

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского  
Национальный исследовательский университет  
Институт информационных технологий, математики и механики

# Системы принятия решений

Vladimir Grishagin



# Характеристические алгоритмы ОПТИМИЗАЦИИ

$$\varphi(x) \rightarrow \min, x \in Q = [a, b] \quad (2.1)$$

**Определение.** Алгоритм решения задачи (\*) называется характеристическим, если, начиная с некоторого шага поиска  $x^{k+1}$ , выбор координаты очередного испытания заключается в выполнении следующих действий.

1. Задать множество

$$\Lambda_k = \{x_0, x_1, \dots, x_\tau\}$$

конечного числа  $\tau + 1 = \tau(k) + 1$  точек области  $Q = [a, b]$ , полагая, что

$a \in \Lambda_k, b \in \Lambda_k$ , все координаты предшествующих испытаний  $x^i \in \Lambda_k, 1 \leq i \leq k$ ,

множество  $\Lambda_k$  упорядочено (нижним индексом) по возрастанию координаты, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\tau-1} < x_\tau = b.$$

и сопоставить точкам множества значения  $y_i = \varphi(x_i), 0 \leq i \leq \tau$ .

# Характеристические алгоритмы ОПТИМИЗАЦИИ

2. Каждому интервалу  $(x_{i-1}, x_i)$   $1 \leq i \leq \tau$ , поставить в соответствие число  $R(i)$ , называемое характеристикой этого интервала.
3. Определить интервал  $(x_{t-1}, x_t)$ , которому соответствует максимальная характеристика  $R(t)$ , т.е.

$$R(t) = \max \{R(i) : 1 \leq i \leq \tau\}$$

4. Провести очередное испытание в точке

$$x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}, x_t)$$

и вычислить значение  $z^{k+1} = \varphi(x^{k+1})$ .

# Двусторонняя сходимость.

$$\varphi(x) \rightarrow \min, x \in Q = [a, b] \quad (2.1)$$

**Теорема 2.1.** Пусть точка  $x^*$  является предельной точкой (точкой накопления) последовательности испытаний  $\{x^k\}$ , генерируемой характеристическим алгоритмом при решении задачи (2.1), причем  $R(i)$ . Если характеристики  $\mu$  и  $\nu$  и правило выбора координаты очередного испытания

обеспечивают  $x^k \in [x_{i(k)-1}, x_{i(k)}]$  и  $x_{i(k)-1} \rightarrow \bar{x}$ ,  $x_{i(k)} \rightarrow \bar{x}$ , когда  $k \rightarrow \infty$ , тогда выполнение условий  $R(i(k)) \rightarrow -\mu \varphi(\bar{x}) + c$  (2.2)

ii) если, начиная с некоторого шага поиска, интервал  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = i(k)$ , не будет содержать точек испытаний, т.е. существует номер  $s \geq 1$  такой, что для всех

$$(x_{i-1}, x_i) \cap \{x^k\} = \emptyset \quad (2.3)$$

тогда для характеристики этого интервала выполняется строгое неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(i) > -\mu \min \{ \varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i) \} + c \quad (2.4)$$

iii) для точки нового испытания  $x^{k+1}$  имеет место неравенство

$$\max \{ x^{k+1} - x_{i-1}, x_i - x^{k+1} \} \leq \nu (x_i - x_{i-1}) \quad (2.5)$$

где в (2.2), (2.4), (2.5) величины  $\mu$ ,  $c$ , и  $\nu$  некоторые константы, причем

$$\mu \geq 0, 0 < \nu < 1 \quad (2.6)$$

тогда последовательность  $\{x^k\}$  содержит две подпоследовательности, одна из которых сходится к  $x^*$  слева, другая справа.

# Двусторонняя сходимость.

**Следствие.** В вычислительную схему алгоритма, удовлетворяющего условиям Теоремы 2.1, может быть введено условие остановки вида

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon \quad (2.7)$$

где  $t$  - это номер интервала с максимальной характеристикой, а  $\varepsilon$  - заданная точность поиска.

# Двусторонняя сходимость (перебор)

i) Если точка  $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $x_{i-1} \rightarrow \bar{x}$ ,  $x_i \rightarrow \bar{x}$ , когда  $k \rightarrow \infty$ , тогда

$$R(i) = x_i - x_{i-1} \rightarrow 0, \text{ т.е. } \mu = 0, c = 0$$

ii) Если  $(x_{i-1}, x_i) \cap \{x^k\} = \emptyset$ , то требуется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(i) > -\mu \min\{z_{i-1}, z_i\} + c = 0$$

iii) для точек новых испытаний

$$\max\{x^{k+1} - x_{t-1}, x_t - x^{k+1}\} \leq v(x_t - x_{t-1})$$

$$x^{k+1} = 0.5(x_{t-1} + x_t).$$

$$x^{k+1} - x_{t-1} = x_t - x^{k+1} = 0.5(x_t - x_{t-1})$$

$$v = 0.5$$

# Двусторонняя сходимость (метод Пиявского)

$$R(i) = 0.5m(x_i - x_{i-1}) - (z_i + z_{i-1})/2,$$

$$x^{k+1} = 0.5(x_t + x_{t-1}) - (z_t - z_{t-1})/(2m),$$

Условие Липшица

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq L|x' - x''|, x', x'' \in [a, b]$$

i) если точка  $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $x_{i-1} \rightarrow \bar{x}, x_i \rightarrow \bar{x}$  когда  $n \rightarrow \infty$   
тогда

$$R(i) \rightarrow -\varphi(\bar{x})$$

$$\mu = 1, c = 0$$

# Двусторонняя сходимость (метод Пиявского)

ii) если  $(x_{i-1}, x_i) \cap \{x^k\} = \emptyset$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(i) > -\mu \min\{z_{i-1}, z_i\}$$

$$\min\{z_{i-1}, z_i\} = \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i - |z_{i-1} - z_i|)$$

Возьмем  $m > L$ . Вследствие условия Липшица

$$L(x_i - x_{i-1}) \geq |z_{i-1} - z_i|$$

$$m \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2} > L \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \geq \frac{|z_{i-1} - z_i| - (z_{i-1} + z_i)}{2} = -\min\{z_{i-1}, z_i\}$$



# Двусторонняя сходимость (метод Пиявского)

iii) для точек новых испытаний

$$\max \{x^{k+1} - x_{t-1}, x_t - x^{k+1}\} \leq v(x_t - x_{t-1})$$

$$x_t - x^{k+1} = \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + \frac{z_t - z_{t-1}}{2m} \leq \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + L \frac{x_t - x_{t-1}}{2m} = \left(1 + \frac{L}{m}\right) \frac{x_t - x_{t-1}}{2}$$

$$v = 0,5(1 + L/m)$$

# Двусторонняя сходимость (метод Стронгина)

$$R(i) = m(x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - 2(z_i + z_{i-1}),$$

$$x^{k+1} = 0.5(x_t + x_{t-1}) - (z_t - z_{t-1})/(2m),$$

Условие Липшица

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq L|x' - x''|, x', x'' \in [a, b]$$

i) если точка  $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $x_{i-1} \rightarrow \bar{x}, x_i \rightarrow \bar{x}$  тогда  $n \rightarrow \infty$

$$R(i) \rightarrow -4\varphi(\bar{x})$$

$$\mu = 4, c = 0$$

# Двусторонняя сходимость (метод Стронгина)

ii) если  $(x_{i-1}, x_i) \cap \{x^k\} = \emptyset$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(i) > -\mu \xi_i = -4 \min\{z_{i-1}, z_i\}$

$$\min\{z_{i-1}, z_i\} = \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i - |z_{i-1} - z_i|)$$

Возьмем  $m > L$ .

Случай 1.  $z_{i-1} = z_i$

$$R(i) = m(x_i - x_{i-1}) - 2(z_i + z_{i-1}) > -2(z_i + z_{i-1}) = -4 \min\{z_{i-1}, z_i\}$$

Случай 2.  $z_{i-1} \neq z_i$

$$R(i) = |z_i - z_{i-1}| \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) - 2(z_i + z_{i-1})$$

$$\beta = \frac{m(x_i - x_{i-1})}{|z_i - z_{i-1}|} > \frac{m}{L} > 1 \quad \beta + \frac{1}{\beta} > 2$$

$$R(i) > 2|z_i - z_{i-1}| - 2(z_i + z_{i-1}) = -4 \min\{z_i, z_{i-1}\}$$

# Двусторонняя сходимость (метод Стронгина)

iii) для точек новых испытаний

$$\max \{x^{k+1} - x_{t-1}, x_t - x^{k+1}\} \leq \nu(x_t - x_{t-1})$$

$$x_t - x^{k+1} = \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + \frac{z_t - z_{t-1}}{2m} \leq \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + L \frac{x_t - x_{t-1}}{2m} = \left(1 + \frac{L}{m}\right) \frac{x_t - x_{t-1}}{2}$$

$$\nu = 0,5(1 + L/m)$$

$$m = \begin{cases} rM, M > 0 \\ 1, M = 0 \end{cases}$$

$$M = \max_{1 \leq i \leq \tau} \frac{|z_i - z_{i-1}|}{x_i - x_{i-1}}$$

$r > 1$  - параметр метода

$$x_t - x^{k+1} = \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + \frac{z_t - z_{t-1}}{2m} \leq \frac{x_t - x_{t-1}}{2} + M \frac{x_t - x_{t-1}}{2rM} = \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{x_t - x_{t-1}}{2}$$

$$\nu = 0.5(1 + 1/r)$$

# Двусторонняя сходимость (метод Кушнера)

$$R(i) = -\frac{4(\varphi_k^* - \delta_k - z_i)(\varphi_k^* - \delta_k - z_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, 1 \leq i \leq \tau,$$

$$x^{k+1} = x_{t-1} + \frac{(x_t - x_{t-1})(\varphi_k^* - \delta_k - z_t)}{2(\varphi_k^* - \delta_k) - z_t - z_{t-1}}$$

где  $\delta_k > 0$  - параметр метода,  $\varphi_k^* = \min_{0 \leq i \leq \tau} z_i$ .

Потребуем непрерывность целевой функции

i) Пусть точка  $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$  и  $x_{i-1} \rightarrow \bar{x}$ ,  $x_i \rightarrow \bar{x}$ , когда  $k \rightarrow \infty$ ,

и, начиная с некоторого шага поиска, параметр метода  $\delta_k > \delta > 0$ , тогда

$\varphi_k^* - z_{i-1} - \delta_k < -\delta < 0$ ,  $\varphi_k^* - z_i - \delta_k < -\delta < 0$  и характеристика

$$R(i(k)) = -\frac{4(\varphi_k^* - \delta_k - z_i)(\varphi_k^* - \delta_k - z_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \rightarrow -\infty$$

т.к. длина интервала  $(x_{i-1}, x_i)$  стремится к нулю. Следовательно, (2.2)

выполняется при  $\mu = 0$  и  $C = -\infty$  (доказательство теоремы 2.1 не

меняется, если предел в правой части (2.2) будет равен  $-\infty$ ).

# Двусторонняя сходимостъ (метод Кушнера)

ii) Если  $(x_{i-1}, x_i) \cap \{x^k\} = \emptyset$ , то требуется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(i) > -\mu \min\{z_{i-1}, z_i\} + c$$

При  $\mu = 0, c = -\infty$  это неравенство имеет вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(i) > -\infty$$

Но любой интервал, в который испытания больше не попадают, имеет положительную длину, что доказывает требуемое неравенство.

# Двусторонняя сходимость (метод Кушнера)

iii) для точек новых испытаний

$$\max \{x^{k+1} - x_{t-1}, x_t - x^{k+1}\} \leq v(x_t - x_{t-1})$$

Рассмотрим разности

$$x^{k+1} - x_{t-1} = \beta_1(x_t - x_{t-1}), \quad x_t - x^{k+1} = \beta_2(x_t - x_{t-1})$$

где

$$\beta_1 = \frac{z_{t-1} - \varphi_k^* + \delta_k}{z_{t-1} + z_t - 2(\varphi_k^* - \delta_k)}, \quad \beta_2 = \frac{z_t - \varphi_k^* + \delta_k}{z_{t-1} + z_t - 2(\varphi_k^* - \delta_k)}$$

Введем вспомогательную функцию  $\sigma(w, \alpha) = \frac{w + \alpha}{w + 2\alpha}$ . Так как  $\{z_{t-1}, z_t\} \geq \varphi_k^*$

имеем  $\beta_1 \leq \sigma(z_{t-1} - \varphi_k^*, \delta_k)$ ,  $\beta_2 \leq \sigma(z_t - \varphi_k^*, \delta_k)$

Для любого положительного  $w$  функция  $\sigma(w, \alpha)$  убывает по  $\alpha$ , потому

что производная  $\sigma'_\alpha(w, \alpha) = \frac{-w}{(w + 2\alpha)^2} < 0$ , откуда для  $\delta_k > \delta > 0$

$$\beta_1 \leq \sigma(z_{t-1} - \varphi_k^*, \delta), \quad \beta_2 \leq \sigma(z_t - \varphi_k^*, \delta)$$

# Двусторонняя сходимость (метод Кушнера)

Кроме того, функция  $\sigma(w, \alpha)$  возрастает по  $w$  для любого положительного  $\alpha$ ,

т.к. производная  $\sigma'_w(w, \alpha) = \frac{\alpha}{(w + 2\alpha)^2} > 0$ , поэтому

$$\max\{\sigma(z_{t-1} - \varphi_k^*, \delta), \sigma(z_t - \varphi_k^*, \delta)\} \leq \sigma(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}, \delta)$$

Последнее неравенство означает, что

$$\max\{\beta_1, \beta_2\} \leq \sigma(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}, \delta) = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + \delta}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + 2\delta}$$

следовательно,

$$x^{k+1} - x_{t-1} \leq \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + \delta}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + 2\delta} (x_t - x_{t-1}), \quad x_t - x^{k+1} \leq \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + \delta}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + 2\delta} (x_t - x_{t-1})$$

Таким образом, в качестве константы  $\nu$  в (2.6) можно взять величину  $\frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + \delta}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min} + 2\delta}$

которая, очевидно, положительна и меньше единицы.



# Программная система

AGS

Поиск глобального минимума функции  $F(x)$

$F(x) = 2 \text{ Sin } 3 x + 3 \text{ Cos } 5 x$

$x \in \{ 0 ; 8 \}$

Стронгин  
 Пиявский  
 Перебор

Параметр метода  $\gamma$

Допустимая погрешность

Максимальное число итераций

Найденный минимум

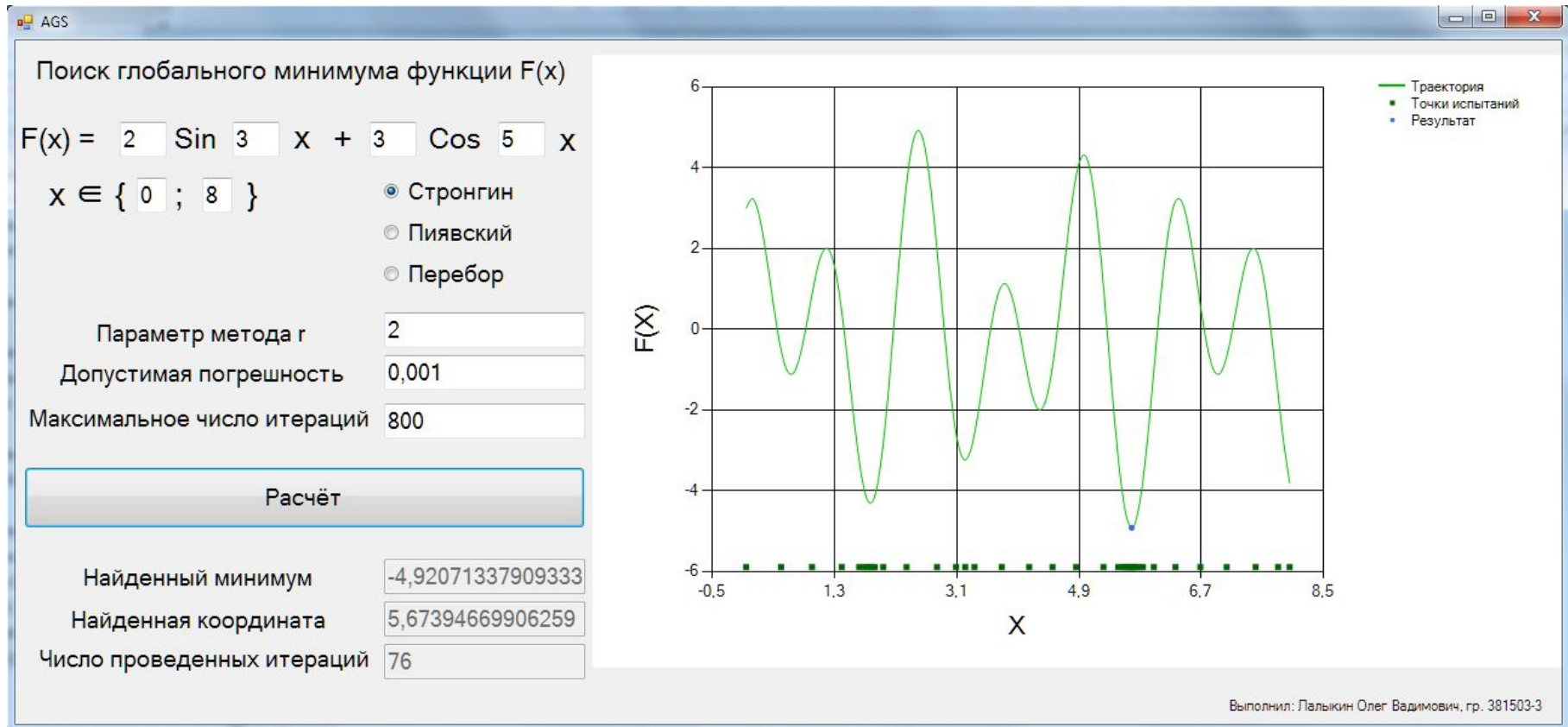
Найденная координата

Число проведенных итераций

— Траектория  
■ Точки испытаний  
• Результат

Выполнил: Палькин Олег Вадимович, гр. 381503-3

# Программная система



$$\varphi(x) = \alpha \sin(\beta x) + \gamma \cos(\delta x)$$