28.01.21.

Тема:
Вычисление производных с помощью правил дифференцирования. Производные некоторых элементарных функций.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/hDLFjSp4-EY

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Производные некоторых элементарных функций

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

1. Производная показательной функции.

Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad (1)$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: её производная также равна e^x, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \qquad (3)$$

Например, $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$, $(e^{-2x-4})' = -2e^{-2x-4}$.

Задача 1 Найти производную функции a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$. ◁

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Например, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0{,}7^x)' = 0{,}7^x \ln 0{,}7$.

2*. Производная логарифмической функции.

Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (5)$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ x > 0. \qquad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln (kx + b))' = \frac{k}{kx + b}. \qquad (7)$$

Например, $(\ln (4x - 3))' = \frac{4}{4x - 3}$, $(\ln (1 - 2x))' = \frac{-2}{1 - 2x} = \frac{2}{2x - 1}$.

Задача 2 Найти производную функции $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (5) и (6), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \ ◁$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (8)$$

справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \qquad (10)$$

Справедливы также формулы

$$(\sin (kx + b))' = k \cos (kx + b),$$
$$(\cos (kx + b))' = -k \sin(kx + b).$$

Например, $\left(\sin\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\right)' = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$,

$(\cos (3 - 4x))' = -(-4) \sin (3 - 4x) = 4 \sin (3 - 4x)$.

Задача 4 Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin (2x + 1) - 3 \cos (1 - x)$;

2) $f(x) = e^{-3x} \sin (5x - 1)$; 3) $f(x) = \frac{\ln 3x}{x+1}$.

▶ 1) $f'(x) = 2 \cos (2x + 1) - 3 \sin (1 - x)$;

2) $f'(x) = -3e^{-3x} \sin (5x - 1) + 5e^{-3x} \cos (5x - 1)$;

3) $f'(x) = \frac{\frac{3}{3x}(x+1) - 1 \cdot \ln 3x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x\ln 3x}{x(x+1)^2}$. ◁

Практическая часть.

Найти производную функции

831 1) $e^x + 1$; 2) $e^x + x^2$; 3) $e^{2x} + \frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x} + \sqrt{x}$.

834 1) $0{,}5^x + e^{3x}$; 2) $3^x - e^{2x}$; 3) $e^{2-x} + \sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x} + \frac{1}{x^4}$.

835 1) $2 \ln x + 3^x$; 2) $3 \ln x - 2^x$; 3) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3} - \log_3 x$; 5) $\ln (x^2 - 2x)$;

836 1) $\sin x + x^2$; 2) $\cos x - 1$; 3) $\cos x + e^x$; 4) $\sin x - 2^x$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 3\right) + 2^x$; 3) $3\cos 4x - \frac{1}{2x}$.