

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

9. Линейные фредгольмовы операторы

Пусть E, F – вещественные банаховы пространства. Обозначим через $L(E, F)$ пространство непрерывных линейных операторов $A: E \rightarrow F$.

Пусть $A \in L(E, F)$. **Ядром** оператора A называется векторное пространство

$$\text{Ker } A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

и **образом** оператора A – векторное пространство

$$\text{Im } A = \{y \in F : Ax = y \text{ для некоторого } x \in E\}.$$

Фактор-пространство $\text{Coker } A = F / \text{Im } A$ называют **коядром** оператора A .

Через $\dim V$ далее обозначается размерность векторного пространства V (возможно, даже бесконечная).

Определение 1. *Линейный оператор $A \in L(E, F)$ называется **фредгольмовым**, если*

1. $\dim \text{Ker } A < \infty$;
2. $\dim \text{Coker } A < \infty$.

Индексом *фредгольмова оператора A называется число*

$$\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A.$$

Обозначим через $\Phi(E, F)$ множество всех фредгольмовых операторов $A \in L(E, F)$ и через $\Phi_n(E, F)$ его подмножество, состоящее из фредгольмовых операторов индекса n .

Теорема *Если $A \in \Phi(E, F)$, тогда образ $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство в F и найдется конечномерное подпространство $F_2 \subset F$, которое является топологическим дополнением к $\text{Im } A$.*

Замечание.

Подпространство F_2 , которое является топологическим дополнением к $\text{Im } A$, изоморфно коядру оператора A , поэтому

$$\dim \text{Coker } A = \dim F_2.$$

Рассмотрим функцию $\text{ind}: \Phi(E, F) \rightarrow \mathbb{Z}$, которая каждому оператору $A \in \Phi(E, F)$ ставит в соответствие его индекс $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A$.

Основные свойства фредгольмовых операторов.

Свойство 1. Множество $\Phi(E, F)$ является открытым множеством в пространстве $L(E, F)$.

Свойство 2. Функция ind постоянна на всяком линейно связном множестве $\Omega \subset \Phi(E, F)$.

Примеры

1. Изоморфизм $B: E \rightarrow F$ (т. е. непрерывно обратимый линейный ограниченный оператор).

Очевидно, что $\text{Ker } B = \{0\}$, $\text{Im } B = F$ и $\text{Coker } B = F / \text{Im } B = \{0\}$ (состоит из одного фактор-класса). Следовательно,

$B: E \rightarrow F$ – фредгольмов оператор и $\text{ind } B = 0$.

2. Оператор $T = I + C$, где $C: E \rightarrow E$ – вполне непрерывный оператор, является фредгольмовым.

Покажем, что $\text{ind } T = 0$.

Рассмотрим отрезок $[I, T] = \{I - tC \mid t \in [0, 1]\}$ в множестве $\Phi(E, E)$. В силу свойства 2, $\text{ind } T = \text{ind } I = 0$.

3. Оператор $S = B + C$, где $B : E \rightarrow F$ – изоморфизм, $C : E \rightarrow F$ – вполне непрерывный оператор, является фредгольмовым индекса ноль.

10. Производная Фреше

Пусть E и F — ЛНП-ва, U — открытое мн-во в кр-ве E ,
 $f: U \rightarrow F$ — отображение.

Опр. Говорят, что отображе f дифференцируемо по Фреше в т. $x_0 \in U$, если \exists такой линейный ограниченный оператор $A: E \rightarrow F$, что при $\forall h \in E$ (при условии $x_0 + h \in U$)

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(x_0, h),$$

где $\frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$ (то есть $\omega(x_0, h) = o(h)$).

То A называется производной Фреше от-е f в т. x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Элемент кр-ва F $f'(x_0)h = Ah$ называется дифференциалом Фреше и обозначается $df(x_0, h)$.

Примеры

1. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^1$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, то

есть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда, если f — дифференцируемо

по Фреше в т. x^0 , то оператор $f'(x^0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$,

след-но, его матрица $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$.

Выделим, чему равны эл-ты a_k матрицы A .

Рассм-м приращение по k -й переменной, считая все
ост-е перемен-е фиксированными:

$$\Delta f = f(x^0 + t \cdot e_k) - f(x^0) = A(t \cdot e_k) + o(t)$$

Рассмотрим приращение по k -й переменной, считая все остальные переменные фиксированными:

$$\Delta f = f(x^0 + t \cdot e_k) - f(x^0) = A(t \cdot e_k) + o(t)$$

(здесь $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ — единичный вектор, у которого все координаты, кроме k -той, равны 0;

$$h = t \cdot e_k); \text{ тогда } \frac{\Delta f}{t} = A e_k + \frac{o(t)}{t} = A e_k + \frac{o(t)}{t} =$$

$$= a_k + \frac{o(t)}{t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{t} = a_k \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = a_k$$

$$\text{Т.о., } A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right).$$

2. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.е. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Тогда производная Фреше отображения f есть

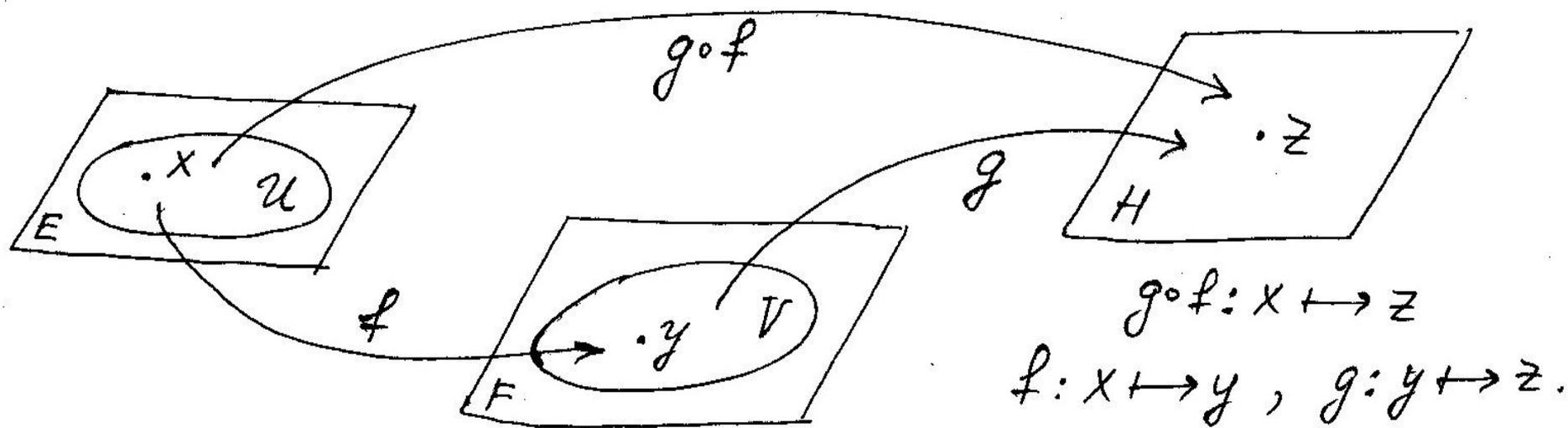
ЛОО $f'(x^0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, причем матрица оператора $f'(x^0)$ имеет

виз:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} \quad (\text{матрица Якоби})$$

Производная композиции отображений

Пусть E, F, H — ЛНП-ва; U — открытое мн-во в E ,
 V — открытое мн-во в F ; $f: U \rightarrow F$, $f(U) \subset V$,
 $g: V \rightarrow H$.



Рассм-и отображение $g \circ f: U \rightarrow H$, такое, что для $\forall x \in U$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)).$

Расси-и отображение $g \circ f: U \rightarrow H$, такое, что для $\forall x \in U$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Th Если отобра-е f диф-мо по Фреше в т. $x_0 \in U$, а
отобра-е g диф-мо по Фреше в т. $y_0 = f(x_0) \in V$, то
отобра-е $g \circ f$ диф-мо по Фреше в т. x_0 и

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(y_0) \cdot f'(x_0)}_{\text{произведение лин-х операторов}}$$

произведение лин-х операторов

11. Нелинейные фредгольмовы отображения

Рассмотрим отображение $f : E \rightarrow F$ (E, F – БП).

Пусть для любого $x \in E$ существует производная Фреше

$f'(x) : E \rightarrow F$, являющаяся фредгольмовым оператором,

причем $f'(x)$ непрерывна по x (как операторное

отображение $f' : E \rightarrow L(E, F)$). Тогда отображение f

называется **фредгольмовым отображением**.

Заметим, что, в силу того, что любые две точки $x_1, x_2 \in E$ можно соединить отрезком $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$, $\text{ind } f'(x_1) = \text{ind } f'(x_2)$ (т. к. множество $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t \in [0,1]} \subset \Phi(E, F)$ является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом, $\text{ind } f'(x) = \text{const}$ (на E), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения f** .

Литература

1. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа

<https://vk.com/fredholm>