Показательные уравнения

Показательное уравнение — это любое уравнение, содержащее в себе **показательную функцию**, т.е. выражение вида $\boldsymbol{a}^{x}$. Помимо указанной функции подобные уравнения могут содержать в себе любые другие алгебраические конструкции — многочлены, корни, тригонометрию, логарифмы и т.д.

- Простейшее показательное уравнение имеет вид: $\mathbf{a}^{x} = \mathbf{a}^{b}$,

где $a > 0$, $a \neq 1$, x - неизвестное.

Например:

$$2^{x} = 4$$

$$5^{2x-3} = \frac{1}{25}$$

$$2^{x} * 5^{x} = 0{,}1\ (10^{x-1})^{3}$$

Основные методы решения показательных уравнений:

1. Уравнивание оснований
2. Введение вспомогательной переменной
3. Вынесение общего множителя за скобки

Основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения: a>0, b>0.

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$.
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, где m и n– натуральные числа.
- $a^{-n} = 1/a^n$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n/a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n-m}$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $(a/b)^n = a^n/b^n$.

1. Уравнивание оснований:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

Примеры:

$$3^{x+2}=81$$

$$3^{x+2}=3^{4}$$

$$x+2=4$$

$$x=2$$

Ответ : $x=2$

$$2^{x}=\frac{1}{16}$$

$$2^{x}=2^{-4}$$

$$x=-4$$

Ответ : $x=-4$

2. Введение вспомогательной переменной:

$$\alpha \bullet a^{2x} + \beta \bullet a^{x} + \gamma = 0$$

$$a^{x} = t > 0$$

$$\alpha t^{2} + \beta t + \gamma = 0$$

Пример:

$$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$$3^x = t$$

$t^2 - 6t - 27 = 0$ - квадратное уравнение

$D = 144;\ \ t_1 = 9;\ t_2 = -3;$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

$3^x = -3$

нет решений

Ответ: $x = 2$

3. Вынесение общего множителя за скобки

$$a^{x+1} - a^{x-1} = b$$

$$a^{x-1}\left(a^2 - 1\right) = b$$

Пример:

$$3^{x+2}+3^{x}=30$$

$$3^{x}\cdot 3^{2}+3^{x}=30$$

$$3^{x}\cdot(3^{2}+1)=30$$

$$3^{x}\cdot 10=30$$

$$3^{x}=3$$

$$x=1$$

Ответ: $x=1$

Другие методы решения:

1. Деление на степень:

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}$$

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \;/ : b^{f(x)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$$

2. Графический метод:

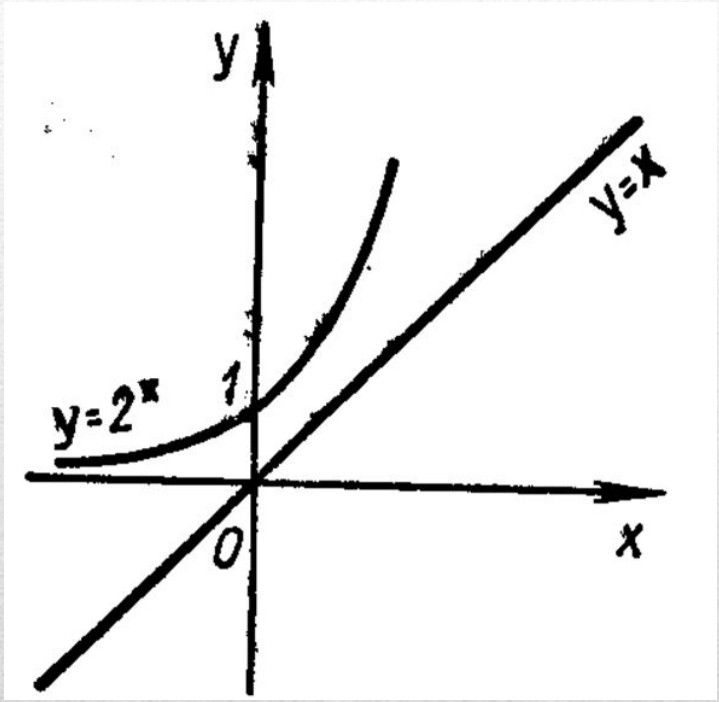
Решить уравнение:

$$2^x = x$$

Строим графики функций

$y=2^x$ и $y=x$.

Графики функций не имеют общих точек.



Ответ: решений нет