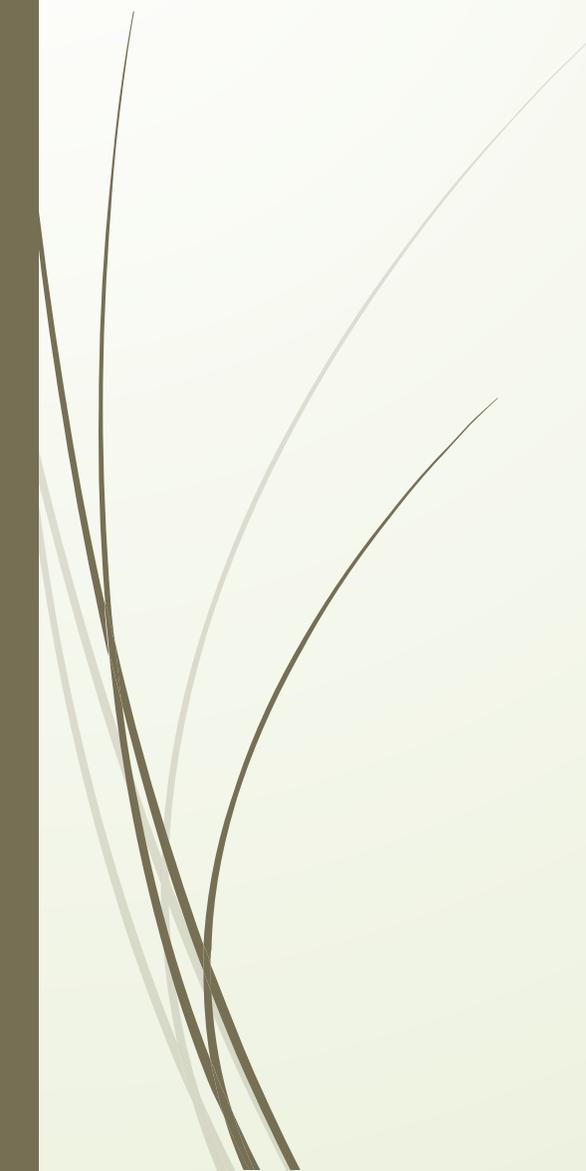


S – критерий тенденций Джонкира (ограничения)

1. Измерение может быть проведено в шкале порядка, интервалов или отношений.
2. Выборки должны быть независимыми.
3. Количество элементов в каждой выборке должно быть одинаковым. Если число наблюдений неодинаково, то необходимо уравнивать
4. Нижняя граница применимости критерия: не менее трех выборок и не менее двух элементов в каждом наблюдении. Во всех других случаях следует пользоваться критерием H Крускала-Уолисса.



Параметрические меры различий



F критерий Фишера

- **Назначение критерия:** Применяется для проверки равенства дисперсий двух выборок.
- **Гипотезы:**
 - H₀: Величина дисперсии в выборке 1 не отличается от величины дисперсии в выборке 2.
 - H₁: Величина дисперсии в выборке 1 отличается от величины дисперсии в выборке 2.
- Для вычисления Fэмп нужно найти отношение дисперсий двух выборок, причем так, чтобы большая по величине дисперсия находилась бы в числителе, а меньшая знаменателе.
- $F = S^2_1 / S^2_2$

F критерий Фишера (примеры использования)

- 1. При использовании критерия Стьюдента имеет смысл предварительно проверить гипотезу о равенстве дисперсий. Если она верна, то для сравнения средних можно воспользоваться более мощным критерием.
- 2. В регрессионном анализе критерий Фишера позволяет оценивать значимость линейных регрессионных моделей. В частности, он используется в шаговой регрессии для проверки целесообразности включения или исключения независимых переменных (признаков) в регрессионную модель.
- 3. В дисперсионном анализе критерий Фишера позволяет оценивать значимость факторов и их взаимодействия.

F критерий Фишера (ограничения)

- 1. Измерение может быть проведено в шкале интервалов и отношений.
- 2. Сравнимые выборки должны быть распределены по нормальному закону.
- Альтернатива: Критерий Ливена (непараметрический)

T-критерий Стьюдента для двух независимых выборок

□ Назначение: сравнения средних значений двух независимых между собой выборок.

□ Гипотеза:

$$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

$$H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

□ Пример: Сравнение результатов баллов ЕГЭ в двух разных школах.

T-критерий Стьюдента для двух независимых выборок (ограничения)

1. Сравнимые значения не составляют пару коррелирующих значений
 2. Распределение признаков в каждой выборке соответствует нормальному распределению
 3. Дисперсии признака в выборках примерно равны (проверяется с помощью критерия F-Фишера)
- Альтернативы: непараметрический критерий U Манна-Уитни (если распределение признаков не соответствует нормальному)
 - t-критерий Стьюдента для зависимых выборок (если значения составляют пару коррелирующих значений)

T-критерий Стьюдента для двух зависимых выборок

□ **Назначение:** сравнения средних значений двух зависимых между собой выборок.

□ Гипотезы:

$$H_0: \bar{Z} = 0, \quad z_i = x_{1i} - x_{2i}$$

$$H_1: \bar{Z} \neq 0$$

□ **Пример:** оценка состояния больного до и после лечения.

T-критерий Стьюдента для двух зависимых выборок (ограничения)

1. Сравнимые значения составляют пару коррелирующих значений
2. Распределение признаков в каждой выборке соответствует нормальному распределению

Альтернативы:

- непараметрический T-критерий Вилкоксона
- t-критерий Стьюдента для независимых выборок (если значения не составляют пару коррелирующих значений)

T-критерий Стьюдента для одной выборки

□ Назначение: наблюдаемое среднее (выборка) сравнивается с ожидаемым (или эталонным) средним выборки (т.е. с некоторым теоретическим средним).

□ Гипотеза:

позволяет проверить гипотезу о равенстве выборочного среднего некоторому заданному числу.

$$H_0: \bar{X} = \mu$$

$$H_1: \bar{X} \neq \mu$$



T-критерий Стьюдента для одной выборки (ограничения)

1. Признак должен быть измерен в интервальной шкале
2. Распределение должно соответствовать нормальному распределению