# Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

# 9. Линейные фредгольмовы операторы

Пусть $E, F$ – вещественные банаховы пространства. Обозначим через $L(E, F)$ пространство непрерывных линейных операторов $A\colon E \to F$.

Пусть $A \in L(E, F)$. **Ядром** оператора $A$ называется векторное пространство

$$\text{Ker } A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

и **образом** оператора $A$ – векторное пространство

$$\operatorname{Im} A = \{y \in F : Ax = y \text{ для некоторого } x \in E\}.$$

Фактор-пространство $\operatorname{Coker} A = F/\operatorname{Im} A$ называют **коядром** оператора $A$.

Через $\dim V$ далее обозначается размерность векторного пространства $V$ (возможно, даже бесконечная).

**Определение 1.** *Линейный оператор $A \in L(E, F)$ называется* **фредгольмовым**, *если*

1. $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;
2. $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

**Индексом** *фредгольмова оператора $A$ называется число*

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A.$$

Обозначим через $\Phi(E,F)$ множество всех фредгольмовых операторов $A \in L(E,F)$ и через $\Phi_n(E,F)$ его подмножество, состоящее из фредгольмовых операторов индекса $n$.

**Теорема** *Если $A \in \Phi(E,F)$, тогда образ $\operatorname{Im} A$ – замкнутое подпространство в $F$ и найдется конечномерное подпространство $F_2 \subset F$, которое является топологическим дополнением к $\operatorname{Im} A$.*

**Замечание.**

Подпространство $F_2$, которое является топологическим дополнением к $\operatorname{Im} A$, изоморфно коядру оператора $A$, поэтому

$$\dim \operatorname{Coker} A = \dim F_2.$$

Рассмотрим функцию $\operatorname{ind}\colon \Phi(E,F) \to \mathbb{Z}$, которая каждому оператору $A \in \Phi(E,F)$ ставит в соответствие его индекс $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$.

## Основные свойства фредгольмовых операторов.

**Свойство 1.** Множество $\Phi(E,F)$ является открытым множеством в пространстве $L(E, F)$.

**Свойство 2.** Функция ind постоянна на всяком линейно связном множестве $\Omega \subset \Phi(E,F)$.

## Примеры

1. Изоморфизм $B : E \to F$ (т. е. непрерывно обратимый линейный ограниченный оператор).

Очевидно, что $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\operatorname{Im} B = F$ и $\operatorname{Coker} B = F / F = \{F\}$ (состоит из одного фактор-класса). Следовательно, $B : E \to F$ – фредгольмов оператор и $\operatorname{ind} B = 0$.

2. Оператор $T = I + C$, где $C : E \to E$ – вполне непрерывный оператор, является фредгольмовым.

Покажем, что $\operatorname{ind} T = 0$.

Рассмотрим отрезок $[I, T] = \{ I - tC \mid t \in [0,1] \}$ в множестве $\Phi(E, F)$. В силу свойства 2, $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} I = 0$.

3. Оператор $S = B + C$, где $B : E \to F$ – изоморфизм, $C : E \to F$ – вполне непрерывный оператор, является фредгольмовым индекса ноль.

# 10. Производная Фреше

Пусть $E$ и $F$ — ЛНП-ва, $\mathcal{U}$ — открытое мн-во в пр-ве $E$, $f : \mathcal{U} \to F$ — отображение.

**Опр.** Говорят, что отобр-е $f$ __дифференцируемо по Фреше__ в т. $x_0 \in \mathcal{U}$, если $\exists$ такой линейный ограниченный оператор $A : E \to F$, что при $\forall h \in E$ (при условии $x_0 + h \in \mathcal{U}$)

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + \omega(x_0, h),$$

где $\dfrac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$ (то есть $\omega(x_0,h) = o(h)$).

ЛОО $A$ называется __производной Фреше__ от-я $f$ в т. $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$. Элемент пр-ва $F$ $f'(x_0)h = Ah$ называется __дифференциалом Фреше__ и обознач-ся $df(x_0, h)$.

# Примеры

**1.** $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^1$; $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, то есть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда, если $f$ – дифф-мо по Фреше в т. $x^0$, то оператор $f'(x^0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, след-но, его матрица $\mathcal{A} = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n)$.

Выясним, чему равны эл-ты $a_k$ матрицы $\mathcal{A}$.

Рассм-м приращение по $k$-й переменной, считая все ост-е перем-е фиксированными:

$$\Delta f = f(x^0 + t \cdot e_k) - f(x^0) = A(t \cdot e_k) + o(t)$$

Рассм-м приращение по k-й переменной, считая все ост-е перем-е фиксированными:

$$\Delta f = f(x^0 + t\cdot e_k) - f(x^0) = A(t\cdot e_k) + o(t)$$

(здесь $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ – единичный вектор, у которого все координаты, кроме k-той, равны 0; $h = t\cdot e_k$); тогда $\frac{\Delta f}{t} = A e_k + \frac{o(t)}{t} = A e_k + \frac{o(t)}{t} =$

$$= a_k + \frac{o(t)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\Delta f}{t} = a_k \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = a_k}$$

Т.о., $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right).$

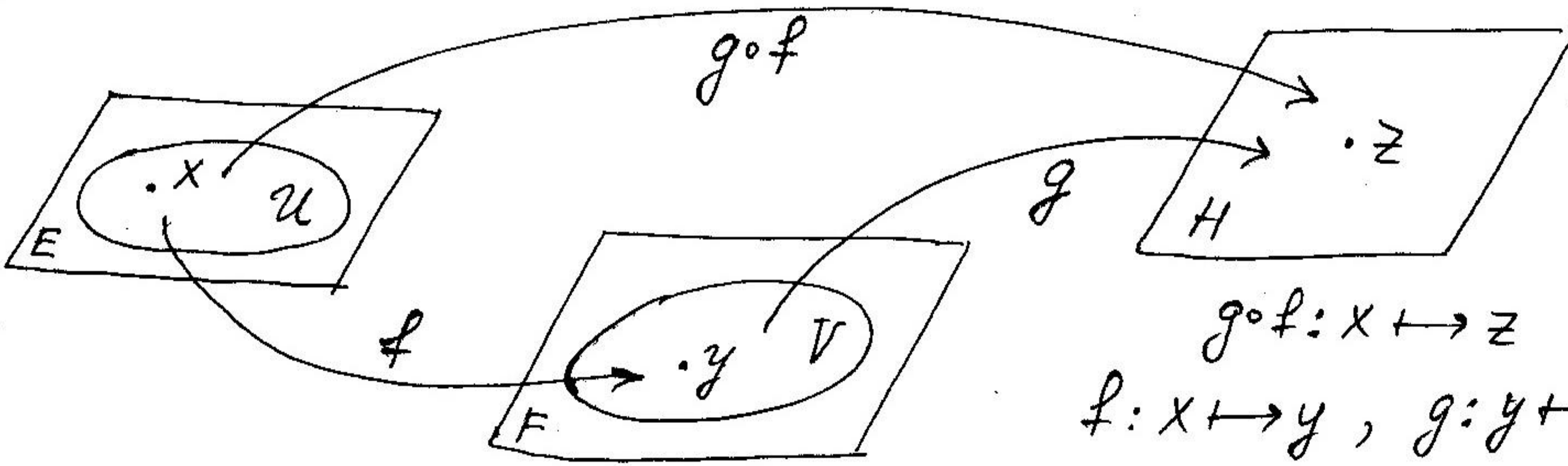
**2.** $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т.е. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Тогда производная Фреше отобр-я $f$ есть ЛОО $f'(x^0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, причем матрица оп-ра $f'(x_0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$ (матрица Якоби)

# Производная композиции отображений

Пусть $E, F, H$ — ЛНП-ва; $\mathcal{U}$ — открытое мн-во в $E$, $V$ — открытое мн-во в $F$; $f : \mathcal{U} \to F$, $f(\mathcal{U}) \subset V$, $g : V \to H$.




$g \circ f : x \longmapsto z$

$f : x \longmapsto y$, $g : y \longmapsto z$.

Рассм-м отображение $g \circ f : \mathcal{U} \to H$, такое, что для $\forall x \in \mathcal{U}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Рассм-м отображение $g \circ f : U \to H$, такое, что для $\forall x \in U$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

**Th** Если отобр-е $f$ диф-мо по Фреше в т. $x_0 \in U$, а отобр-е $g$ диф-мо по Фреше в т. $y_0 = f(x_0) \in V$, то отобр-е $g \circ f$ диф-мо по Фреше в т. $x_0$ и

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(y_0) \cdot f'(x_0)}_{\text{произведение лин-х операторов}}.$$

# 11. Нелинейные фредгольмовы отображения

Рассмотрим отображение $f : E \to F$ ($E$, $F$ – БП). Пусть для любого $x \in E$ существует производная Фреше $f'(x) : E \to F$, являющаяся фредгольмовым оператором, причем $f'(x)$ непрерывна по $x$ (как операторное отображение $f' : E \to \mathrm{L}(E,F)$). Тогда отображение $f$ называется **фредгольмовым отображением.**

Заметим, что, в силу того, что любые две точки $x_1, x_2 \in E$ можно соединить отрезком $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$, $\operatorname{ind} f'(x_1) = \operatorname{ind} f'(x_2)$ (т. к. множество $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t\in[0,1]} \subset \Phi(E,F)$ является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом, $\operatorname{ind} f'(x) = const$ (на $E$), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения $f$.**

# Литература

1. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие

2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа

*https://vk.com/fredholm*