

Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е. Алексеева

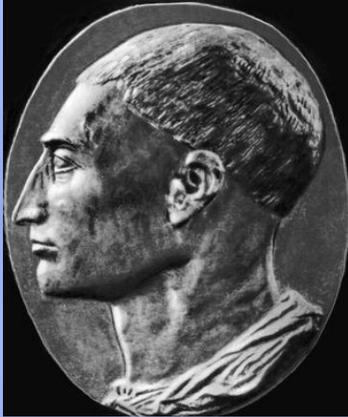
Кафедра «Инженерная графика»

И.Ю. Скобелева, И.А. Ширшова

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Комплекс демонстрационных материалов  
для чтения лекций по начертательной геометрии

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



**Альберти (Alberti) Леон Баттиста**  
(18.2.1404 - 25.4.1472)

Основатель теоретической перспективы.



**Гаспар Монж (1746-1818)**

Систематизировал и обобщил накопленный годами опыт геометрических построений, систематизировал метод проекций, ввел понятие "комплексный чертёж".

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Севастьянов Яков Александрович (1796 - 1849)**

Первым начал читать лекции на русском языке. Им же издан первый на русском языке курс начертательной геометрии на русском языке.



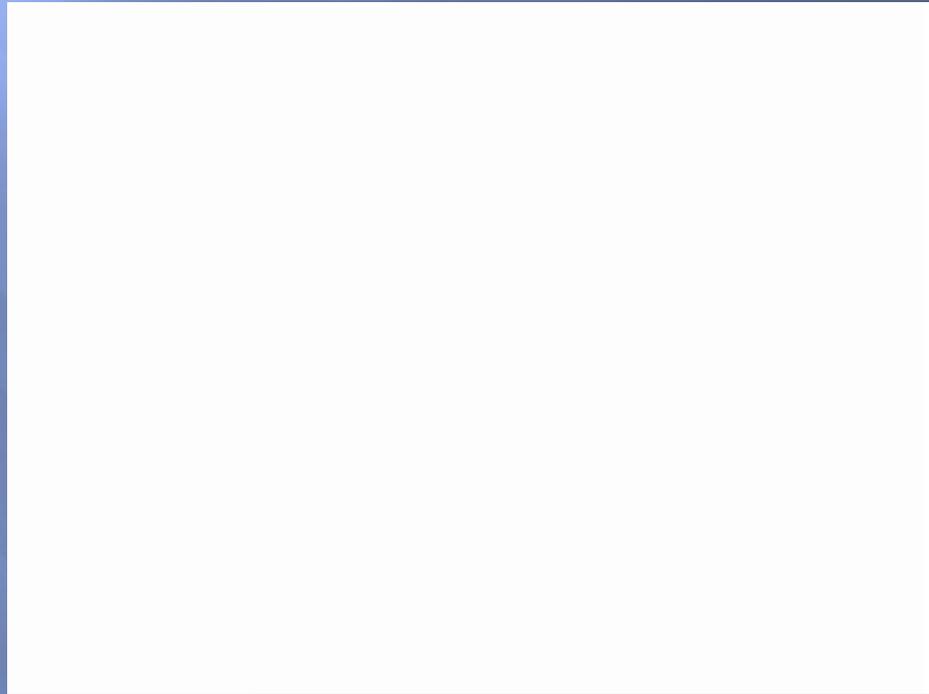
**Курдюмов Валериан Иванович (1853 - 1904)**

Издав полный курс начертательной геометрии, по обширной программе, со включением проекций кривых линий и поверхностей и метода аксонометрических проекций.

# ЛЕКЦИЯ 1

## МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Центральный метод проецирования



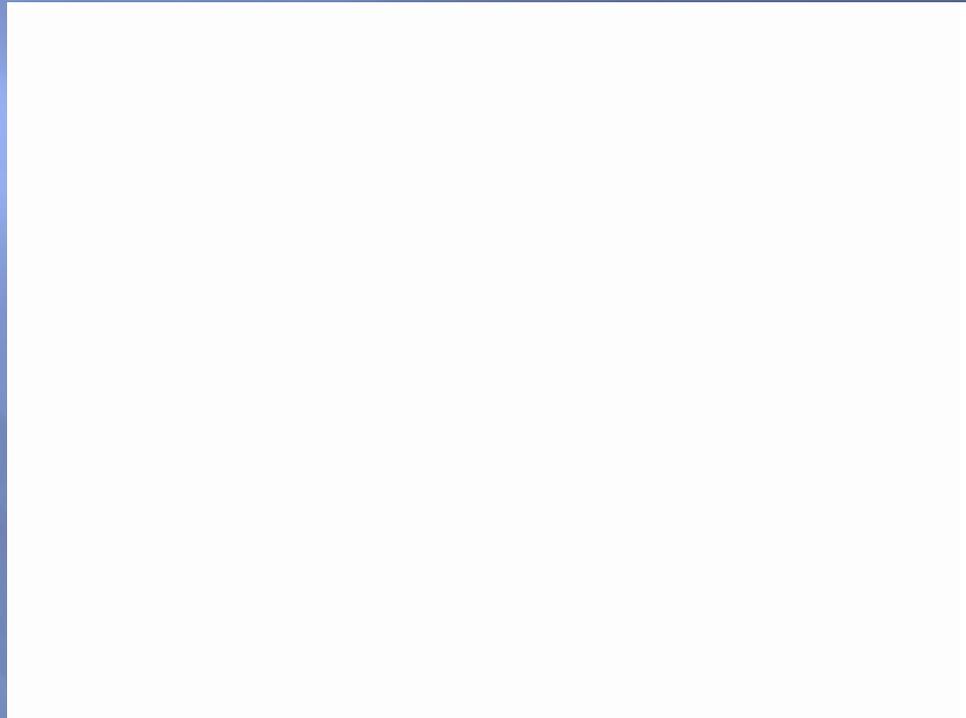
$\Pi'$  – плоскость проекций;

$S$  – центр проекций;

$[SA)$  и  $[SB)$  – проецирующие лучи;

$A'$  и  $B'$  – центральные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$

## Параллельный метод проецирования



$\Pi'$  – плоскость проекций;

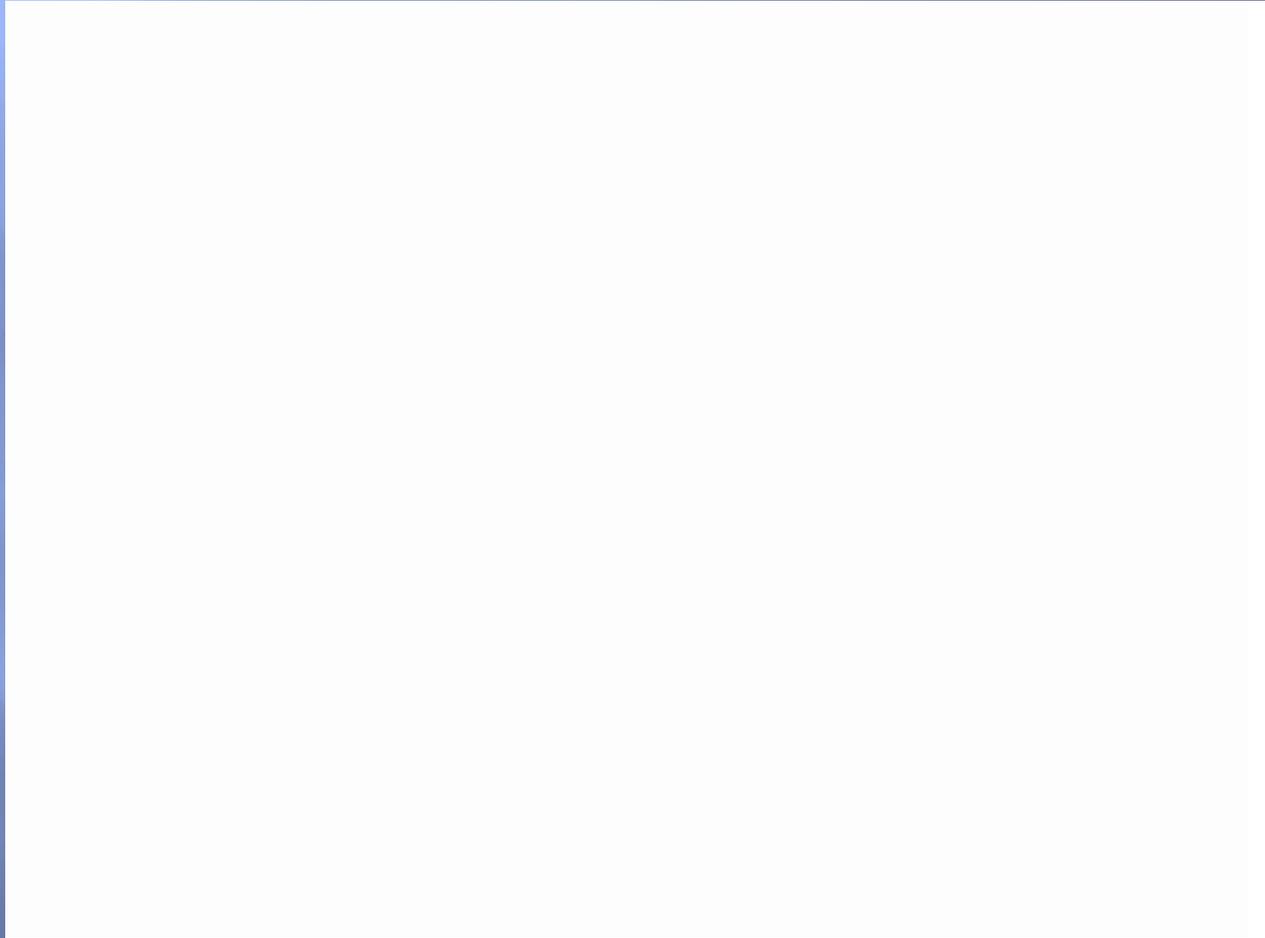
$s$  – направление проецирования;

$[SA)$ ,  $[SB)$  и  $[SC)$  – проецирующие лучи;

$A'$ ,  $B'$  и  $C'$  – параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\Pi'$  в направлении  $s$

# ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций



$$s \perp \Pi',$$

$$|A'B'| = |AB''| = |AB| \times \cos \alpha$$

# ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ НА ТРИ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ



$$x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2;$$

$$y_{13} = \Pi_1 \cap \Pi_3;$$

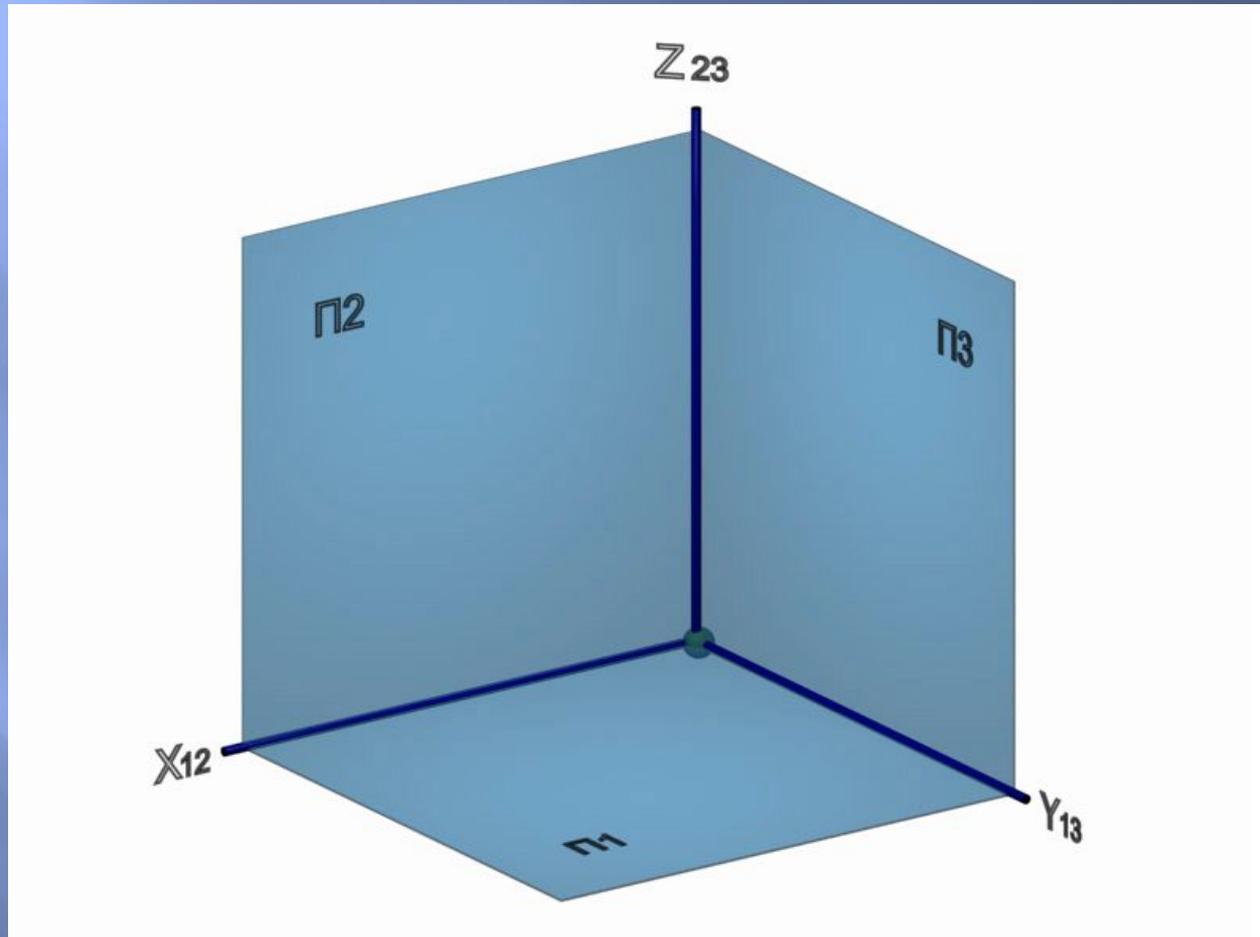
$$z_{23} = \Pi_2 \cap \Pi_3$$

$\Pi_1$ - горизонтальная плоскость проекций;

$\Pi_2$ - фронтальная плоскость проекций;

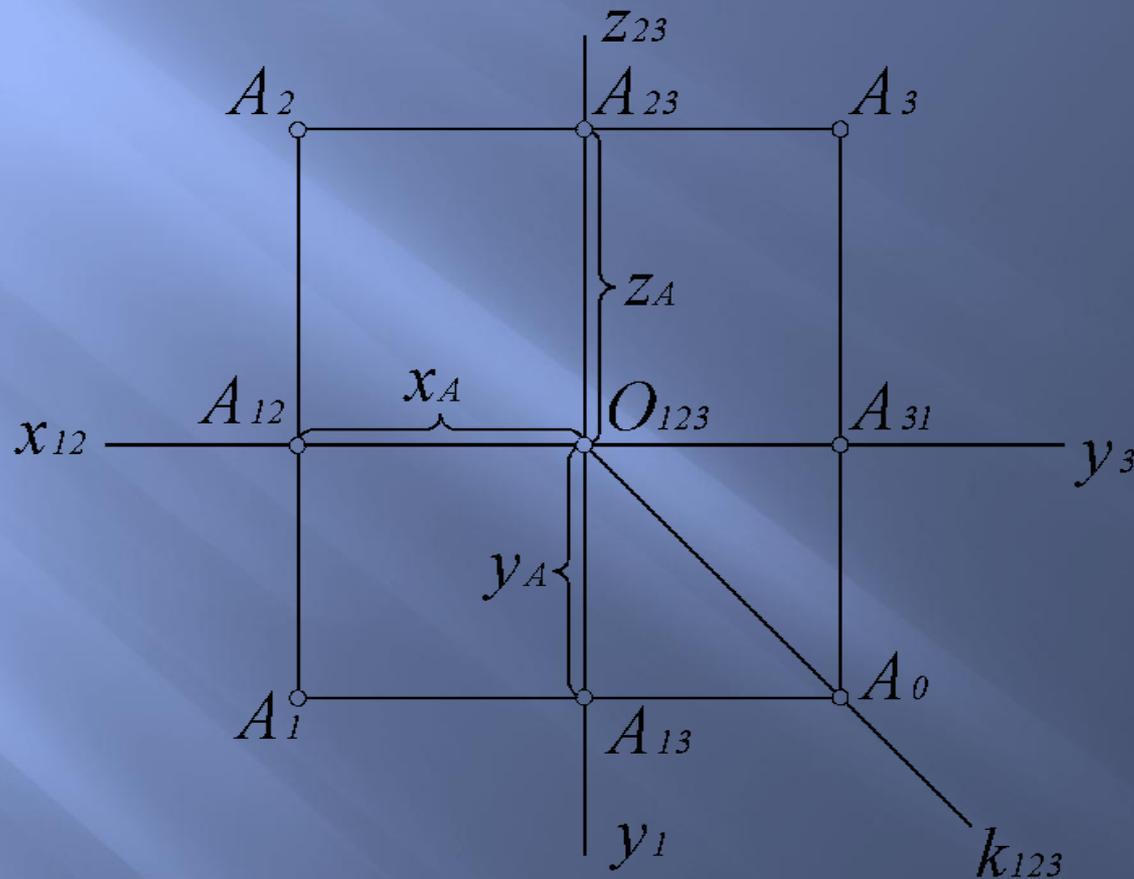
$\Pi_3$ - профильная плоскость проекций

# ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ТРИ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ



$A_1$  - горизонтальная проекция точки  $A$ ;  
 $A_2$  - фронтальная проекция точки  $A$ ;  
 $A_3$  - профильная проекция точки  $A$

# ТРЕХКАРТИННЫЙ КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ (ЭПЮР МОНЖА)



Чертеж на трех совмещенных плоскостях проекций называется  
трехкартинным комплексным чертежом

# ЛЕКЦИЯ 2

## ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

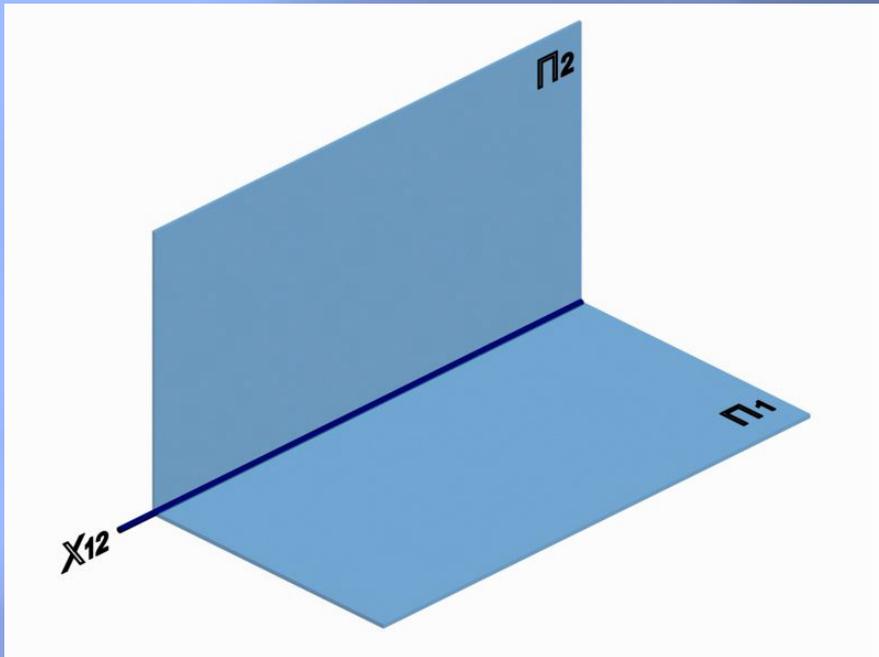
### Способы задания прямой

- ▣ Двумя точками.
- ▣ Точкой и направлением.
- ▣ Линией пересечения двух плоскостей.
- ▣ Своими проекциями.

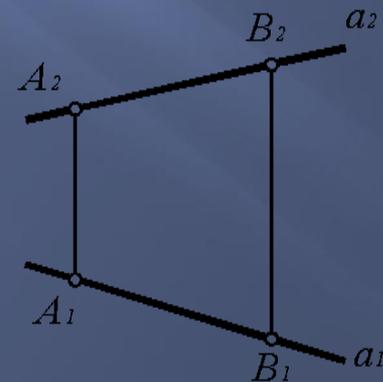
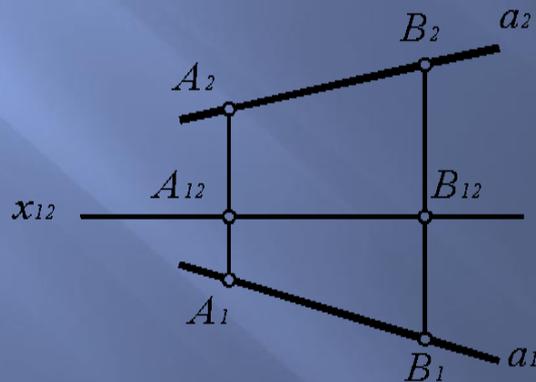
# КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЯМЫХ



# ПРЯМАЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ



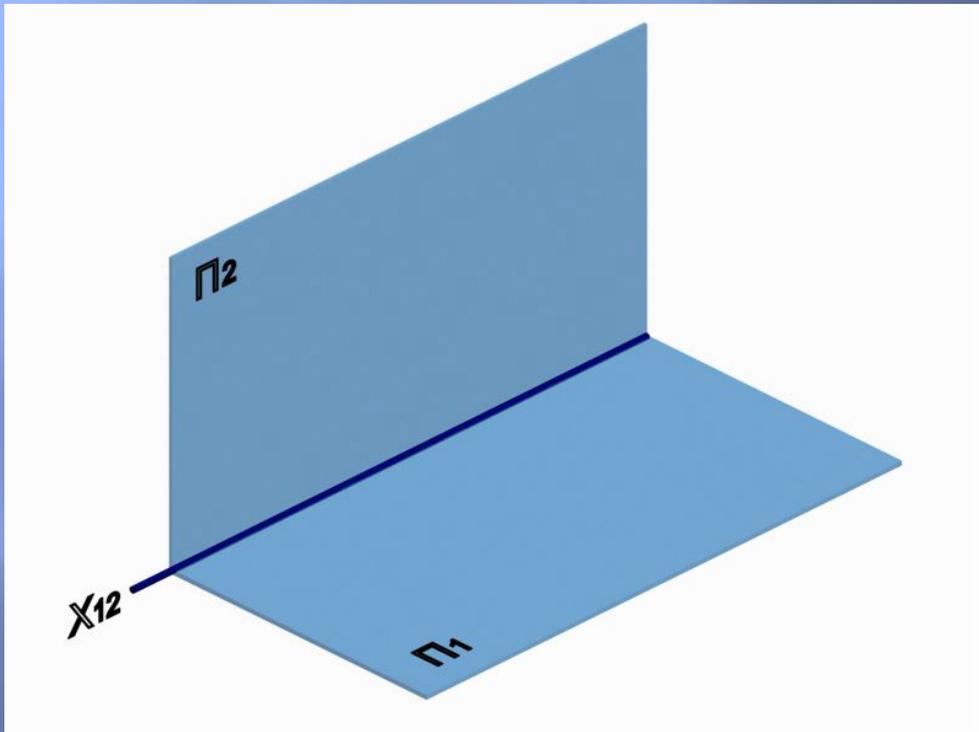
*Прямая общего положения* – прямая, наклоненная под произвольными углами ко всем трем плоскостям проекций



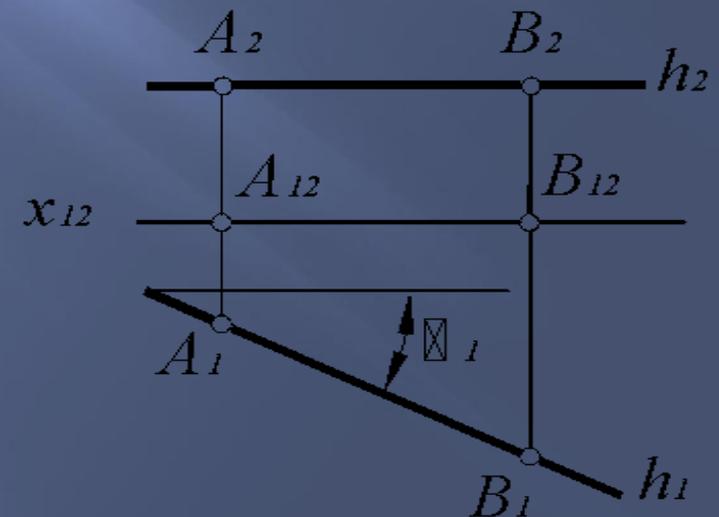
# ЛИНИИ УРОВНЯ

Прямые линии, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются линиями уровня

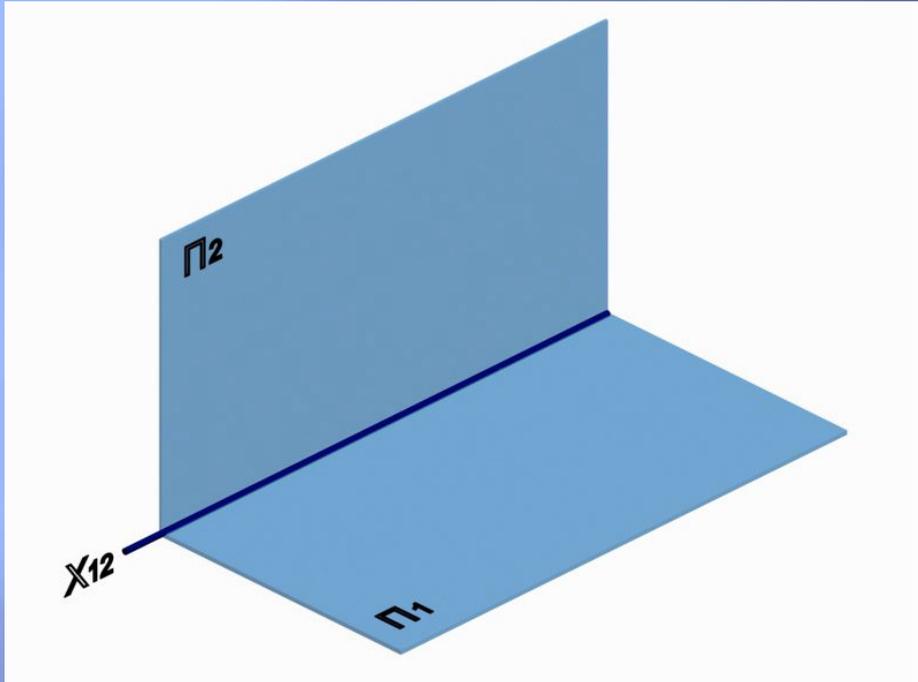
## Горизонталь



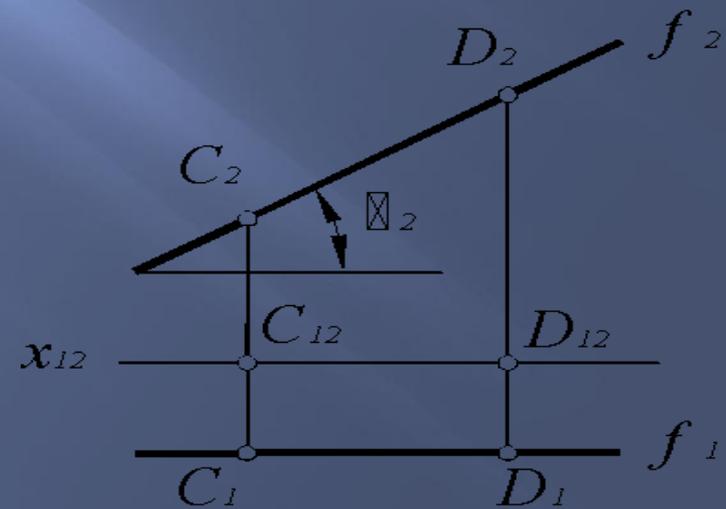
*Горизонталь  $h$*  – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций



# Фронталь



*Фронталь* – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций



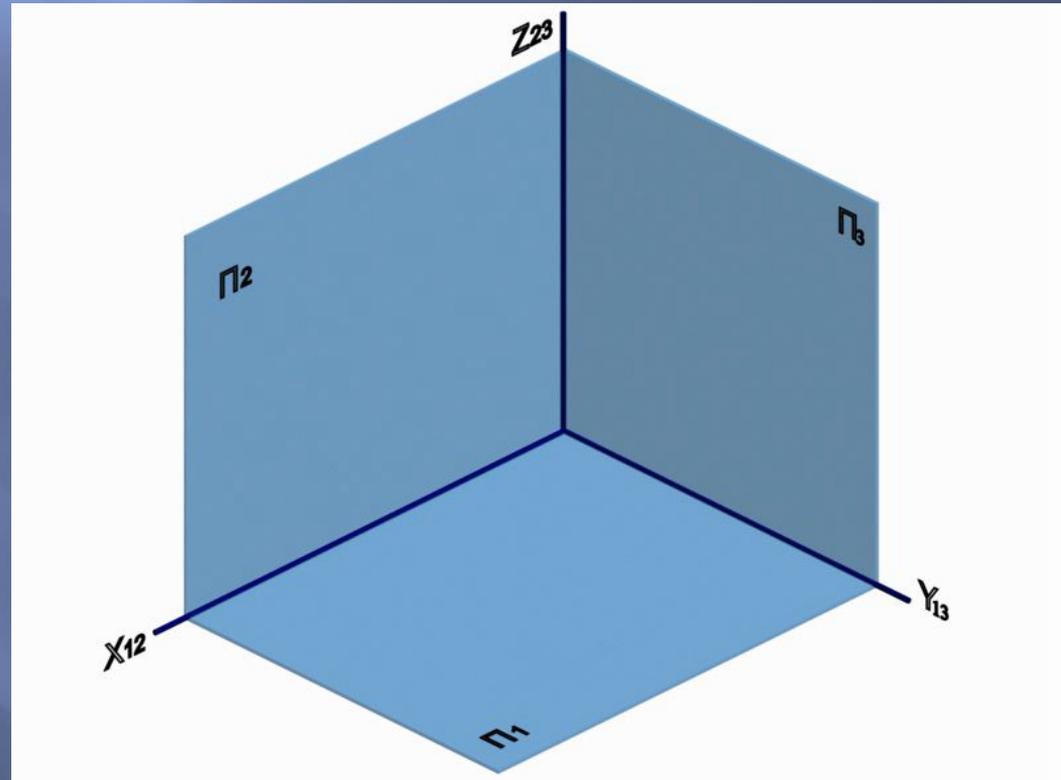
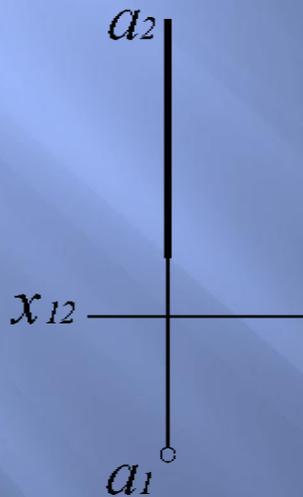


# ПРОЕЦИРУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ

Прямые линии, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются проецирующими

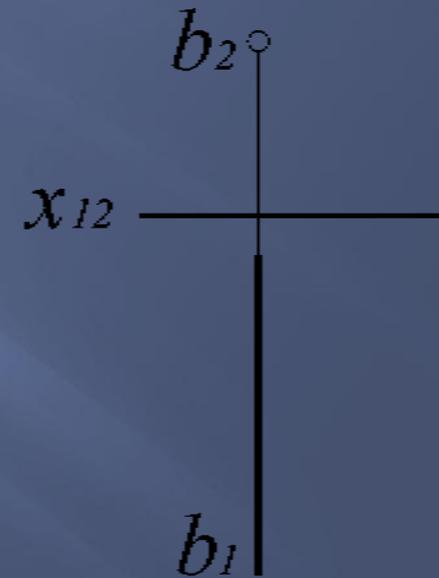
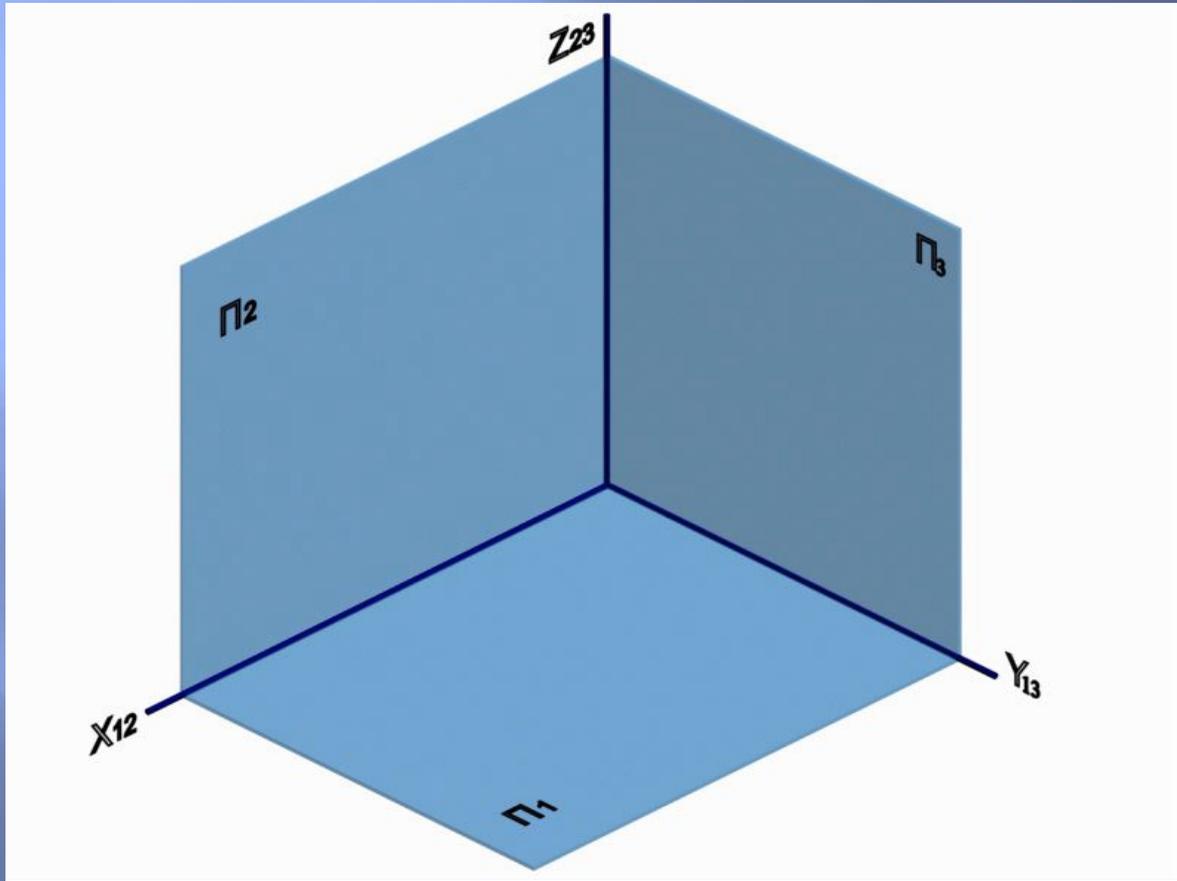
## Горизонтально-проецирующая прямая

*Горизонтально-проецирующая прямая* – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций



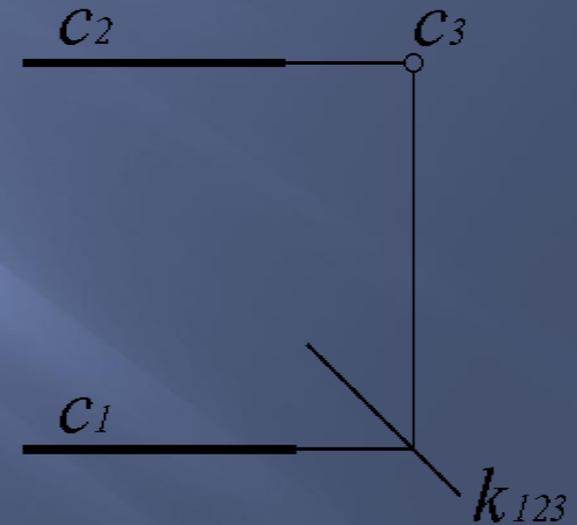
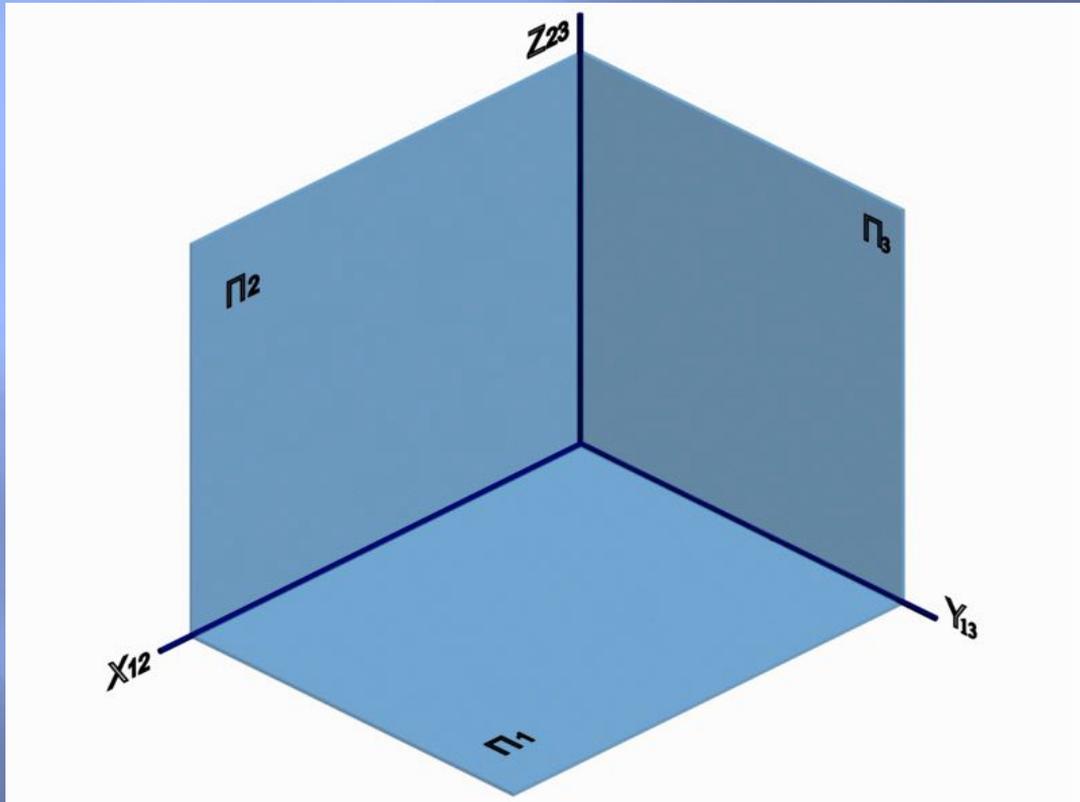
# Фронтально-проецирующая прямая

*Фронтально-проецирующая прямая* – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций



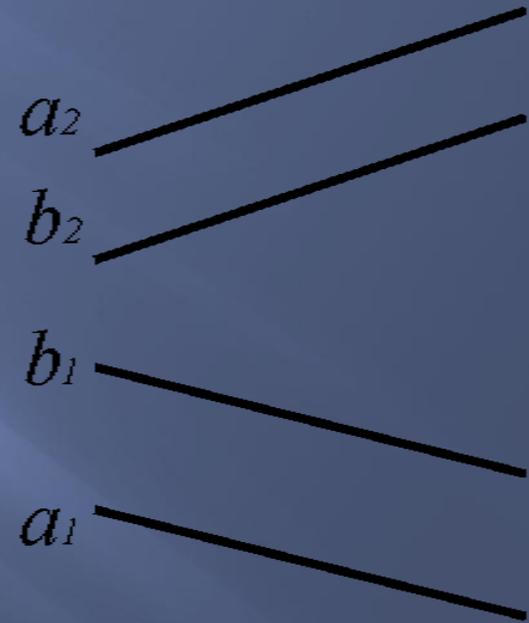
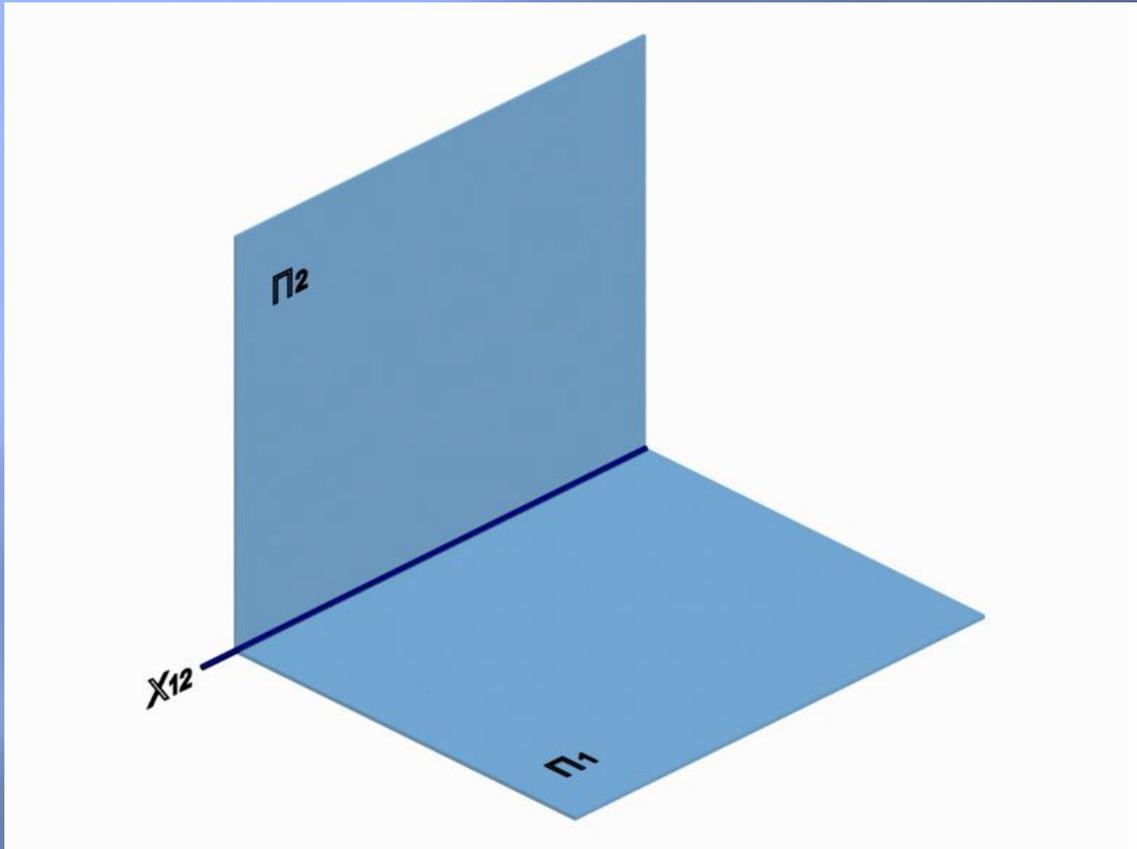
# Профильно-проецирующая прямая

*Профильно-проецирующая прямая* – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций



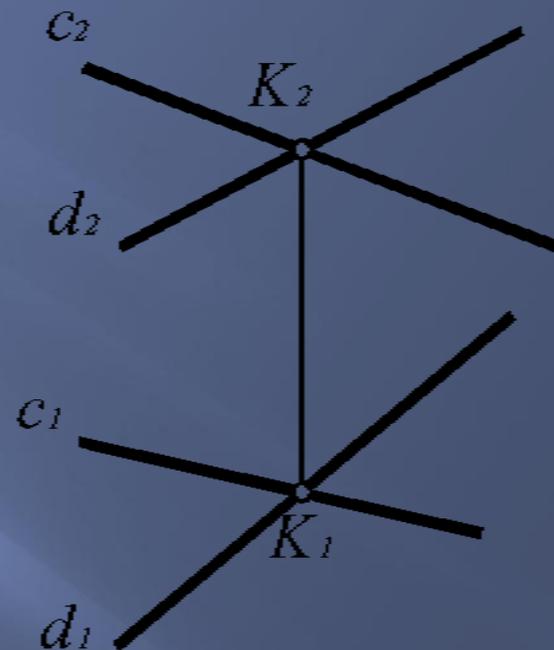
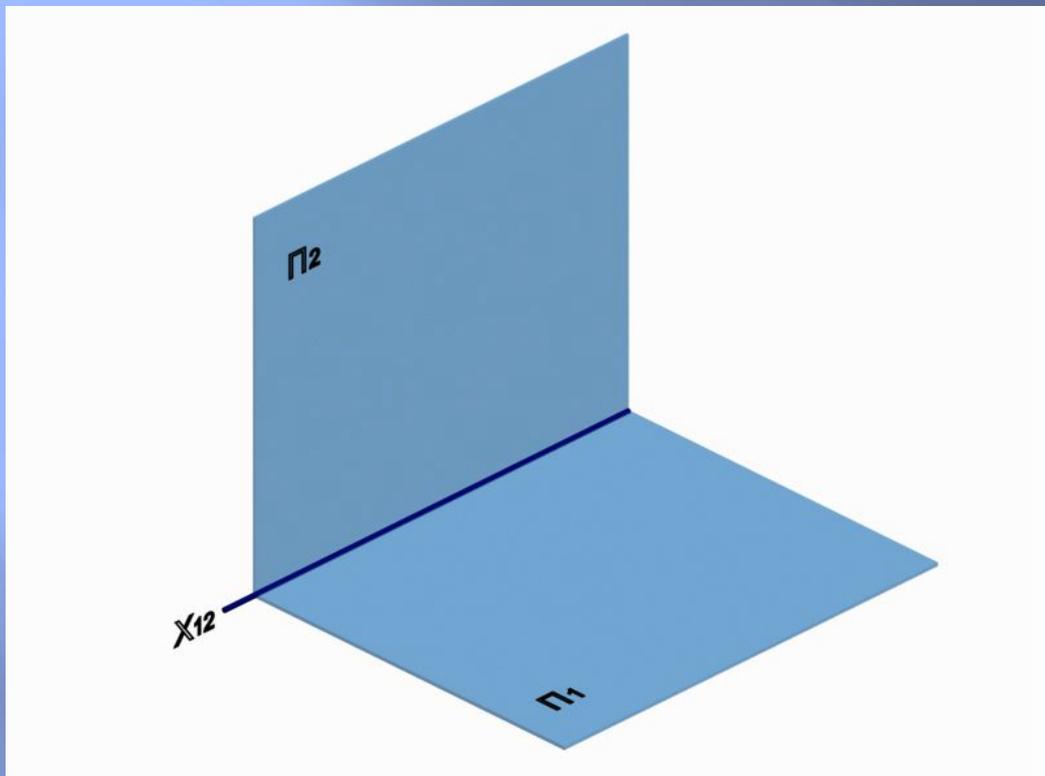
# ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

## Параллельные прямые



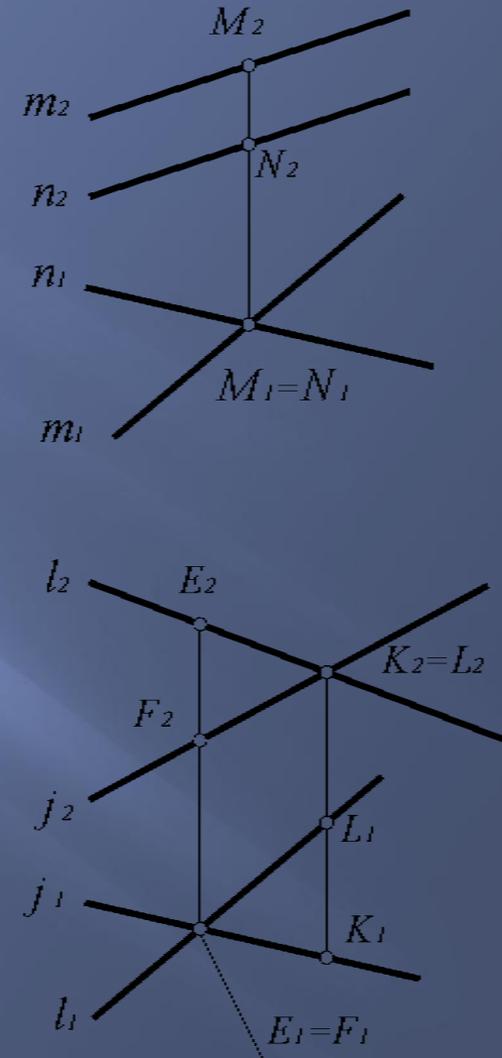
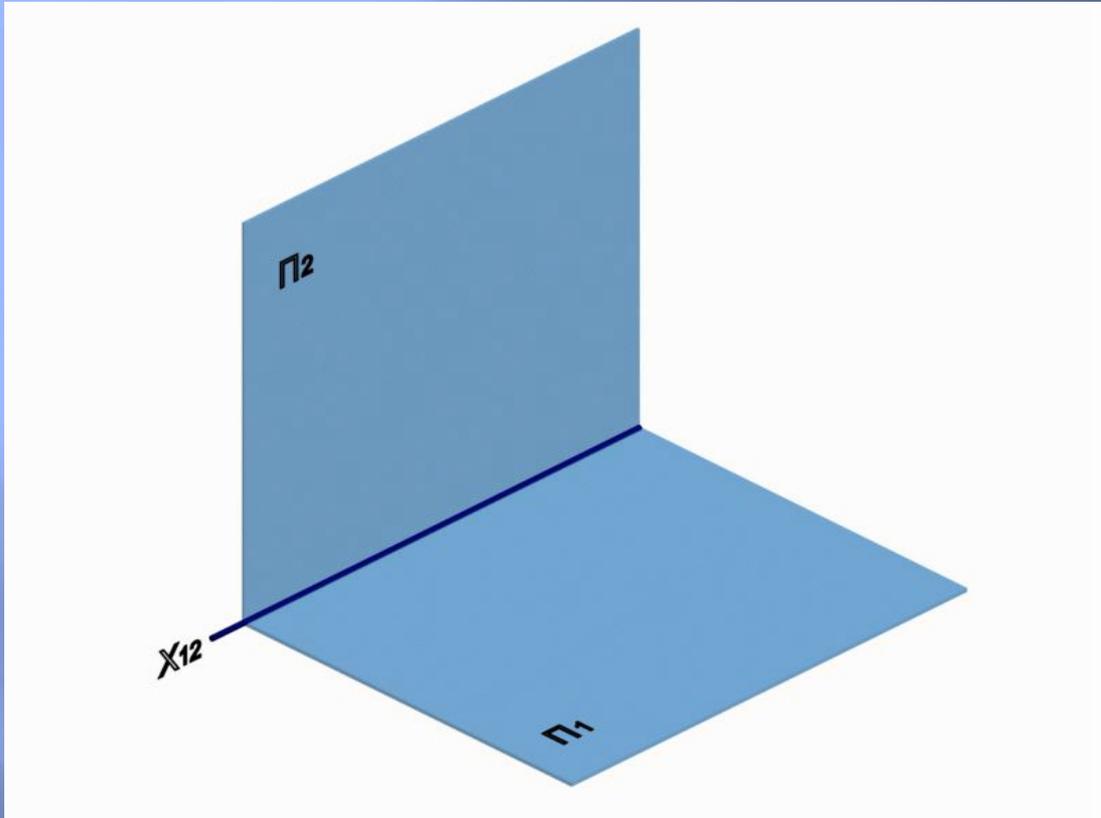
Прямые параллельны, если параллельны их одноименные проекции

## Пересекающиеся прямые



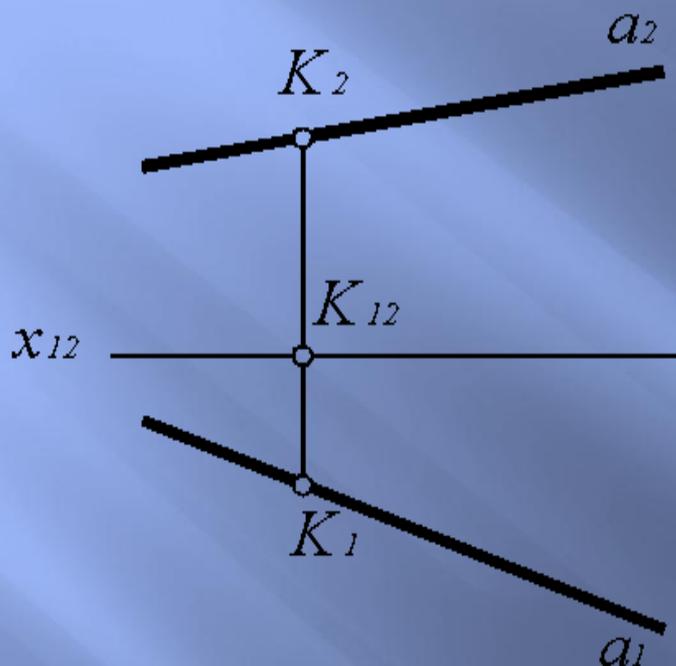
Пересекающиеся прямые имеют общую точку, то есть точки пересечения их одноименных проекций лежат на общей линии связи

## Скрещивающиеся прямые



Прямые, не имеющие общей точки и не параллельные между собой, являются скрещивающимися

# ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ



$$K \in a \Leftrightarrow K_1 \in a_1 \text{ и } K_2 \in a_2$$

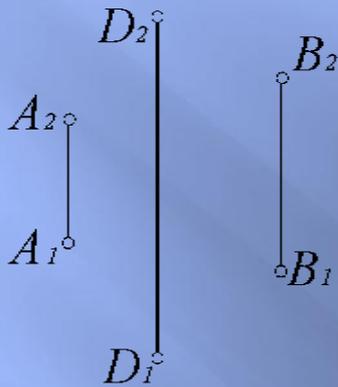
$$[K_1 K_2] \perp x_{12}$$

Точка принадлежит прямой, если ее проекции принадлежат соответствующим (одноименным) проекциям прямой

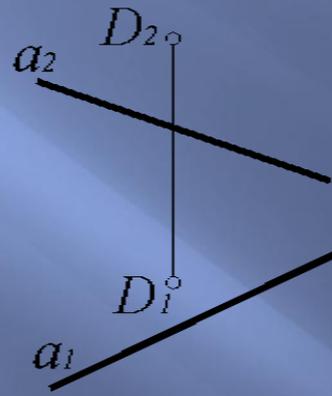
# ЛЕКЦИЯ 3. ПЛОСКОСТЬ

## Способы задания плоскости

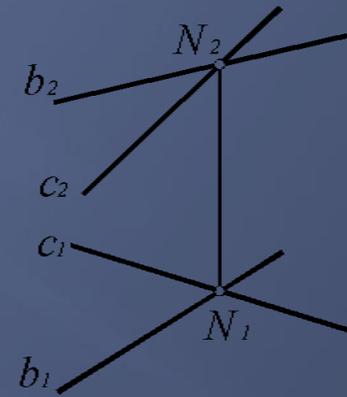
Тремя точками



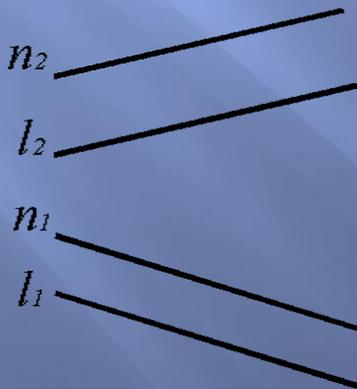
Прямой и точкой



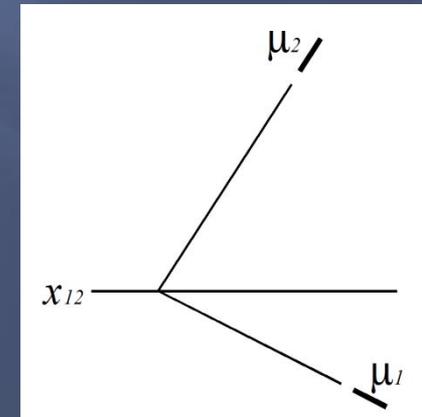
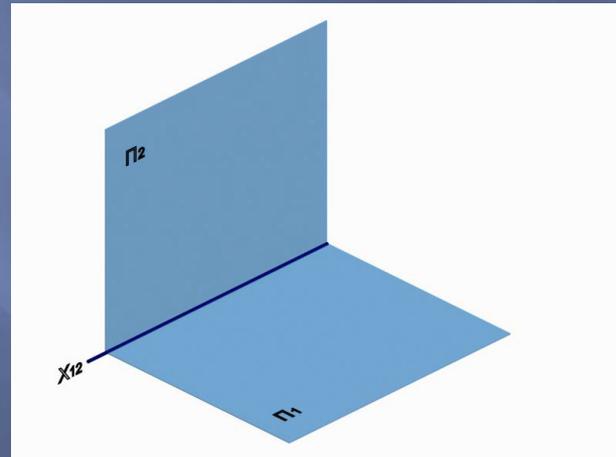
Пересекающимися прямыми



Параллельными прямыми



Следами



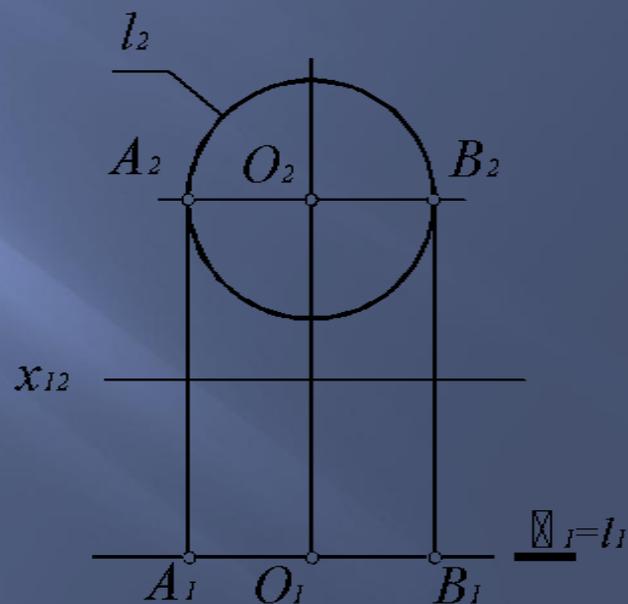
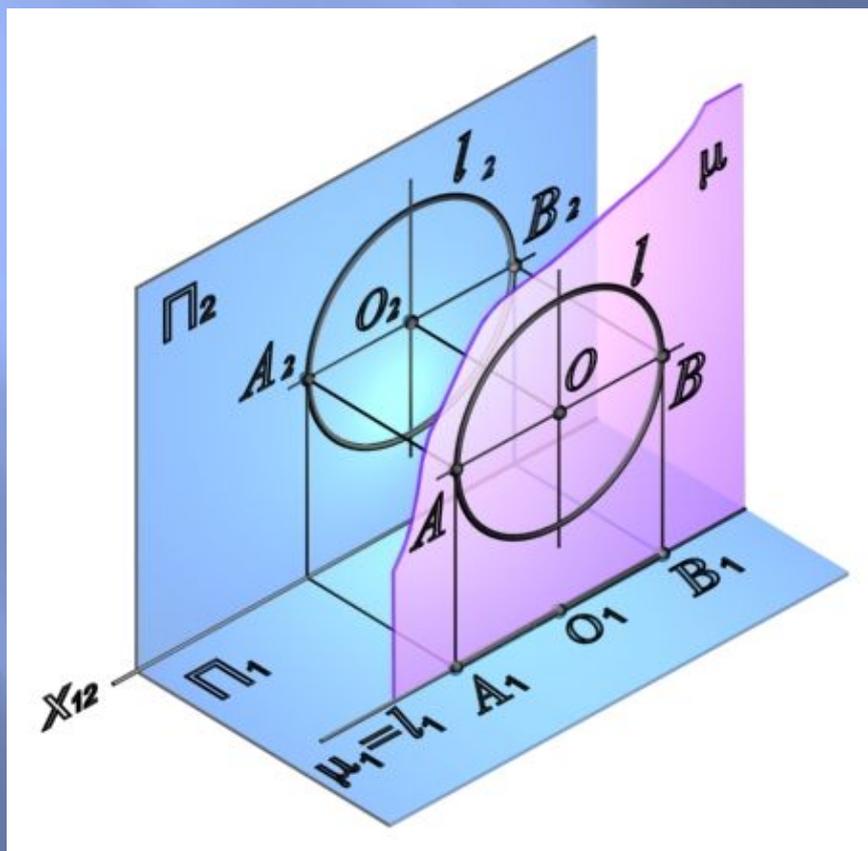
# КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКОСТЕЙ





# Фронтальная плоскость уровня

Фронтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций



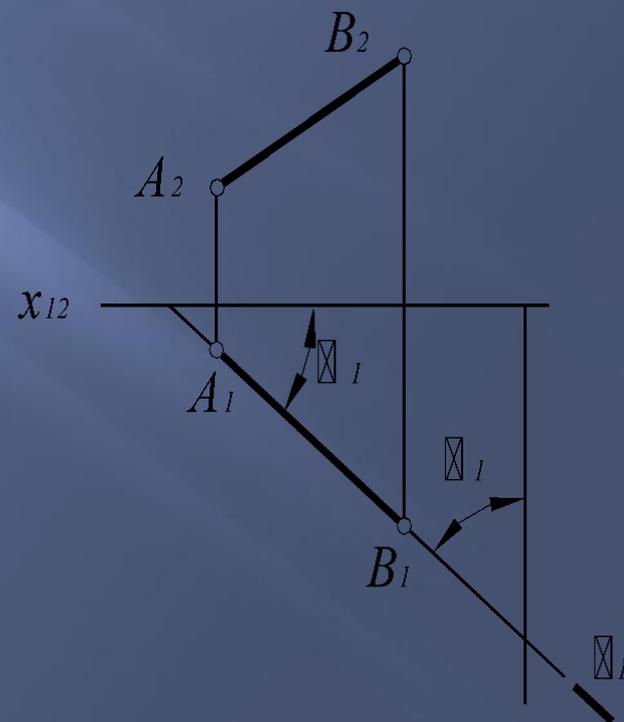
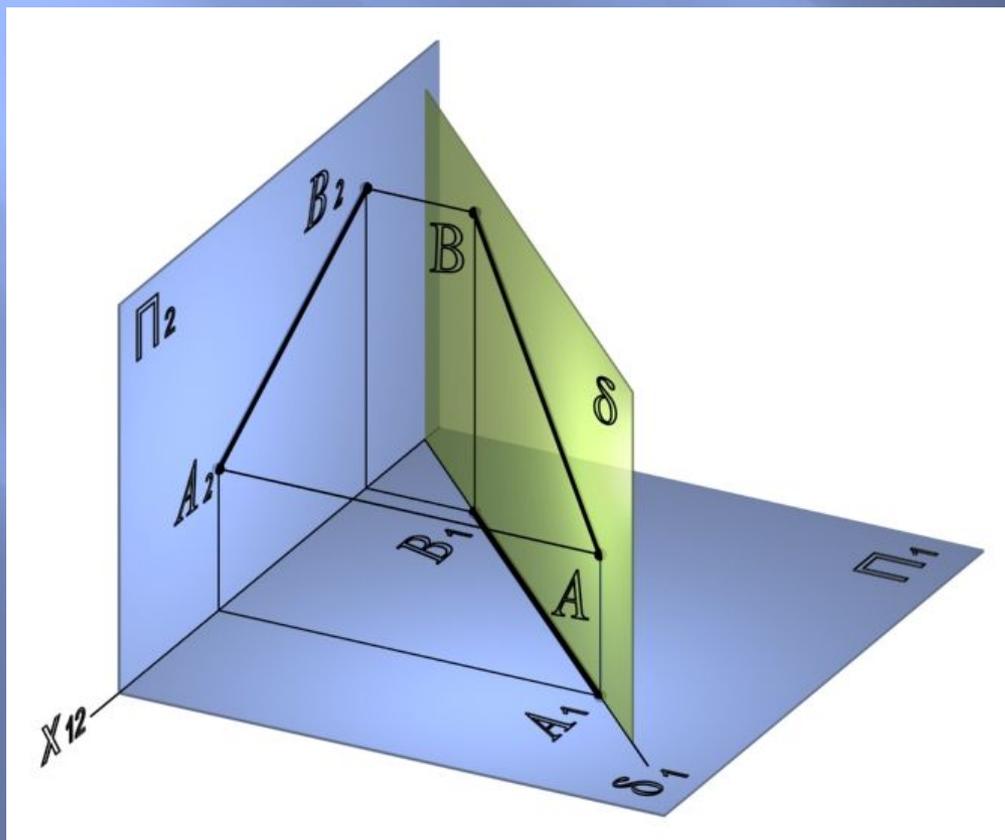


# ПРОЕЦИРУЮЩИЕ ПЛОСКОСТИ

Плоскости, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций, называются проецирующими

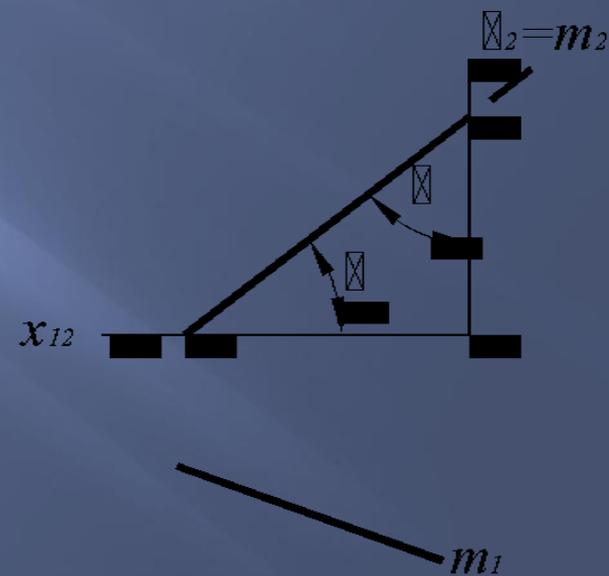
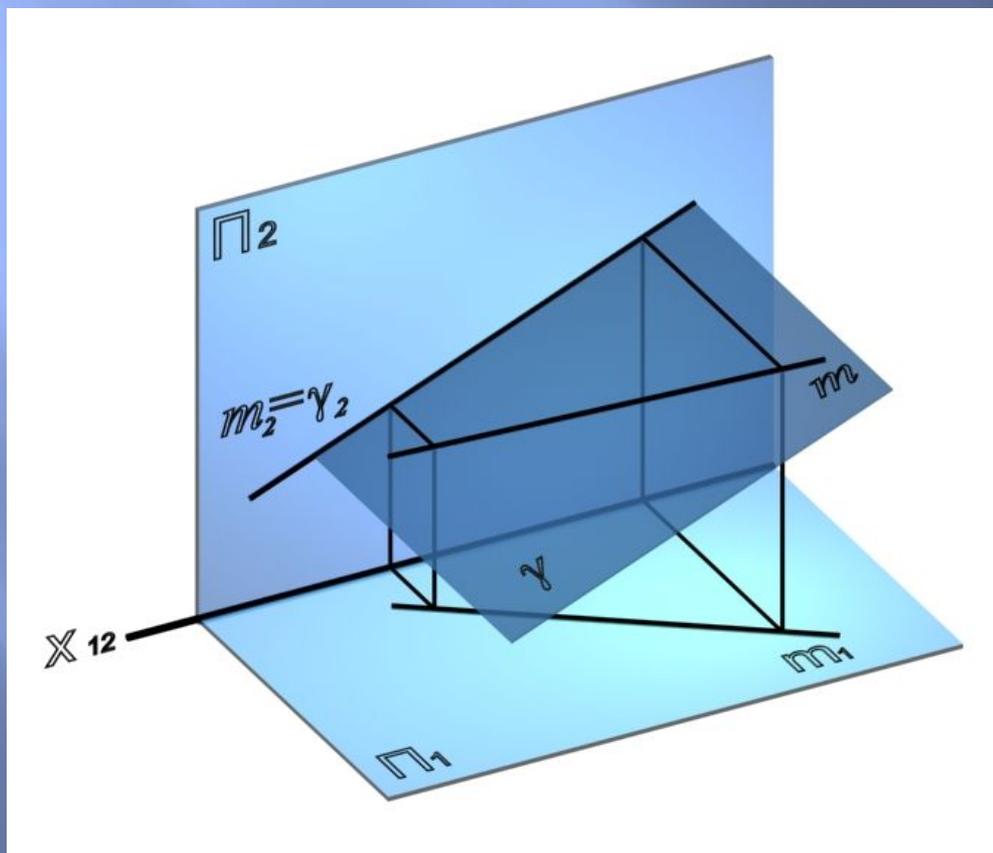
## Горизонтально-проецирующая плоскость

*Горизонтально-проецирующая плоскость* – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций



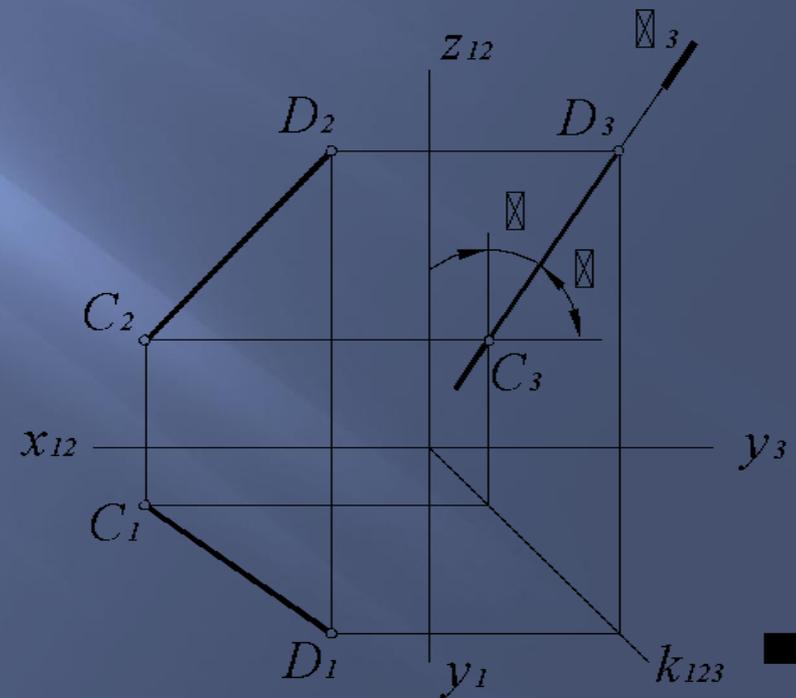
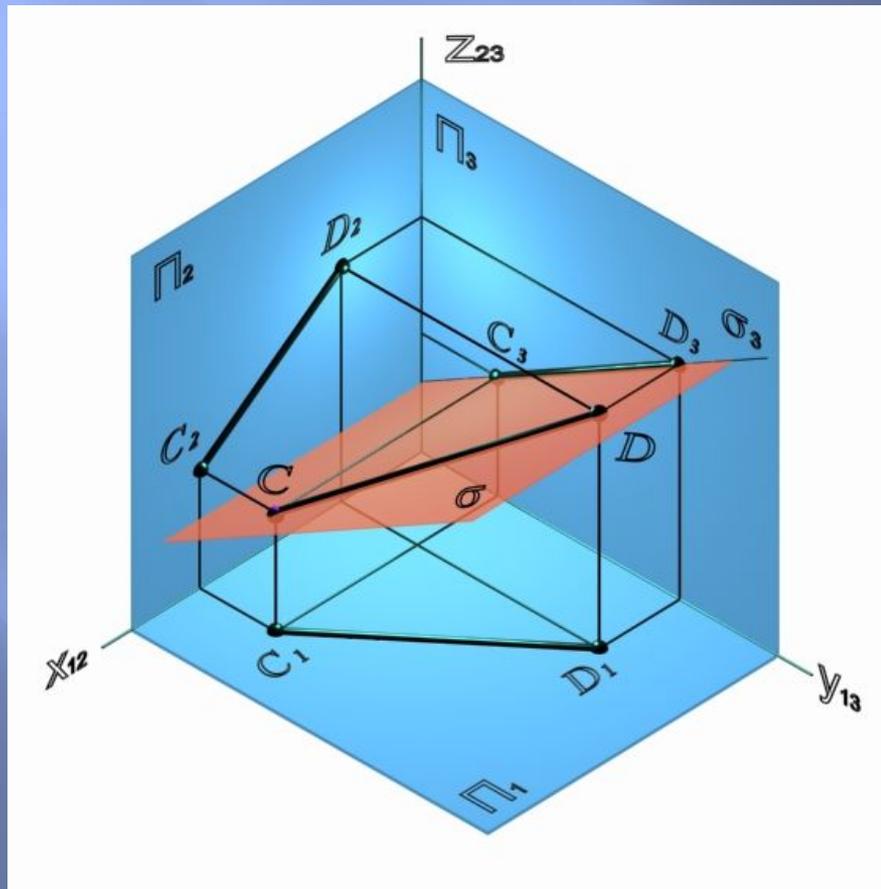
# Фронтально-проецирующая плоскость

*Фронтально-проецирующая плоскость* – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций



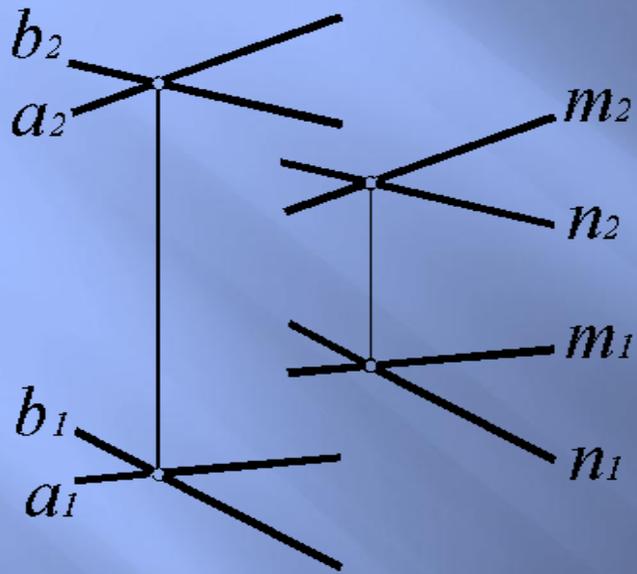
# Профильно-проецирующая плоскость

*Профильно-проецирующая плоскость* – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций



# ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

## Параллельные плоскости

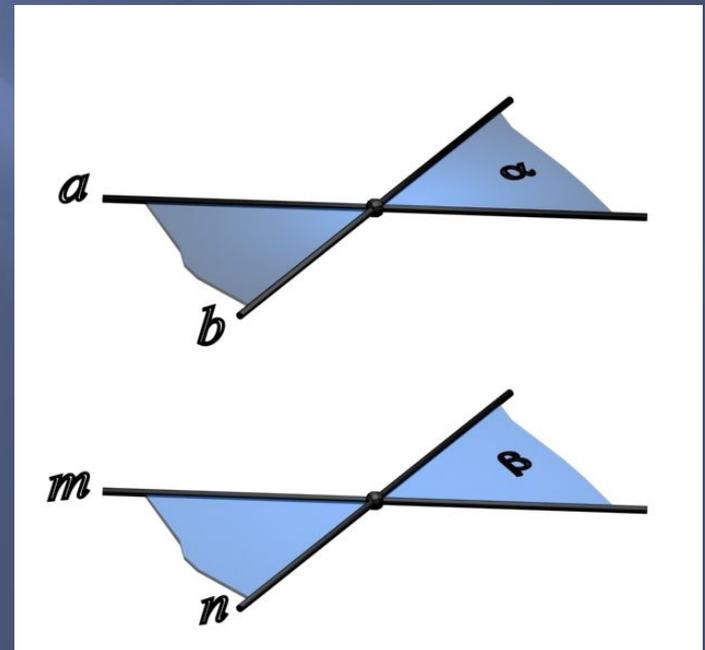


$$\alpha(a \times b),$$

$$\beta(m \times n),$$

$$\alpha \parallel \beta, \Leftrightarrow \begin{cases} a \parallel m (a_1 \parallel m_1, a_2 \parallel m_2); \\ b \parallel n (b_1 \parallel n_1, b_2 \parallel n_2) \end{cases}$$

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

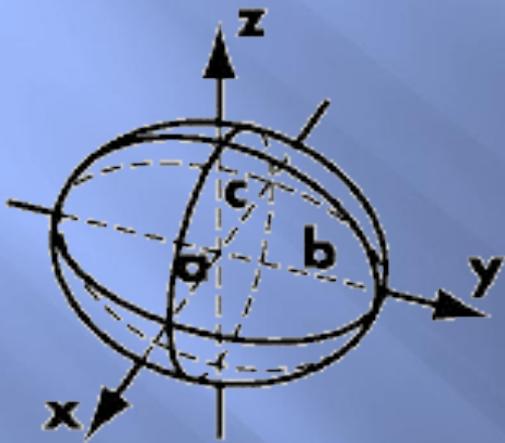


# ЛЕКЦИЯ 4. ПОВЕРХНОСТИ

## Способы задания поверхностей

### Аналитический

Поверхность рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению



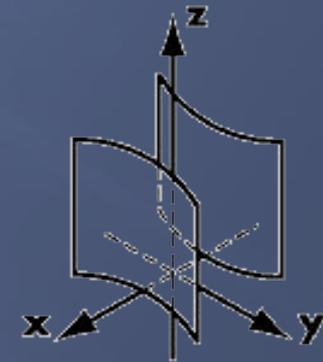
эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



гиперболоид  
однopolостный

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

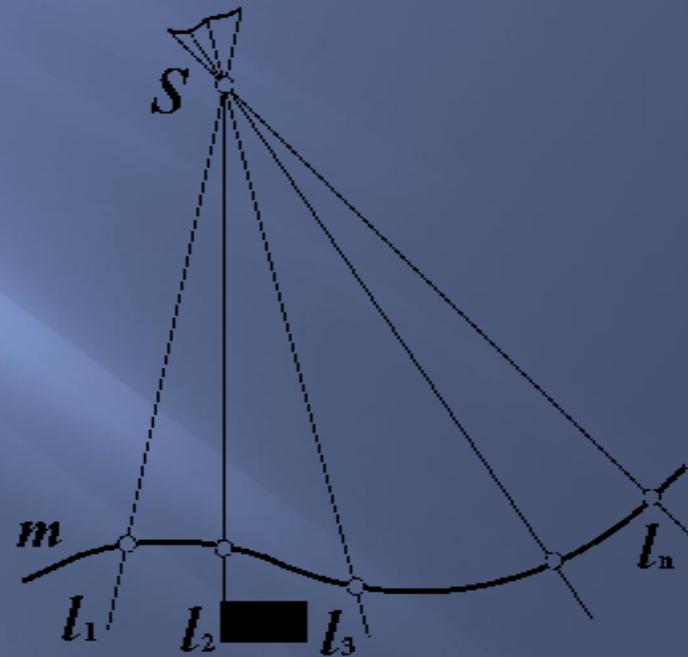
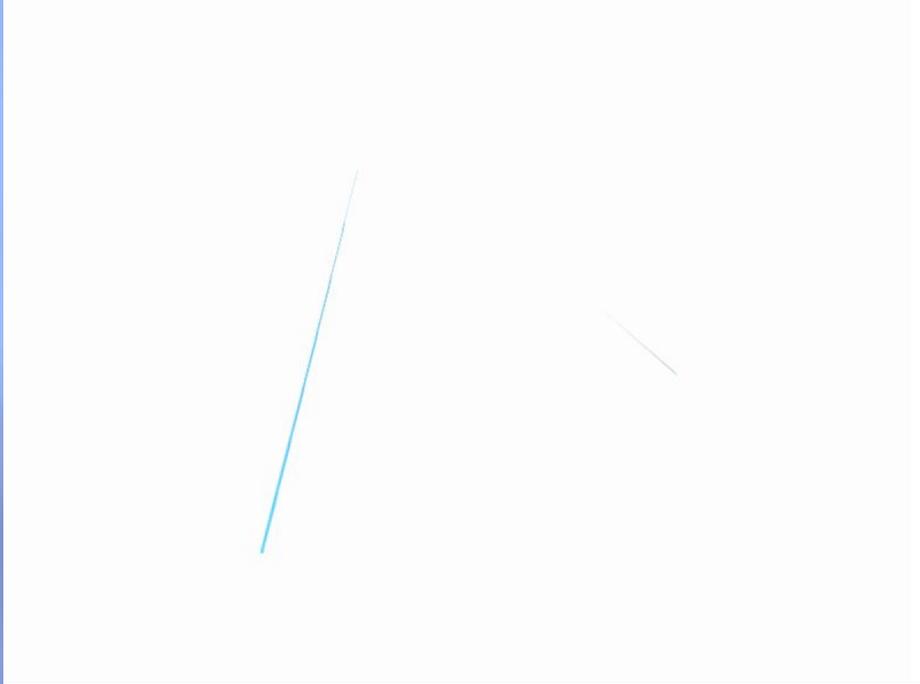


гиперболический  
цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

# Кинематический

Кинематическую поверхность можно рассматривать как непрерывную совокупность последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по некоторым неподвижным линиям



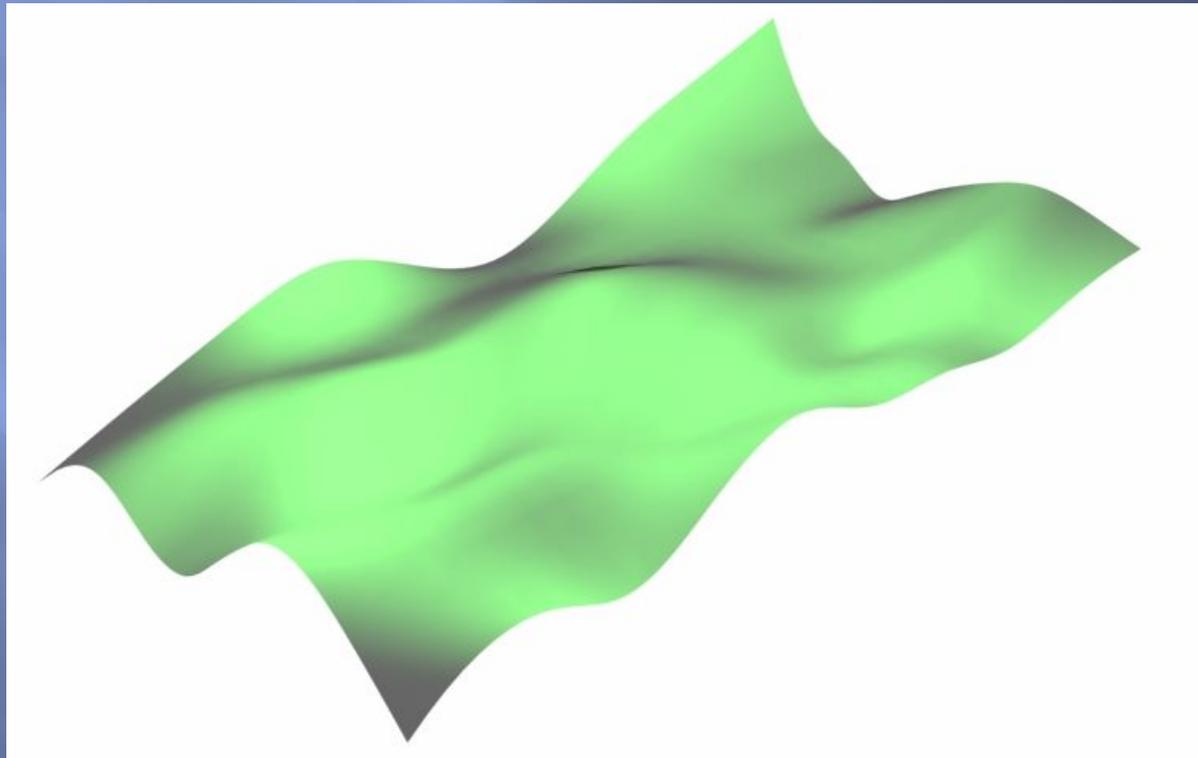
$S$  – вершина конической поверхности;

$m$  – направляющая;

$l_1, l_2 \dots l_n$  – последовательные положения образующей

# Каркасный

Такие поверхности обычно задают достаточно плотной сетью линий и точек, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называется каркасом поверхности. При этом точки, лежащие между линиями каркаса, определяются приближенно



# КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## По способу задания

- аналитические;
- кинематические;
- скульптурные

## По закону движения образующей

- с поступательным движением образующей;
- с вращательным движением образующей;
- с винтовым движением образующей

## По виду образующей

- поверхности с прямолинейной образующей или линейчатые поверхности;
- поверхности с криволинейной образующей

## По закону изменения формы образующей

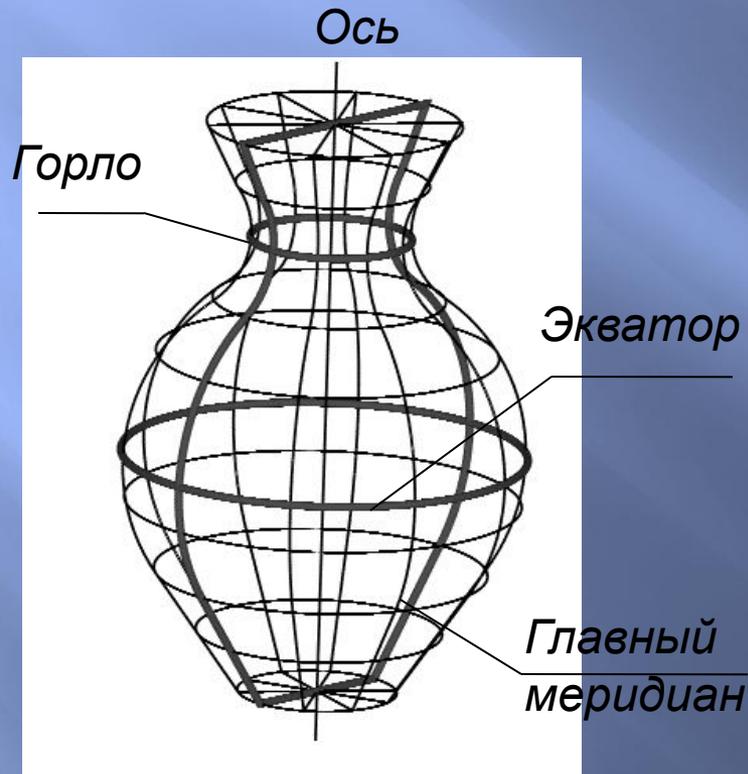
- поверхности с образующей постоянного вида;
- поверхности с образующей переменного вида

## По признаку развертывания

- развертывающиеся поверхности – можно совместить с плоскостью без разрывов и складок;
- неразвертывающиеся – нельзя совместить с плоскостью без разрывов и складок

# ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

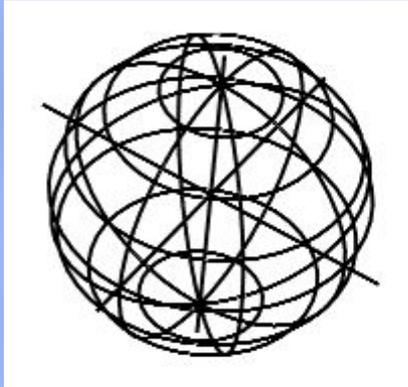
Поверхности вращения – поверхности, образованные вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси



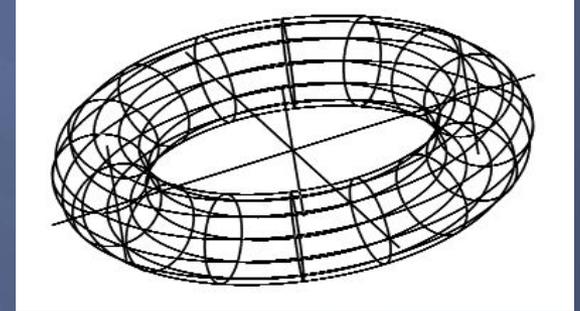
Представление поверхности вращения в виде сети

# ТОРОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

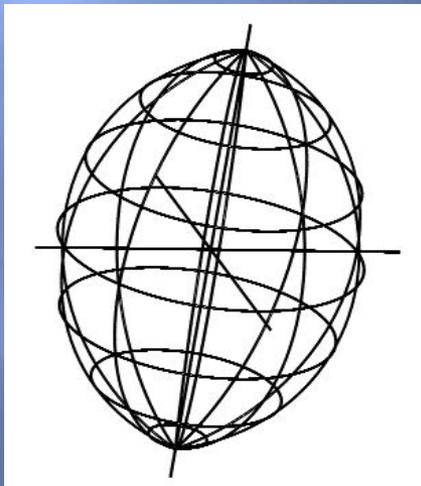
*Торовые поверхности* – поверхности, образованные вращением окружности или дуги окружности



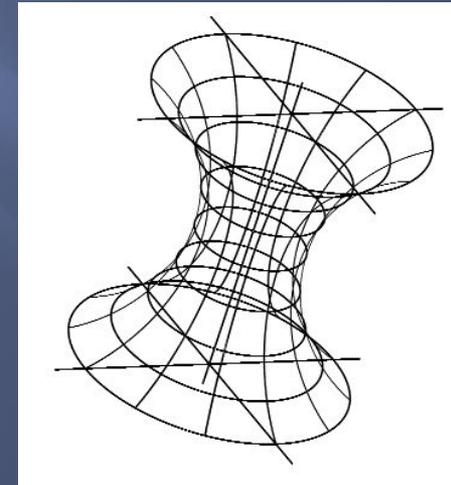
Сфера



Открытый тор



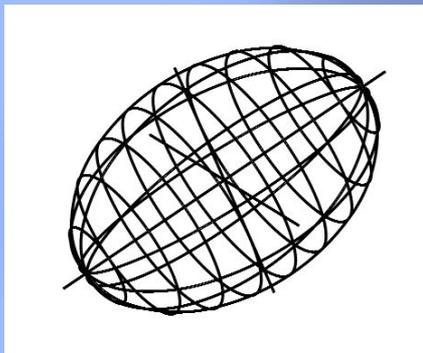
Закрытый тор



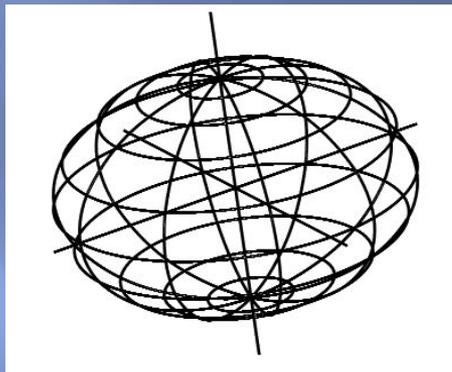
Глобoid

# Поверхности вращения

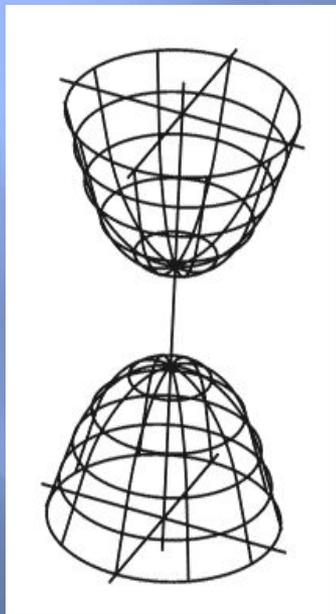
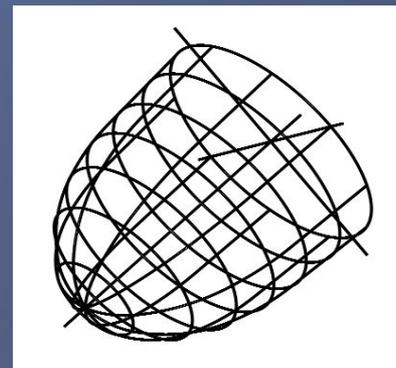
Эллипсоид



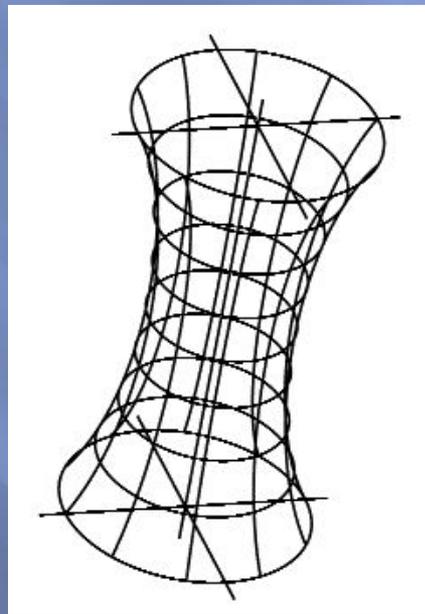
Сфероид



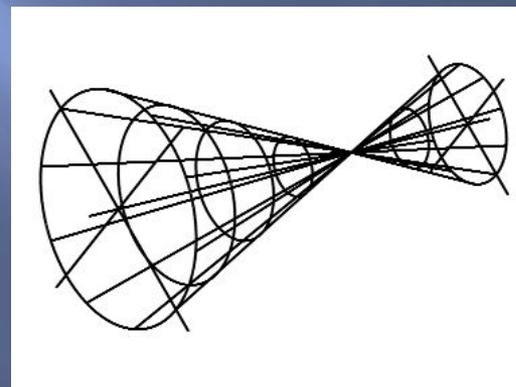
Параболоид



Двухполостной  
гиперболоид

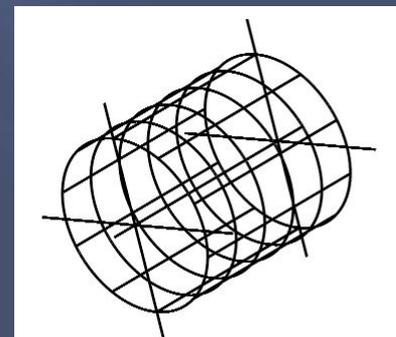


Однополостной  
гиперболоид



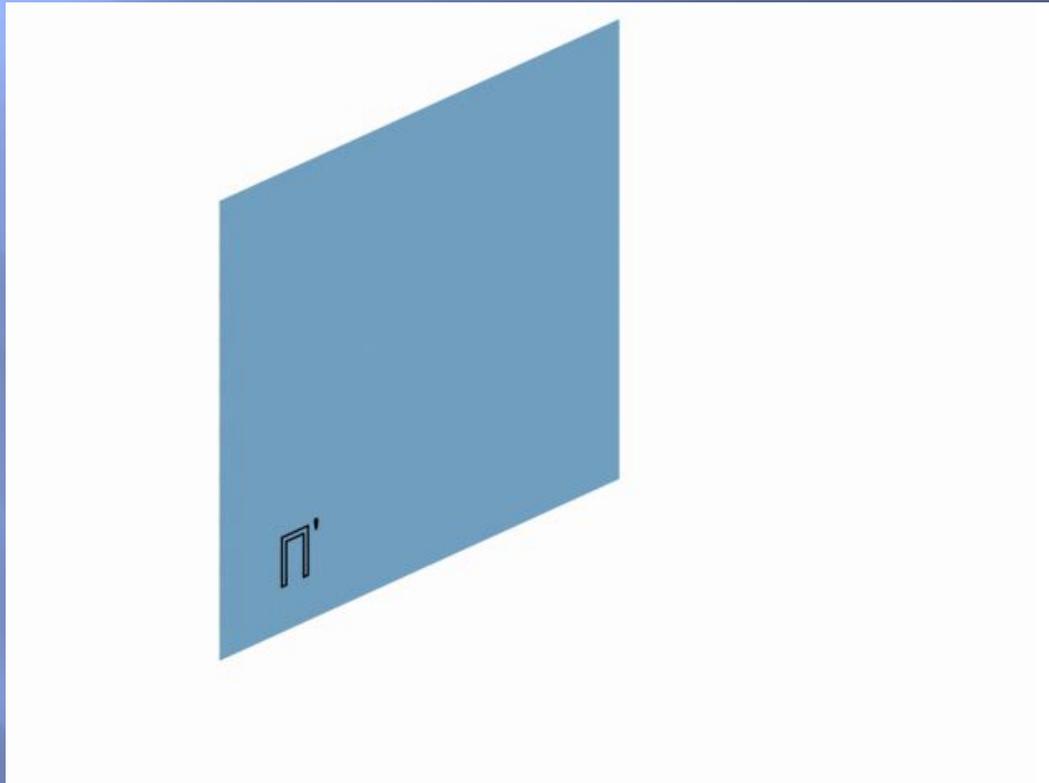
Конус

Цилиндр



# ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

На комплексном чертеже изображается очерк поверхности, а также наиболее важные линии и точки на поверхности

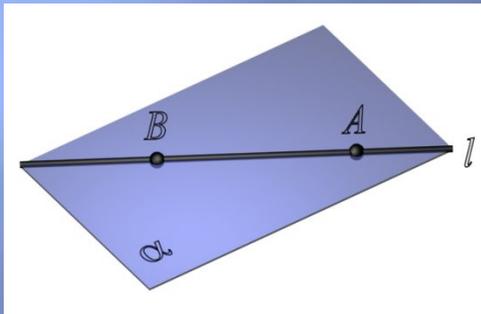


Точки касания поверхности и проецирующих лучей образуют линию  $l$ , называемую контурной линией. Совокупность проецирующих лучей образует проецирующую цилиндрическую поверхность, проекция которой и представляет собой очерк  $l'$  данной поверхности.

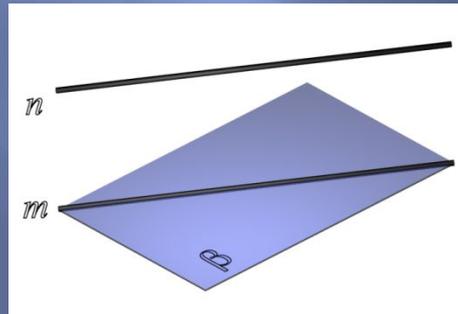
# ЛЕКЦИЯ 5. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Относительное положение прямой и плоскости

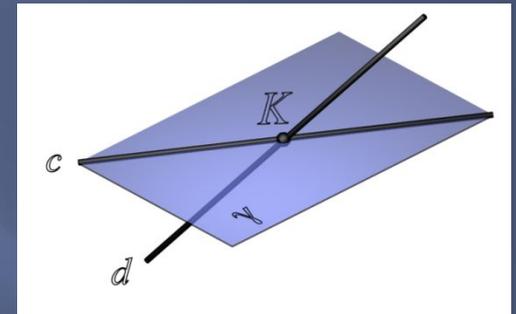
Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:



Прямая  $l$  лежит в  
плоскости



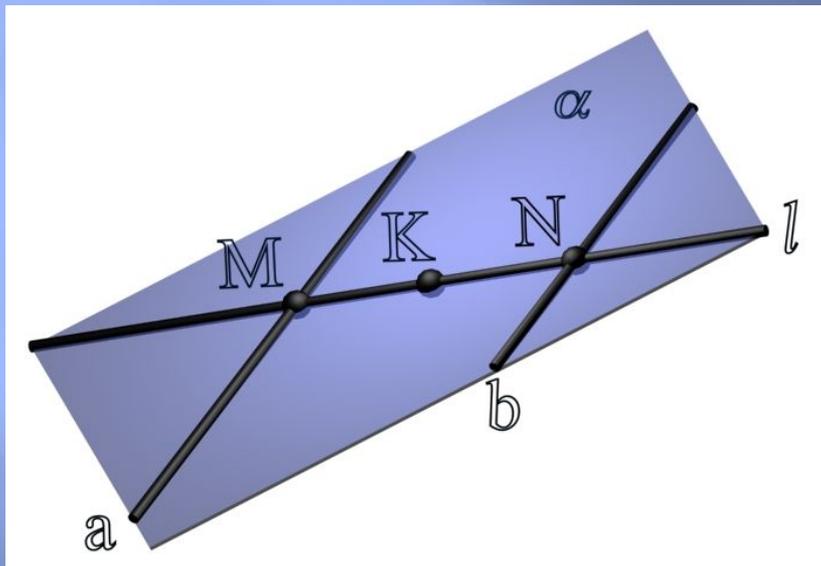
Прямая  $n$  параллельна  
плоскости



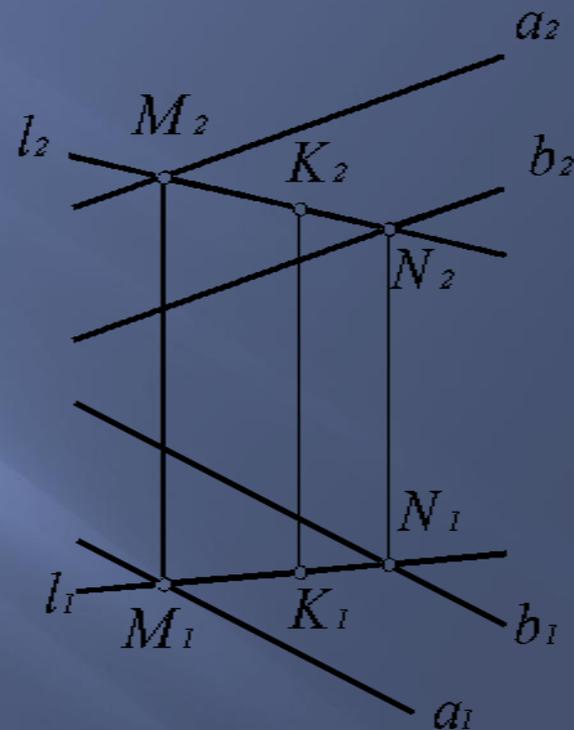
Прямая  $d$  пересекается с  
плоскостью

# ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

Прямая линия принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости



Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

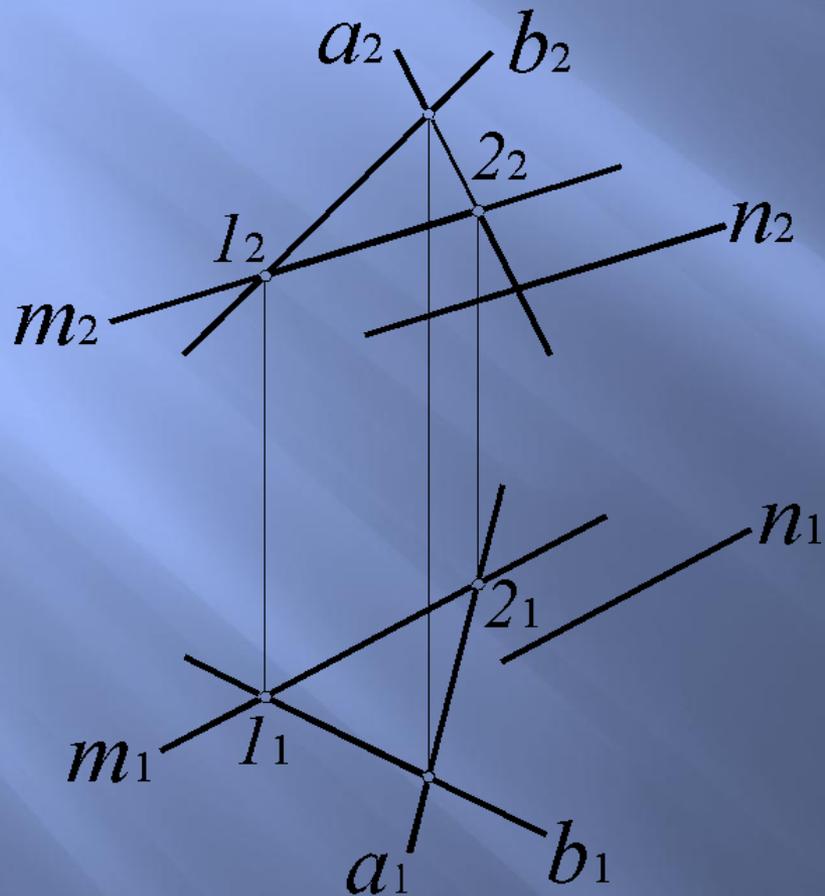


$$\left. \begin{array}{l} M \in \alpha(a \parallel b) \\ N \in \alpha(a \parallel b) \end{array} \right\} \Rightarrow l(MN) \subset \alpha(a \parallel b)$$

$$K \in l(MN) \Rightarrow K \in \alpha(a \parallel b)$$

# ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

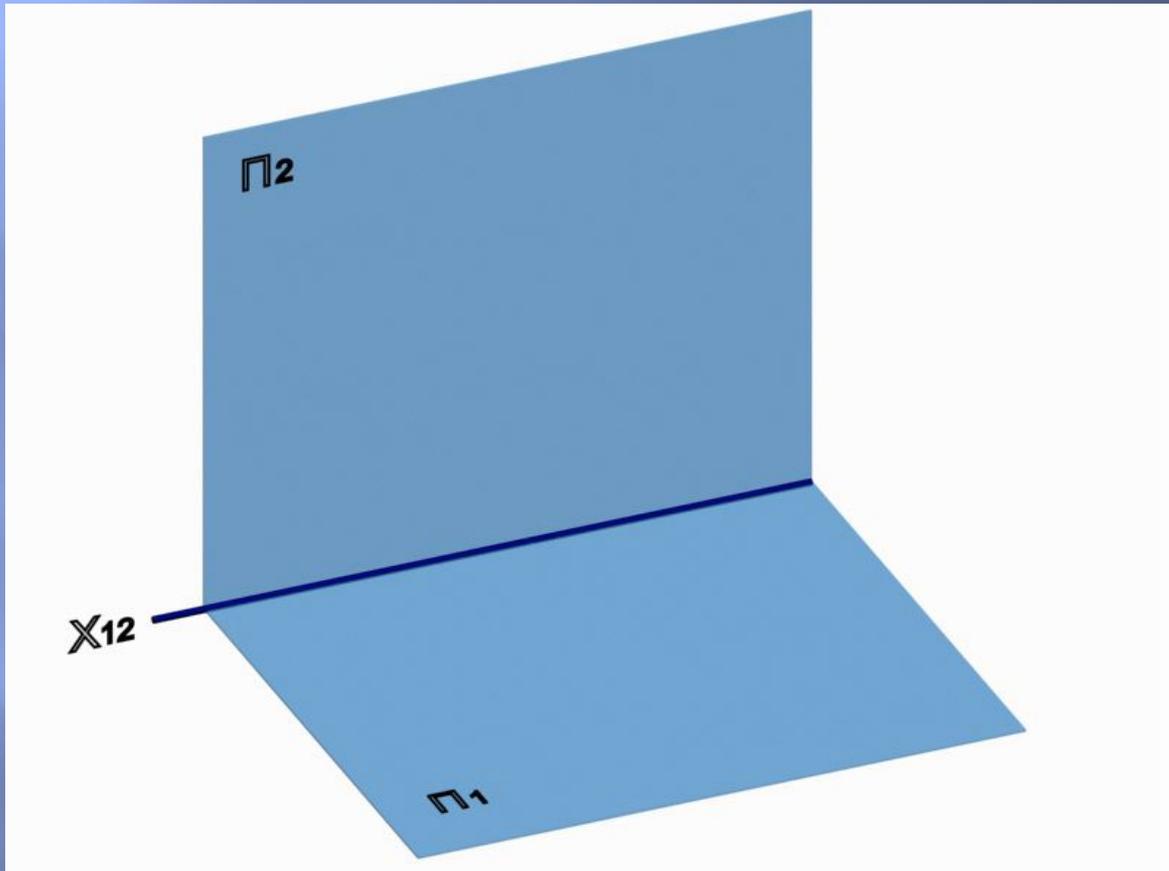


$$m \in \alpha(a \times b) \begin{cases} 1 \in b \Rightarrow 1 \in \alpha(a \times b) \\ 2 \in a \Rightarrow 2 \in \alpha(a \times b) \end{cases}$$

$$n \parallel m \begin{cases} n_1 \parallel m_1 \\ n_2 \parallel m_2 \end{cases} \Rightarrow n \parallel \alpha(a \times b)$$

# ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

Прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций, называются линиями уровня плоскости.

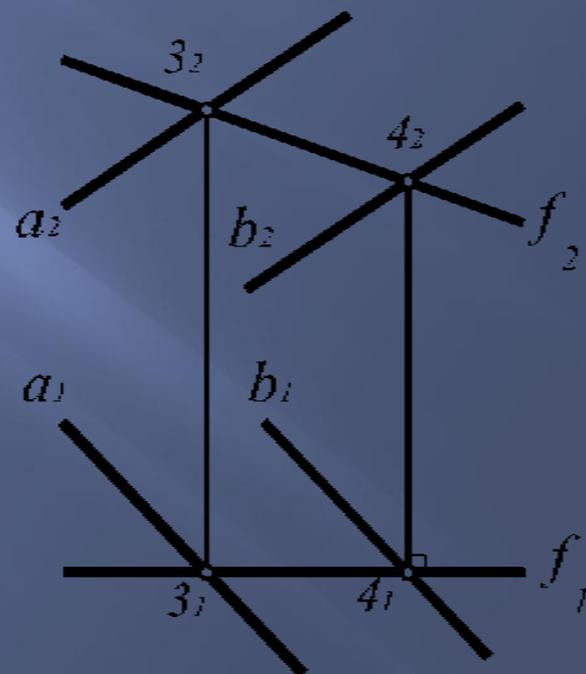
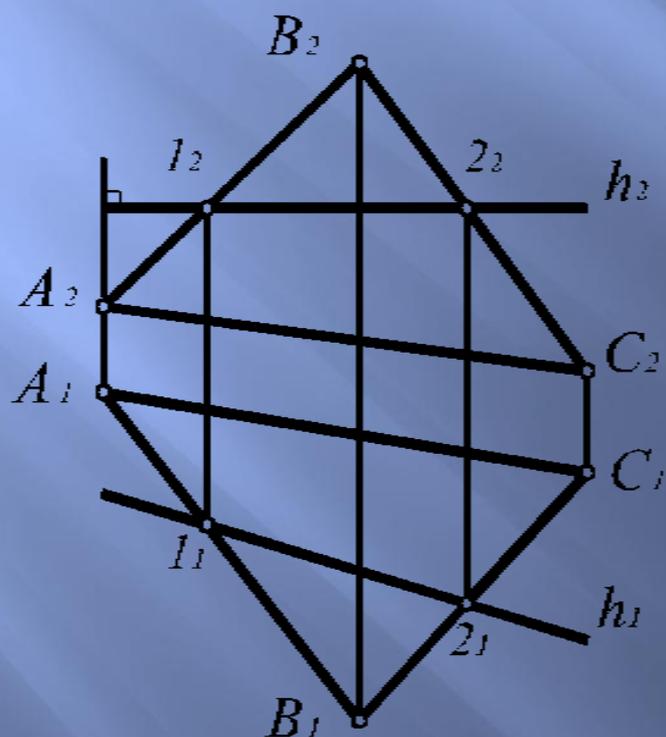


Прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ , называется горизонталью плоскости. Все горизонтали плоскости параллельны между собой.

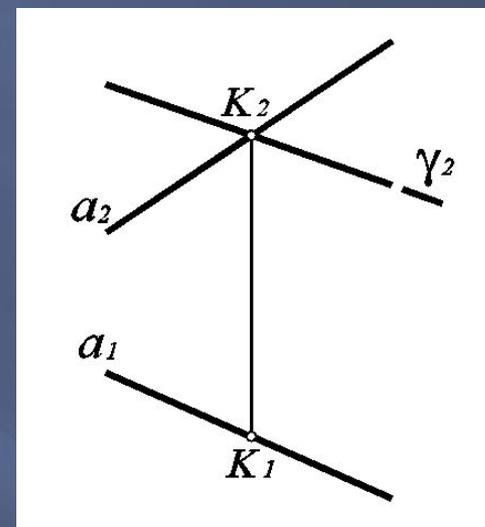
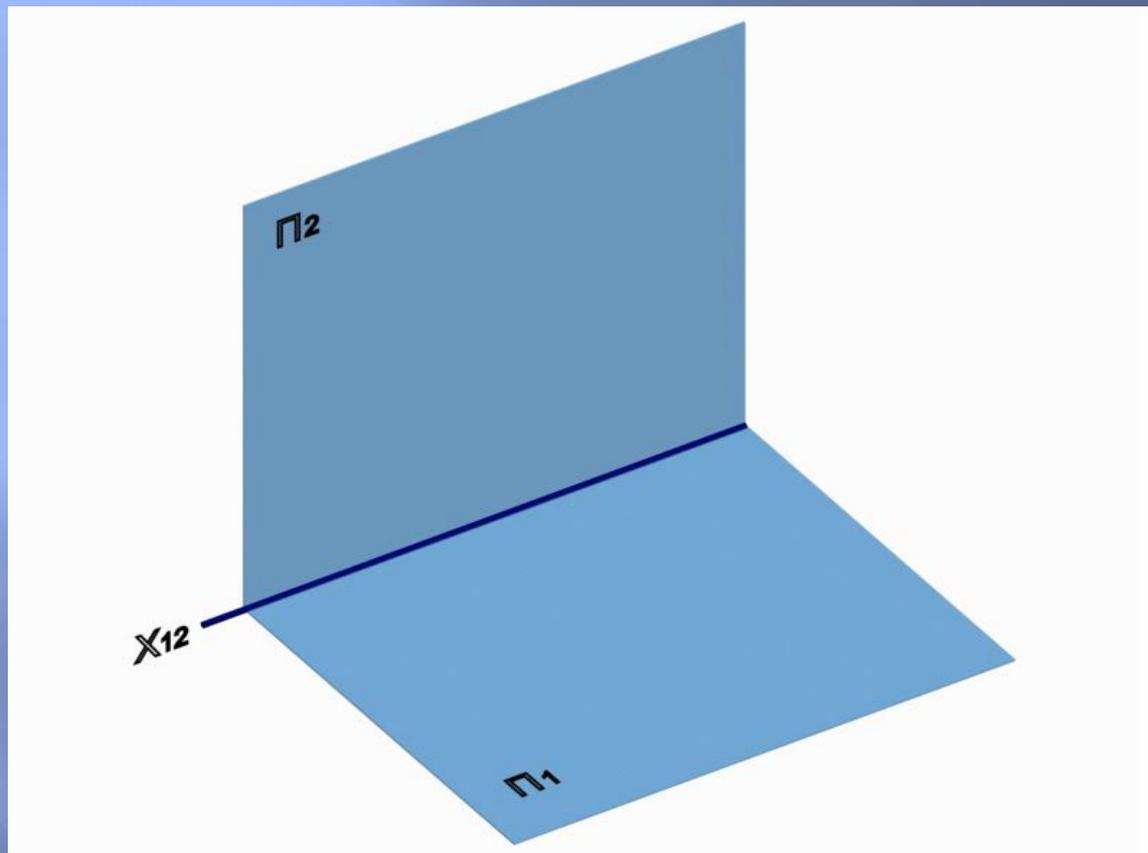
# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Горизонталь плоскости  $\alpha(ABC)$

Фронталь плоскости  $\beta(a/b)$

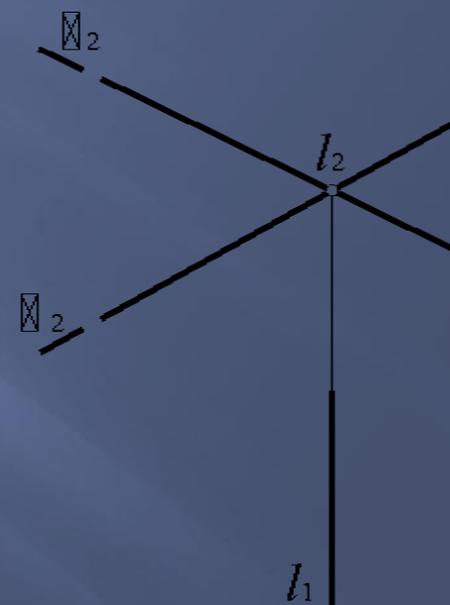
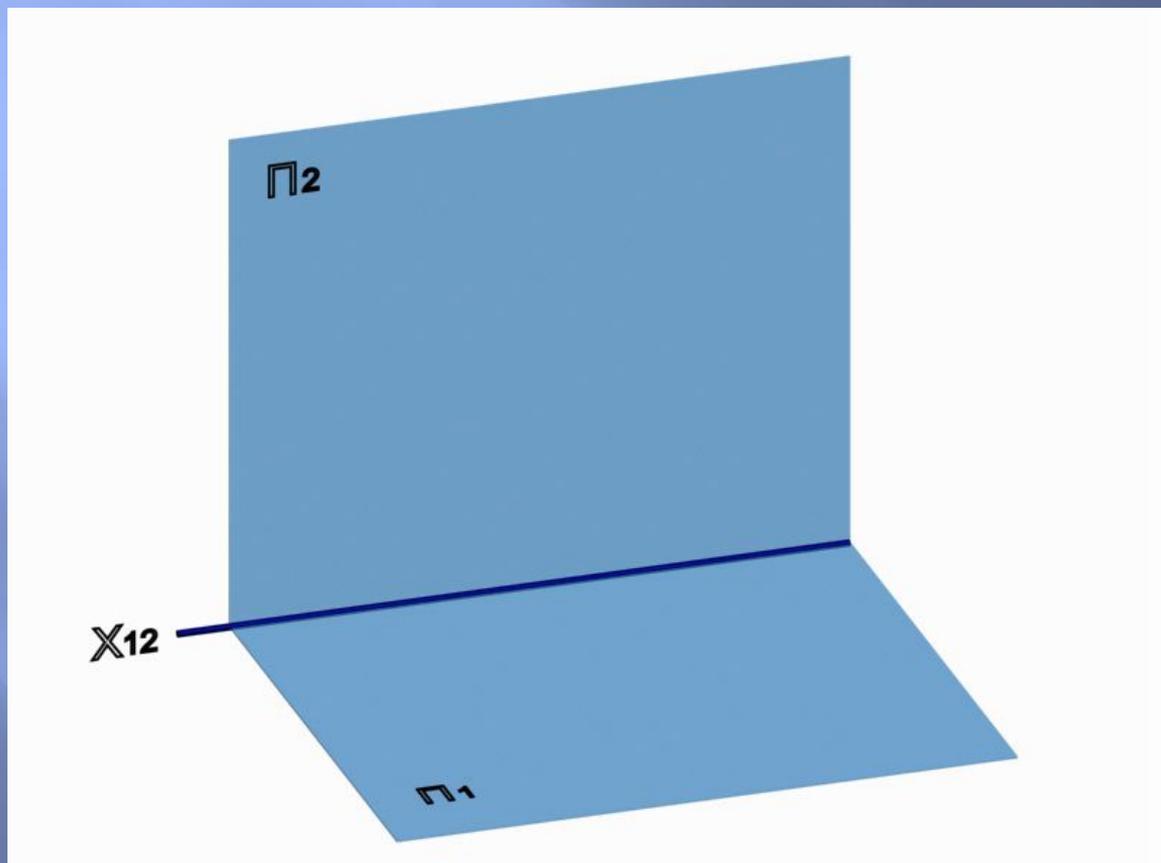


# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ И ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ



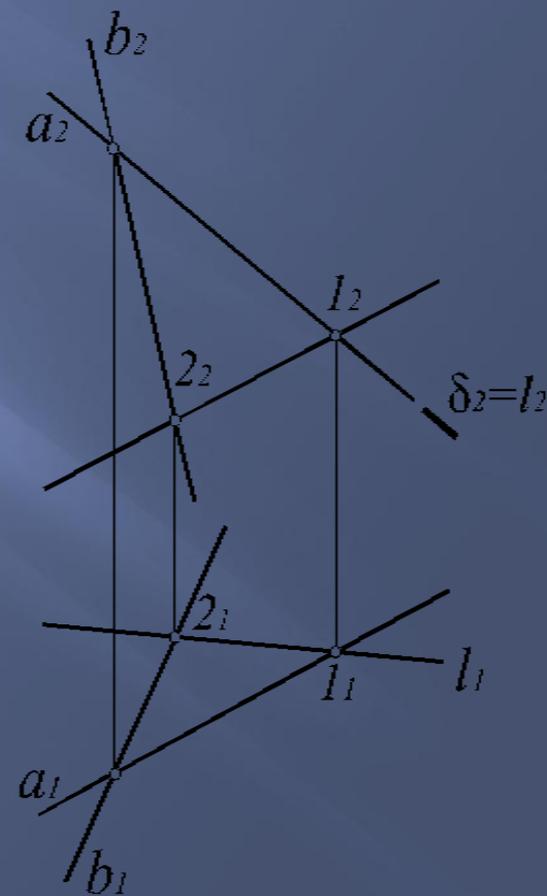
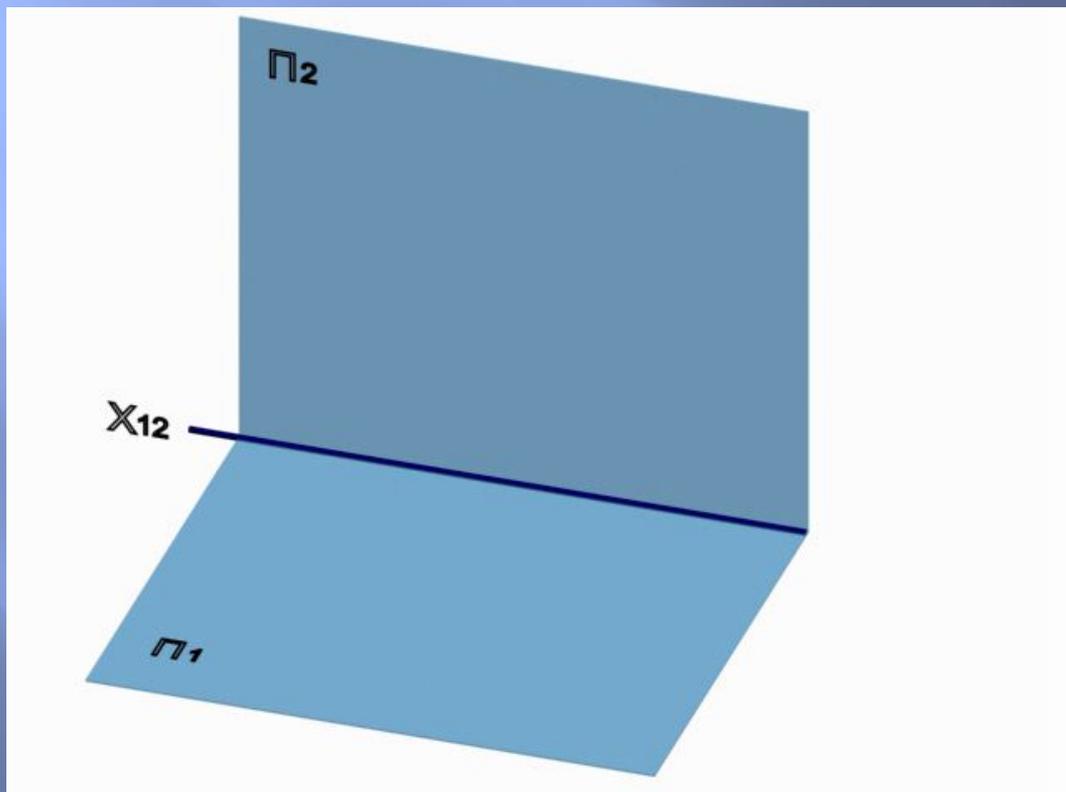
# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Линией пересечения двух фронтально-проецирующих плоскостей  $\delta(\delta_2)$  и  $\sigma(\sigma_2)$  является фронтально-проецирующая прямая  $l$ .



# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ И ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

В данном случае, достаточно определить точки пересечения прямых  $a$  и  $b$  с плоскостью  $\delta(\delta_2)$ . Они однозначно определяют линию пересечения  $l$ .



# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ И ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ. ПЕРВАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА



**Дано:**

$\alpha(ABC)$  – плоскость общего положения;

$a(a_1, a_2)$  – прямая общего положения.

**Определить:**

$K = a \times \alpha(ABC)$ .

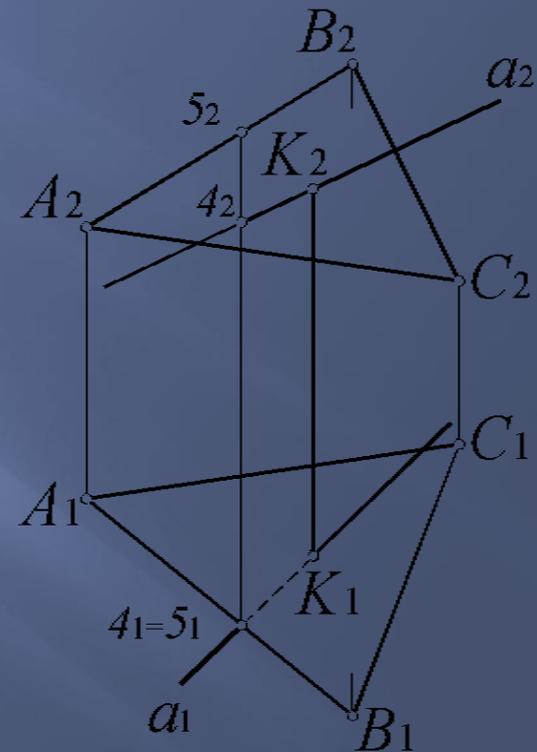
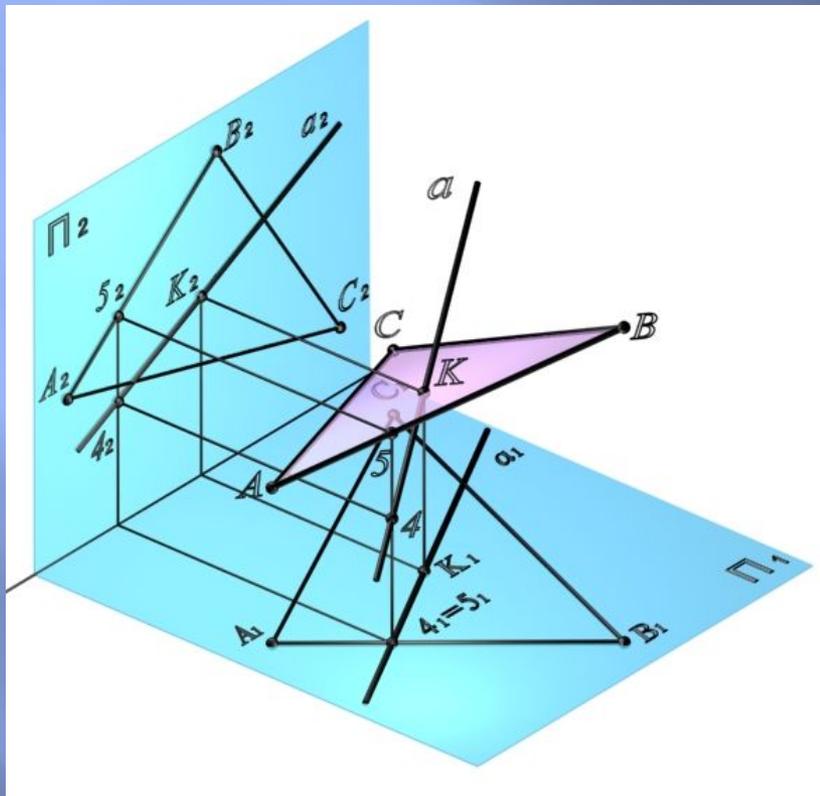
**Решение:**

1. Прямую заключить во вспомогательную плоскость частного положения:  $a \in \beta$ .
2. Определить линию  $l$  как линию пересечения вспомогательной и заданной плоскостей  $l = \alpha(ABC) \cap \beta$ .
3. Определить точку пересечения  $K = a \times l$ , которая является искомой точкой пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha(ABC)$ .



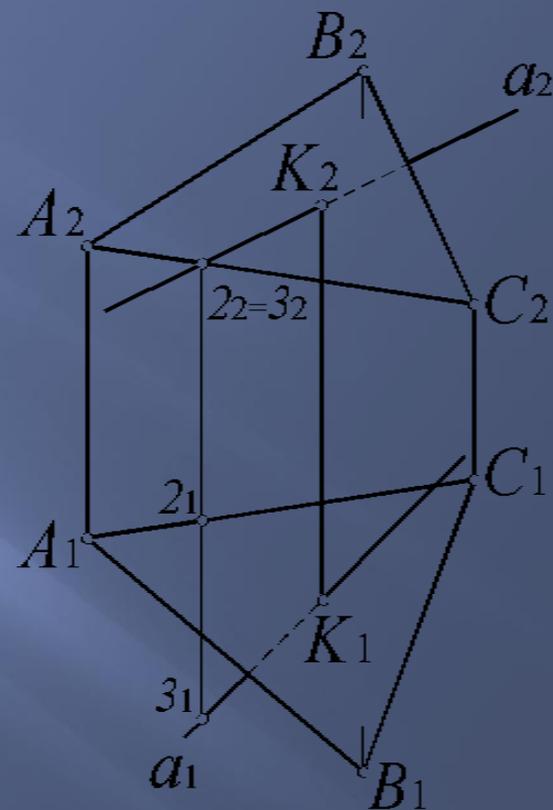
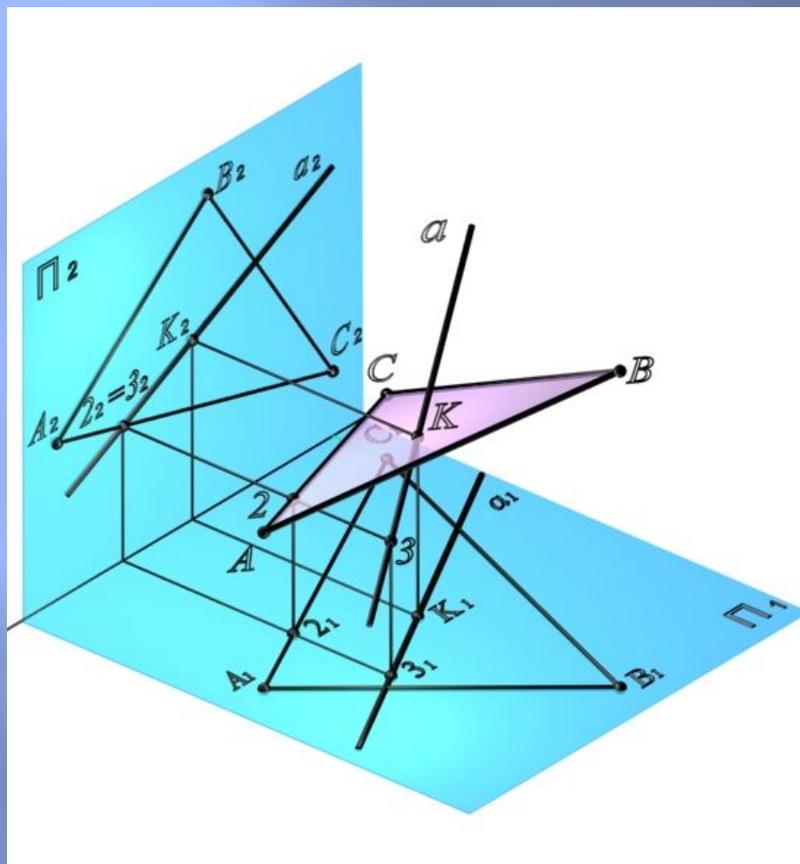
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ. МЕТОД КОНКУРИРУЮЩИХ ТОЧЕК

Определение видимости относительно горизонтальной плоскости проекций:



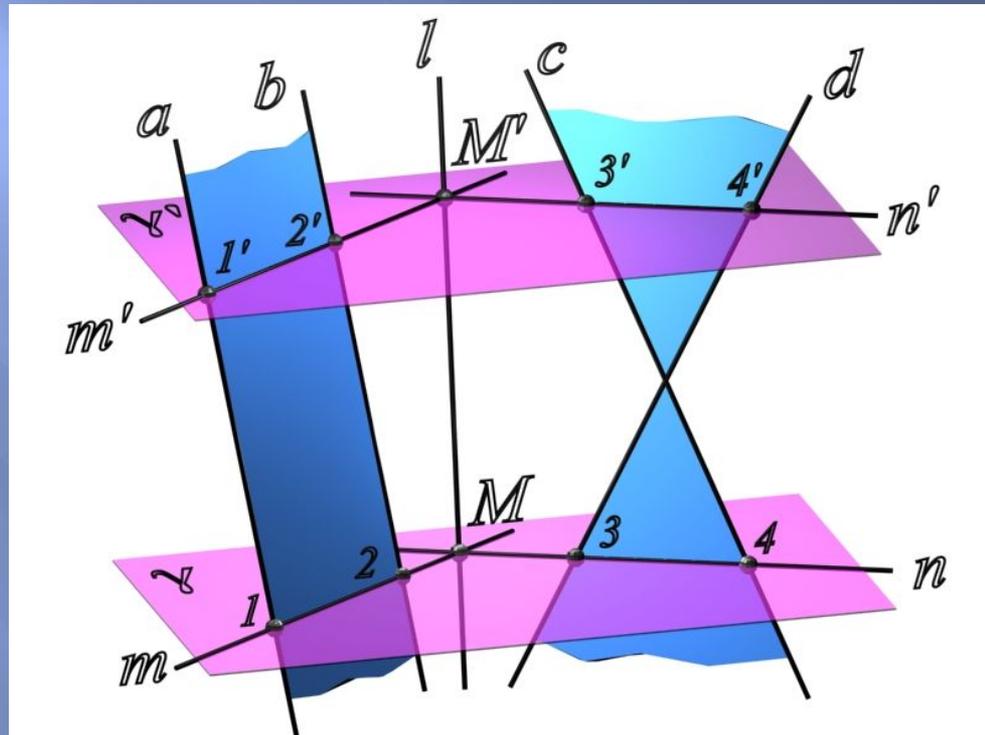
Точки, конкурирующие на  $\Pi_1$ : 4 – на прямой  $a$  и 5 – на прямой  $(AB)$ . Высота точки 5 больше, следовательно, на  $\Pi_1$  видима прямая  $(AB)$ , то есть плоскость, а прямая  $a$  – невидима.

## Определение видимости относительно фронтальной плоскости проекций:



Точки, конкурирующие на  $\Pi_2$  : 2 – на прямой  $(AC)$  и 3 – на прямой  $a$ .  
Глубина точки 3 больше, следовательно, видима будет прямая  $a$ .

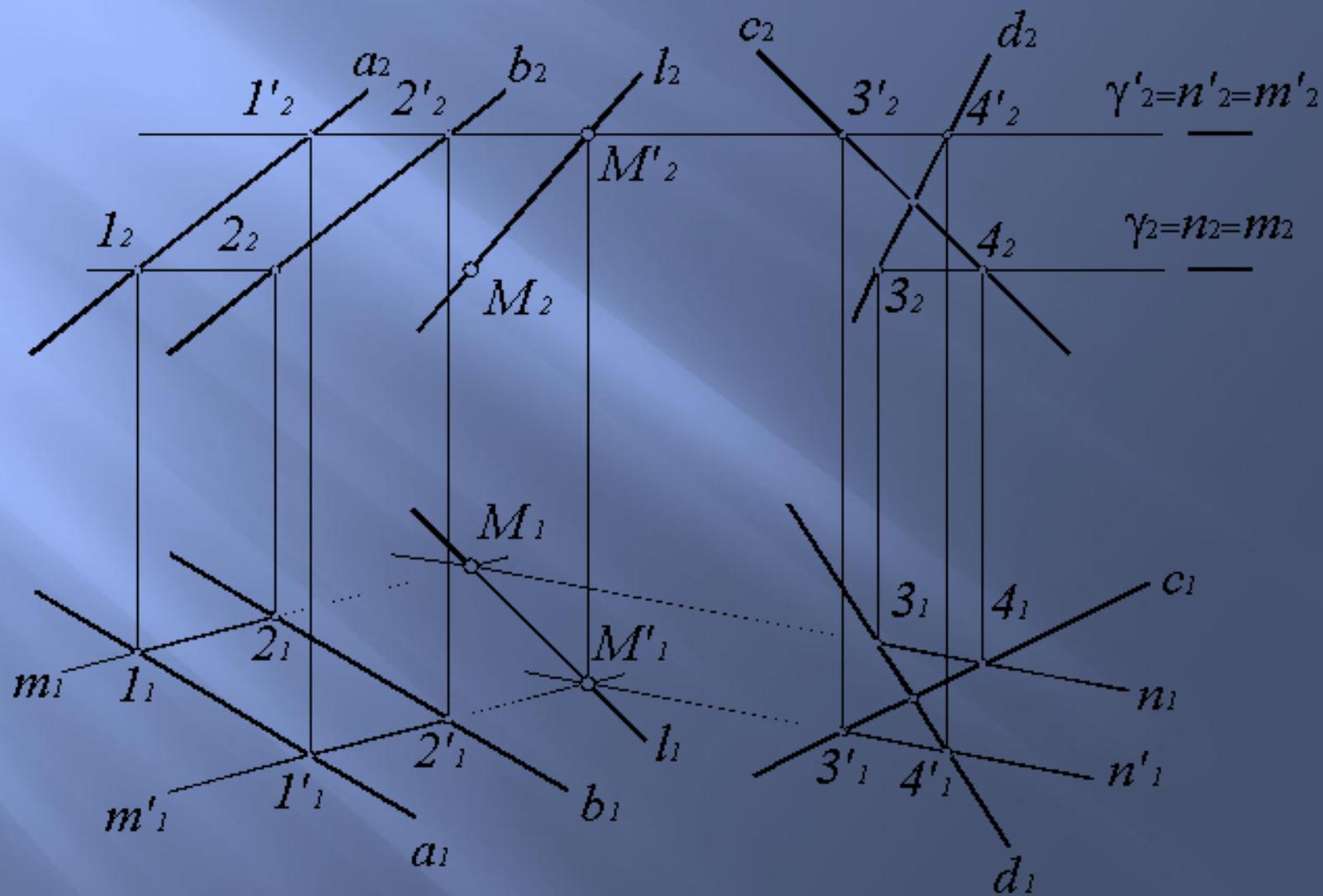
# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ. ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА



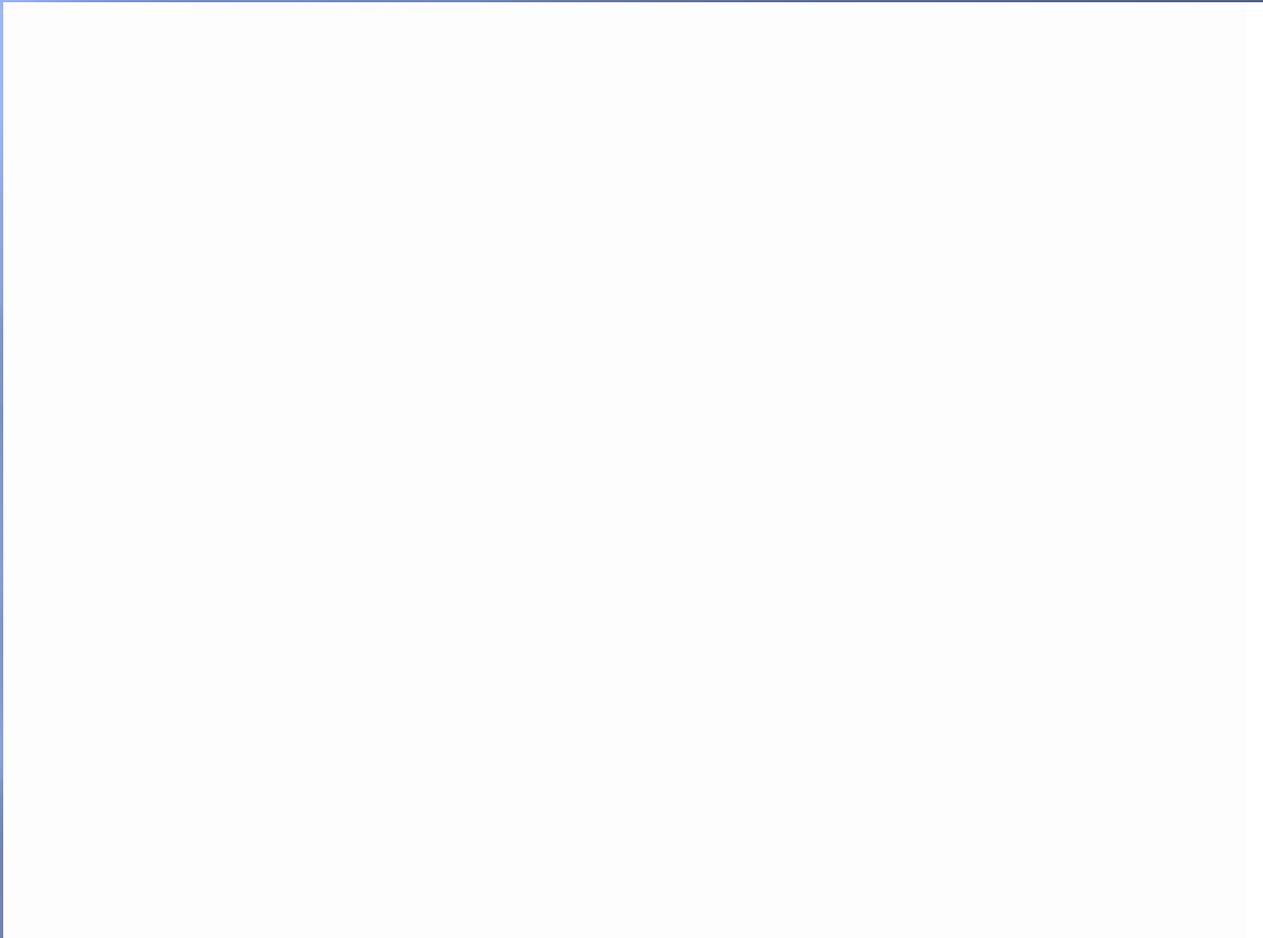
Решение:

1. Заданные плоскости  $\alpha(a||b)$  и  $\beta(c \times d)$  пересечь вспомогательной плоскостью частного положения  $\gamma$ .
2. Определить линии пересечения  $m$  и  $n$  вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей:  $m = \gamma \cap \alpha(a||b)$  и  $n = \gamma \cap \beta(c \times d)$ .
3. Определить точку  $M$  пересечения линий  $m$  и  $n$ .
4. Аналогично определить вторую точку линии пересечения.

# РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ



# ЛЕКЦИЯ 6. ТОЧКА НА ПОВЕРХНОСТИ

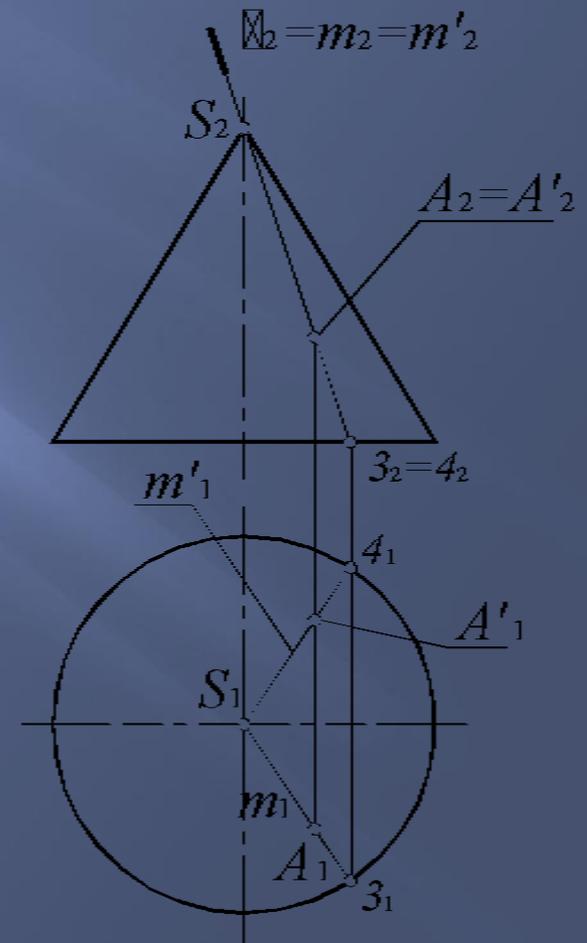
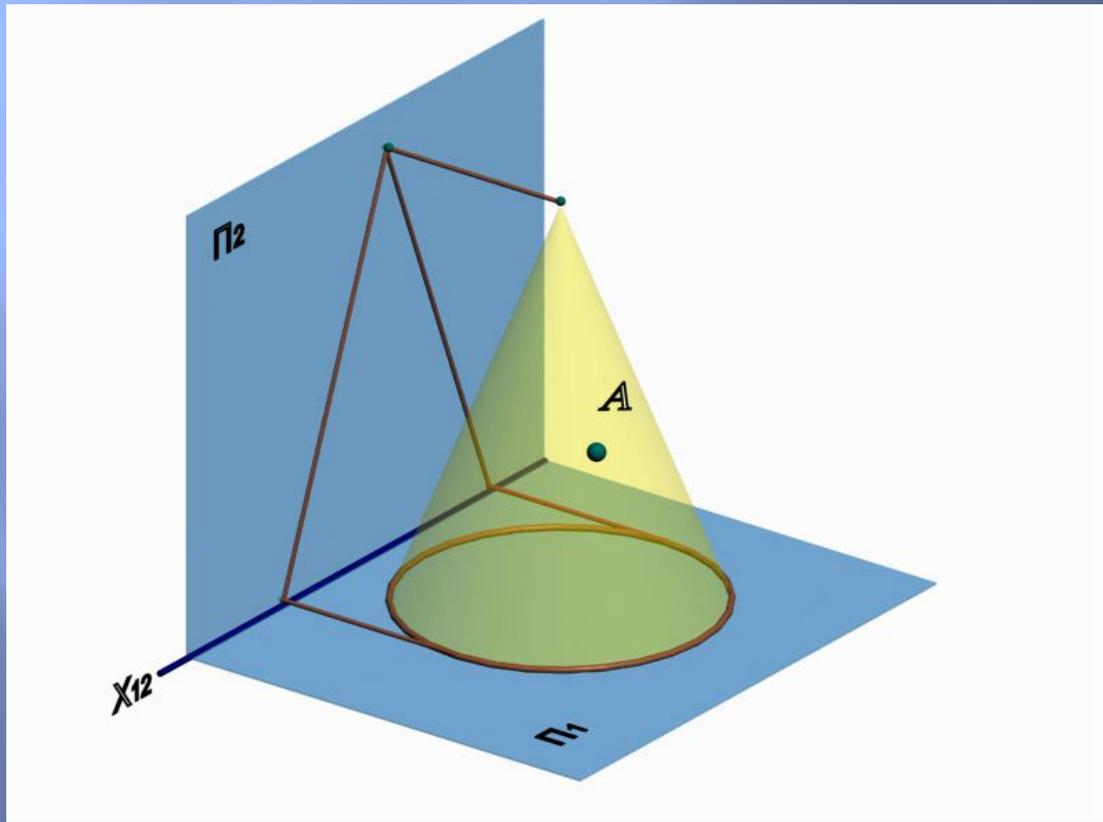


$$l \in \Phi_{сф} \quad A \in l \Rightarrow A \in \Phi_{сф}$$

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии на этой поверхности

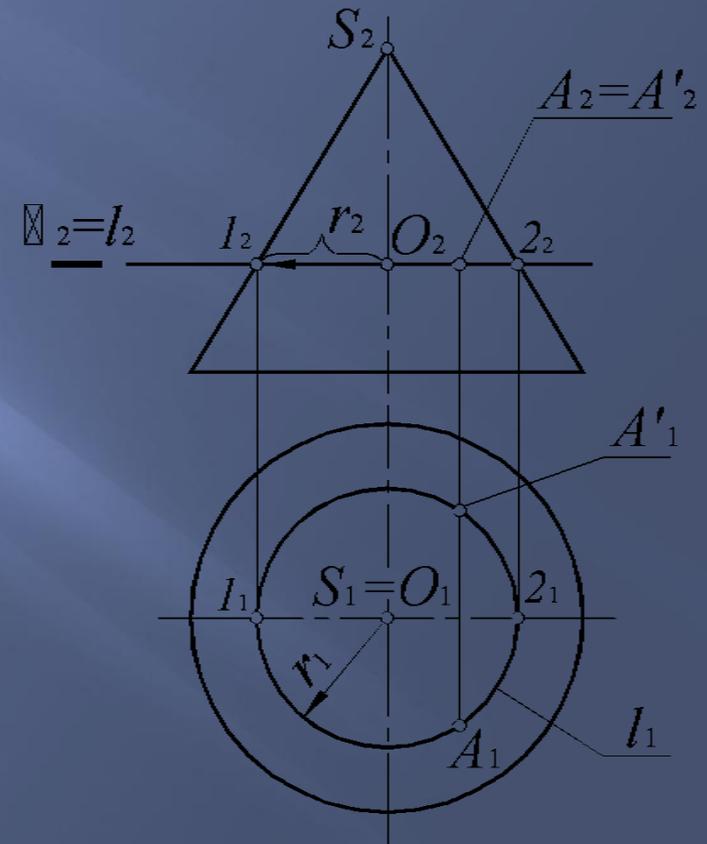
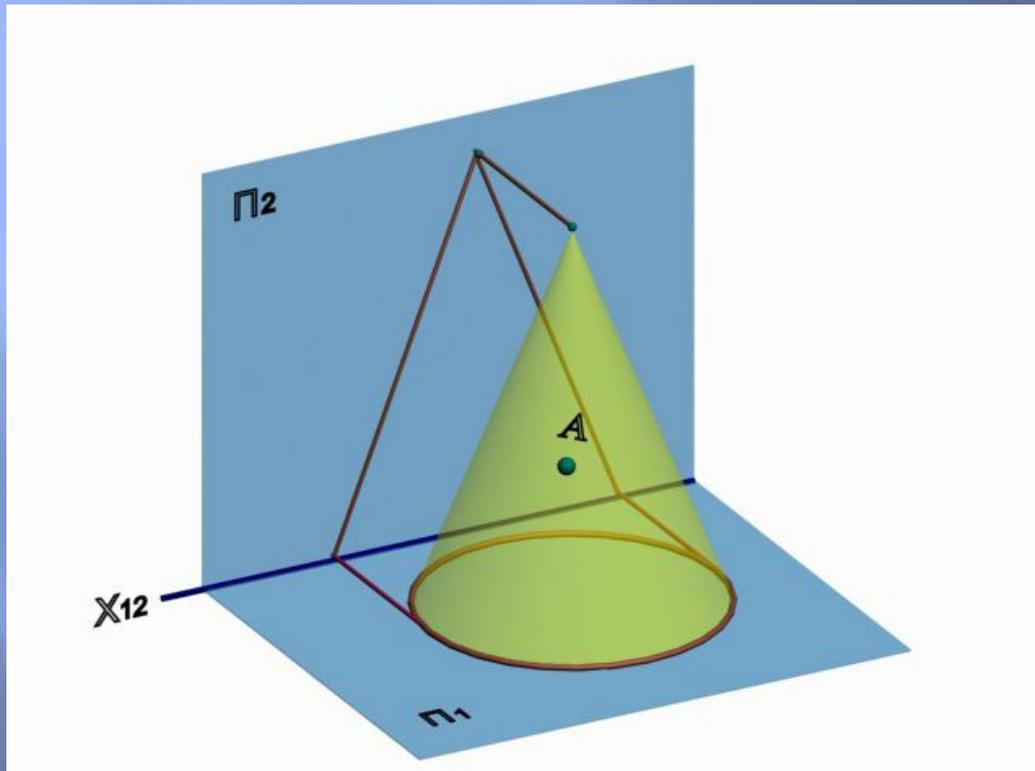
# ТОЧКА НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

На поверхности конуса можно получить как окружности, так и прямые линии. В сечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, получаются прямые линии

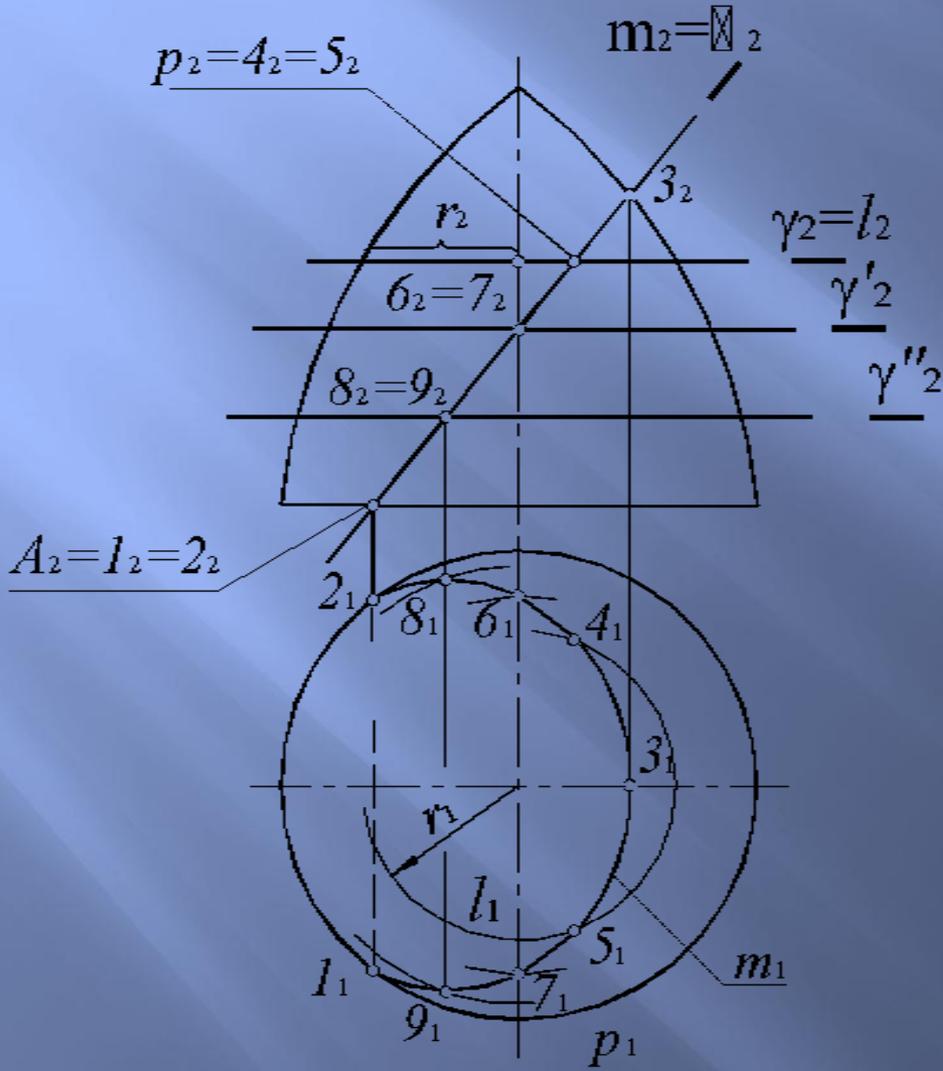


# ТОЧКА НА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

В сечении конуса плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность.



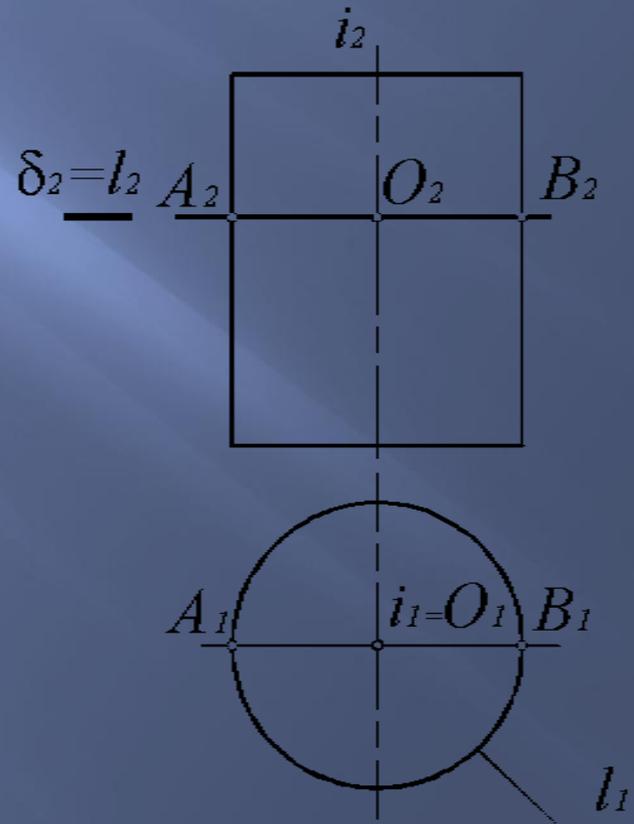
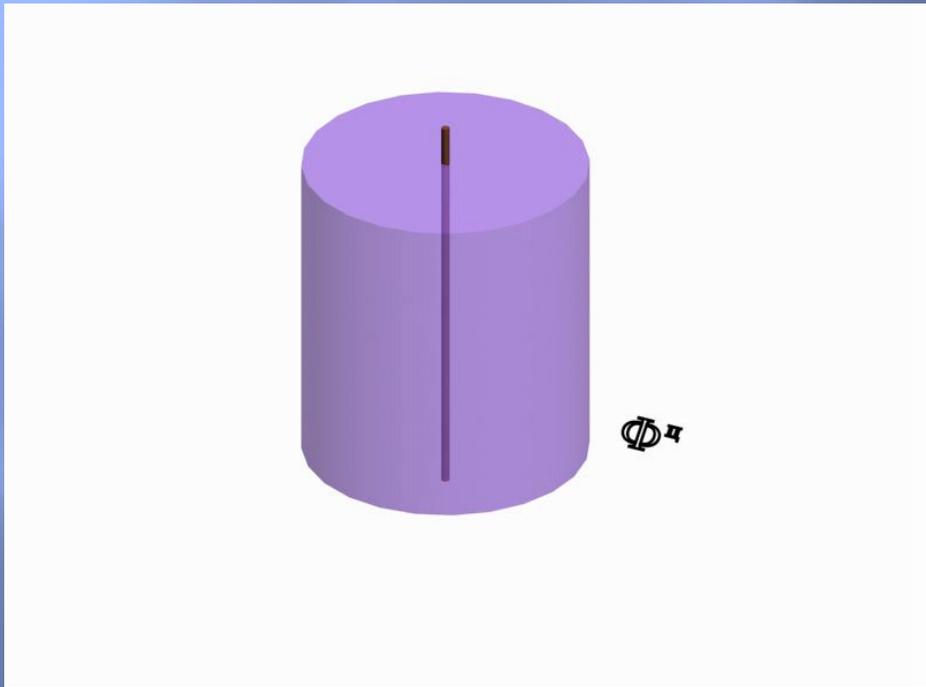
# СЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ



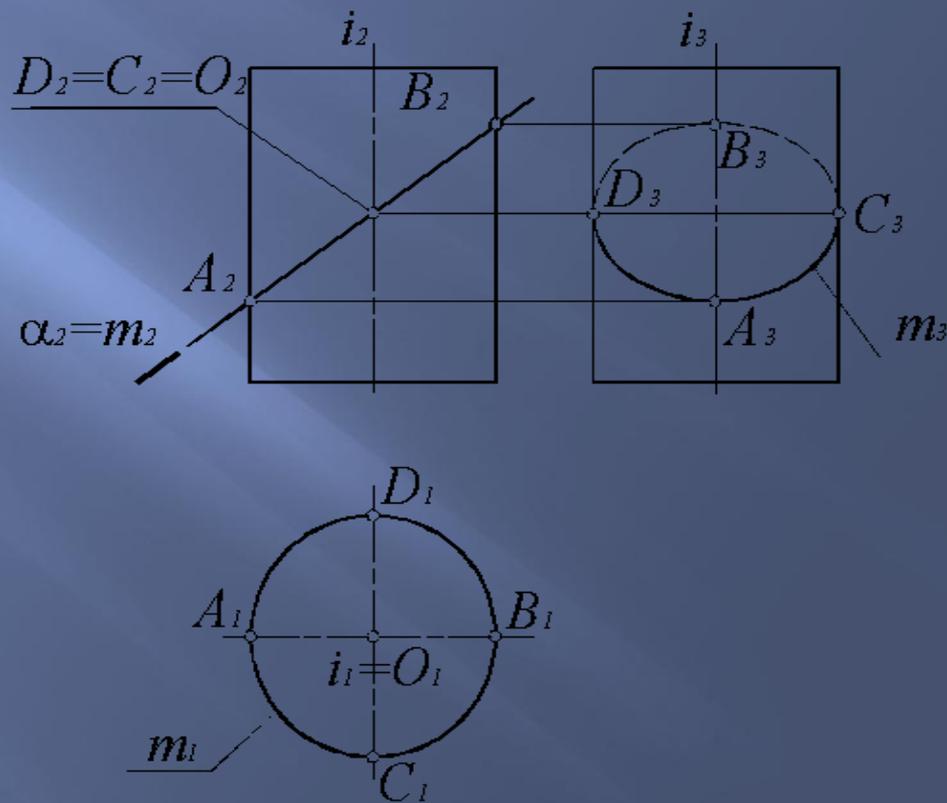
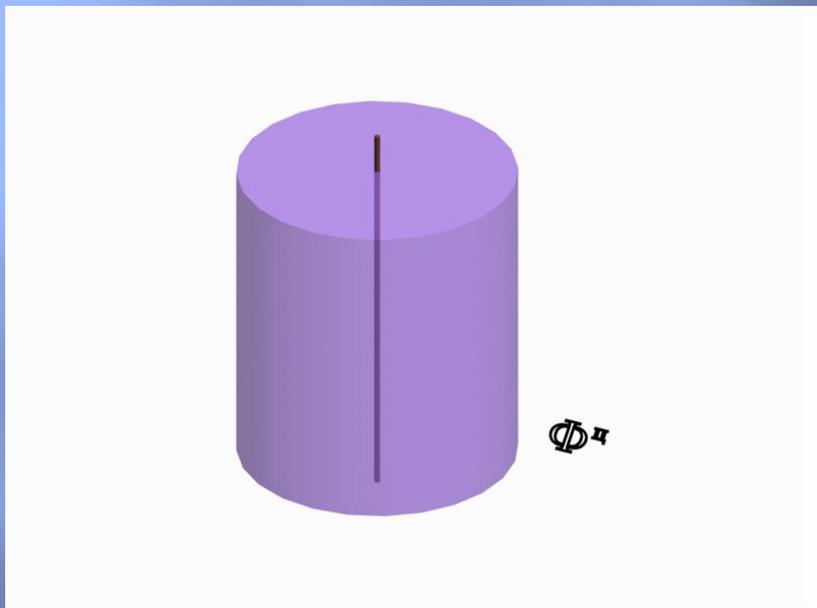
Точки линии сечения определяют с помощью вспомогательных плоскостей уровня.

# ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

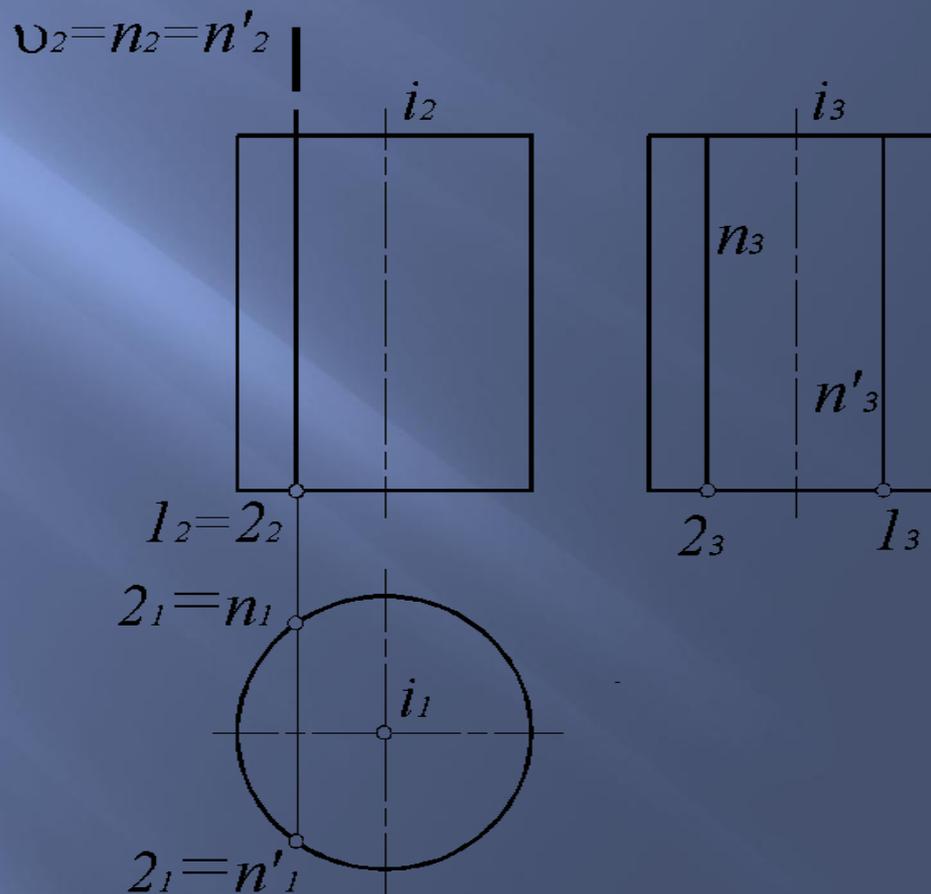
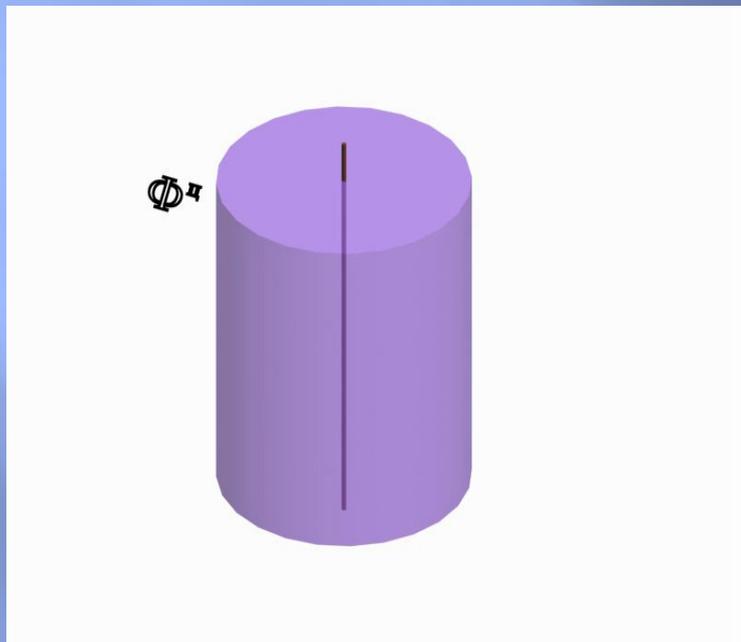
В сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность.



В сечении цилиндра плоскостью, наклоненной к оси вращения, получается эллипс.

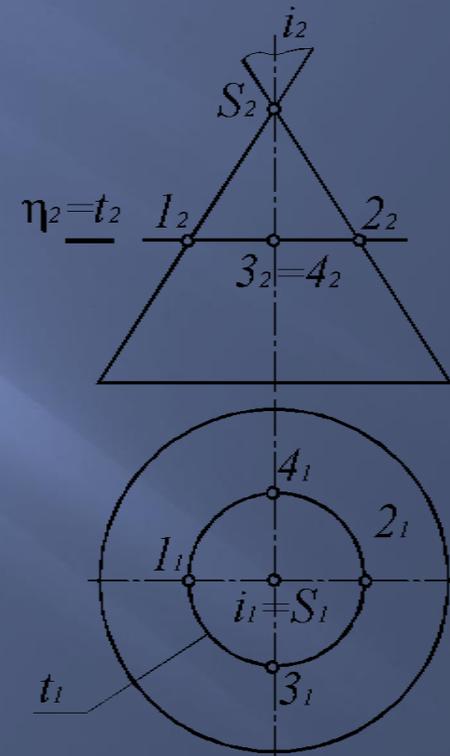
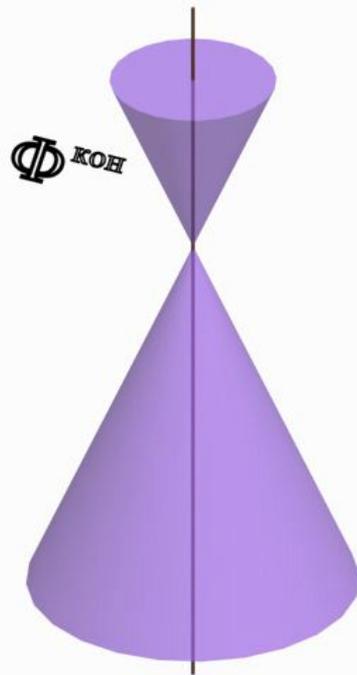


В сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси вращения, получаются параллельные прямые.

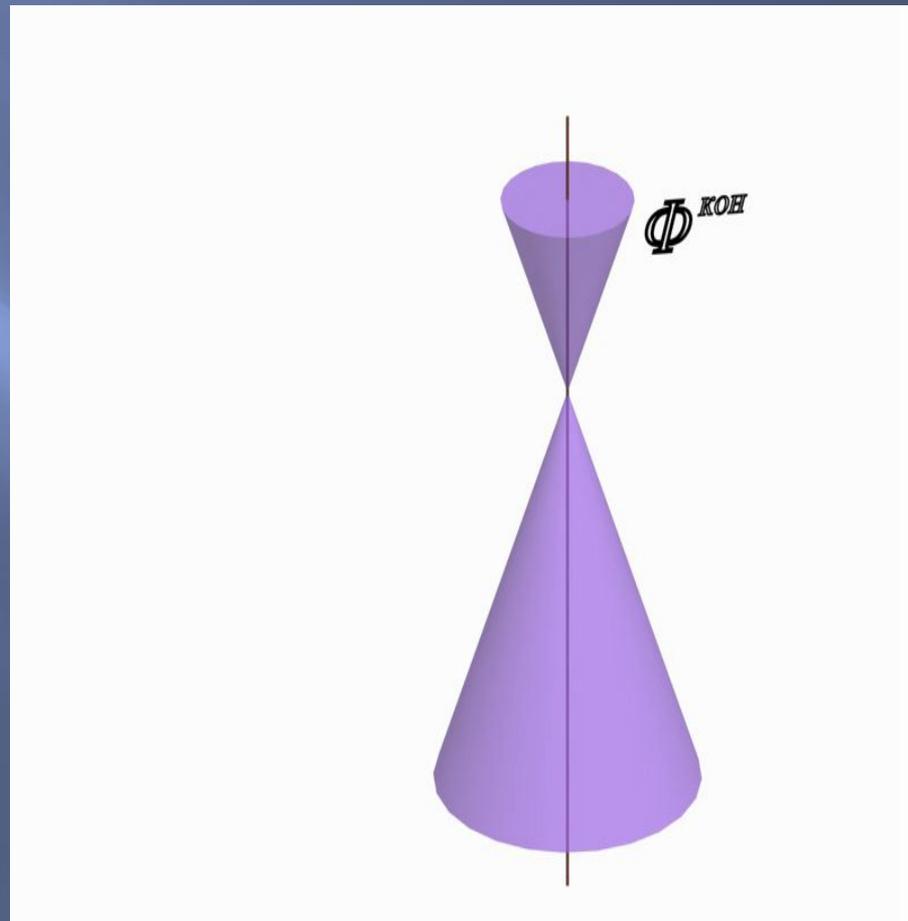
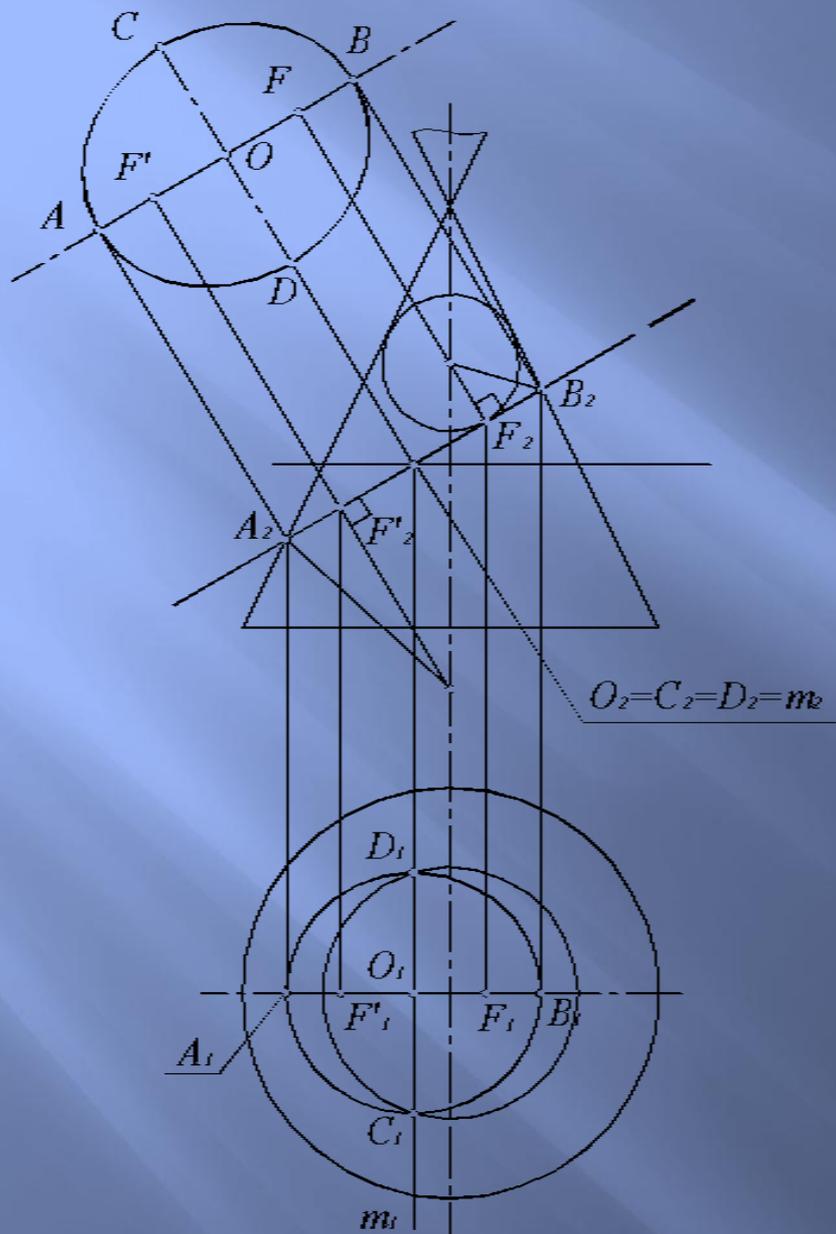


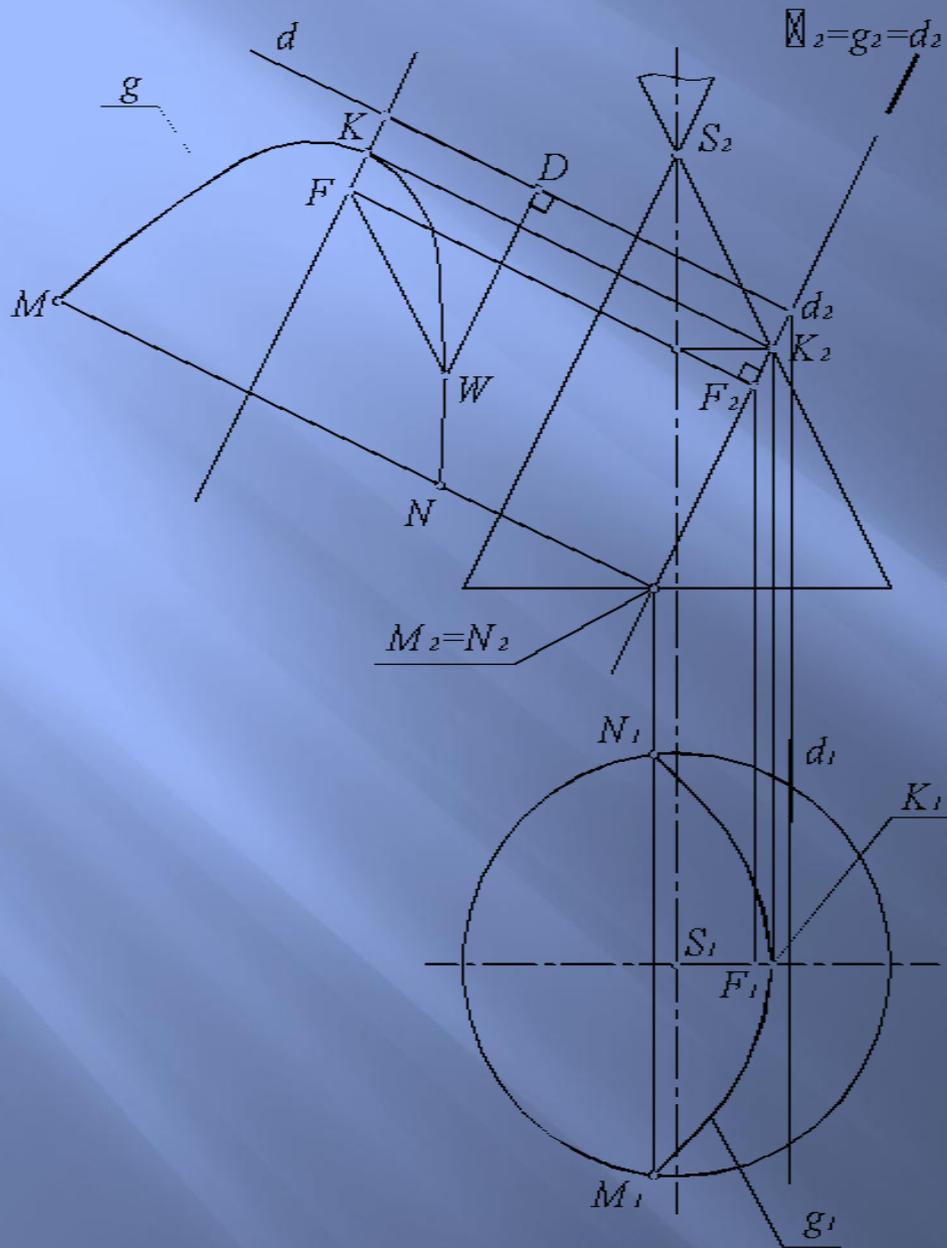
# КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

В сечении конуса плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получается окружность.

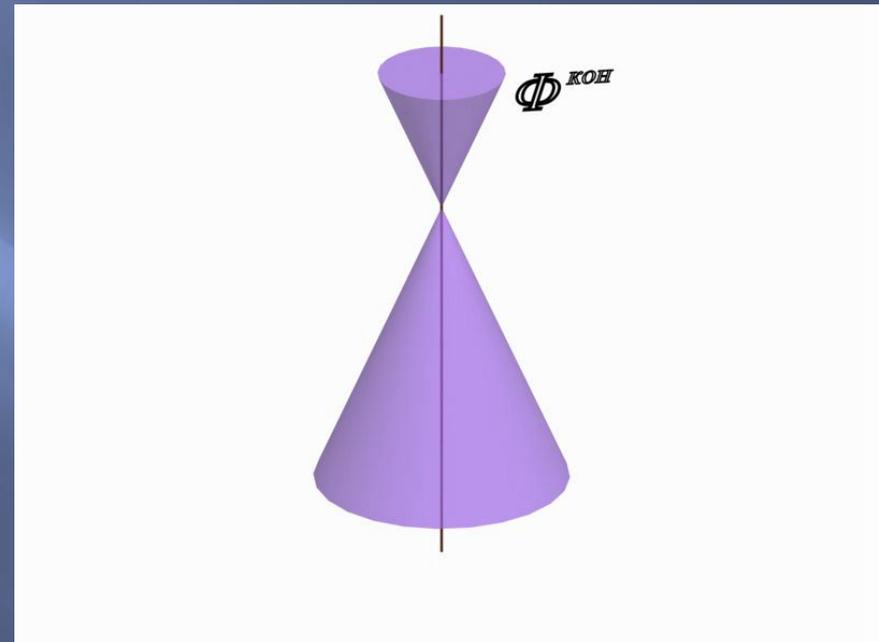


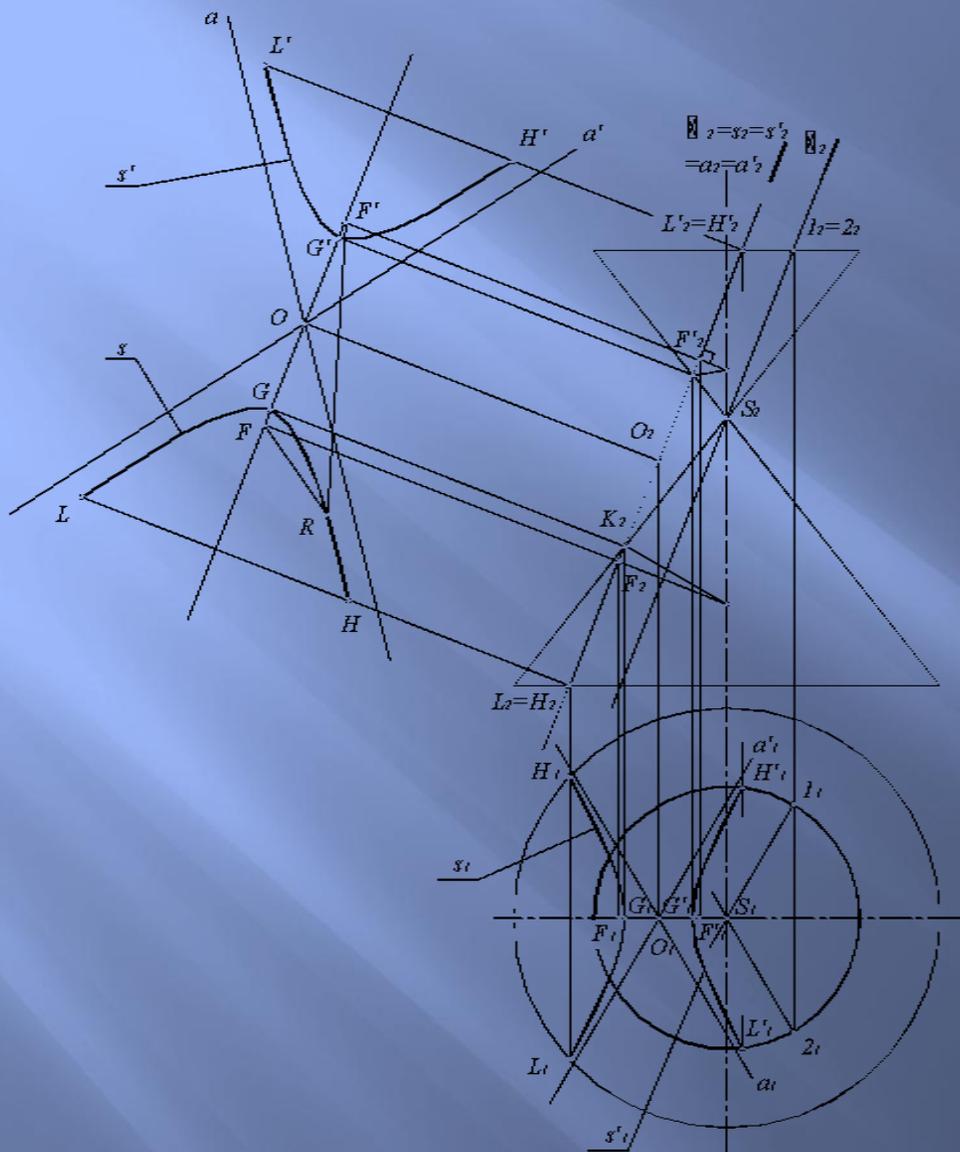
В сечении конуса плоскостью, наклоненной к оси вращения, получается эллипс.



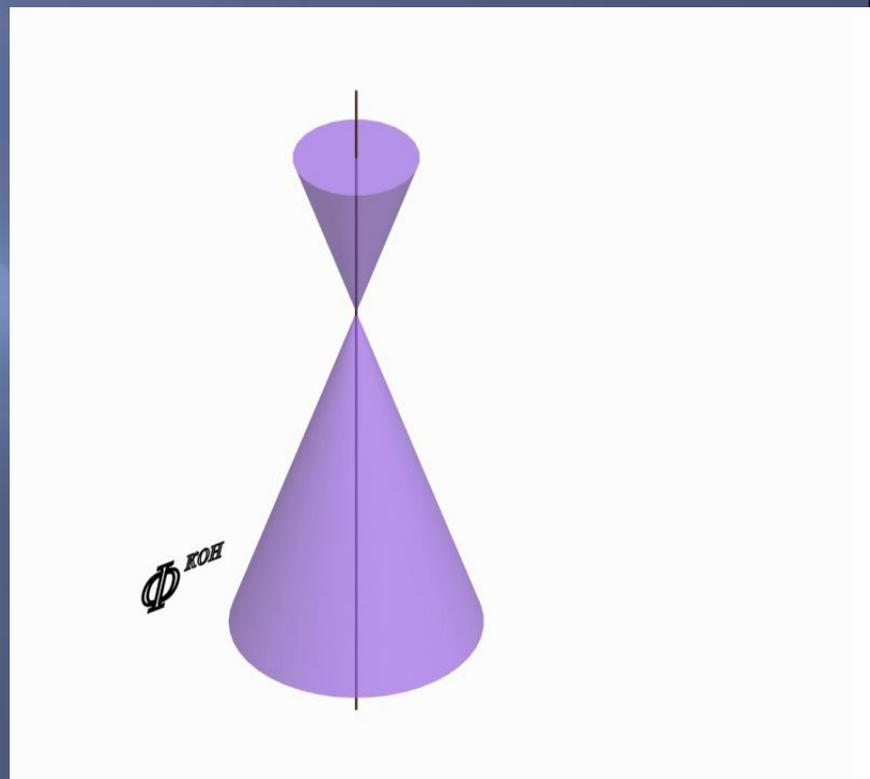


В сечении конуса плоскостью, параллельной одной из образующих, получается парабола.

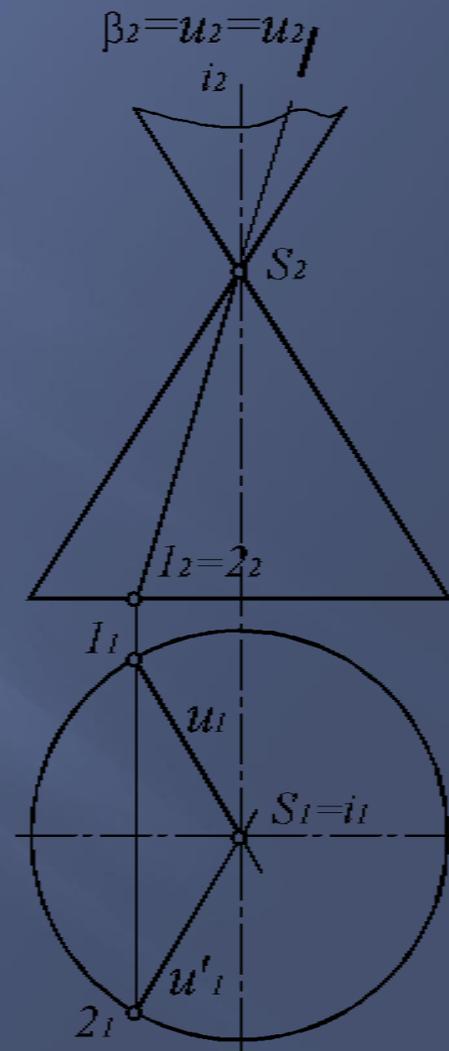
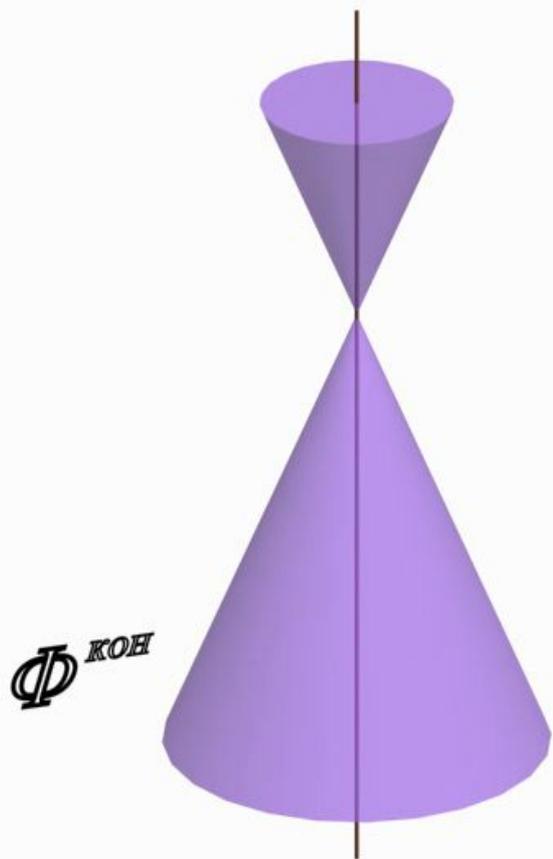




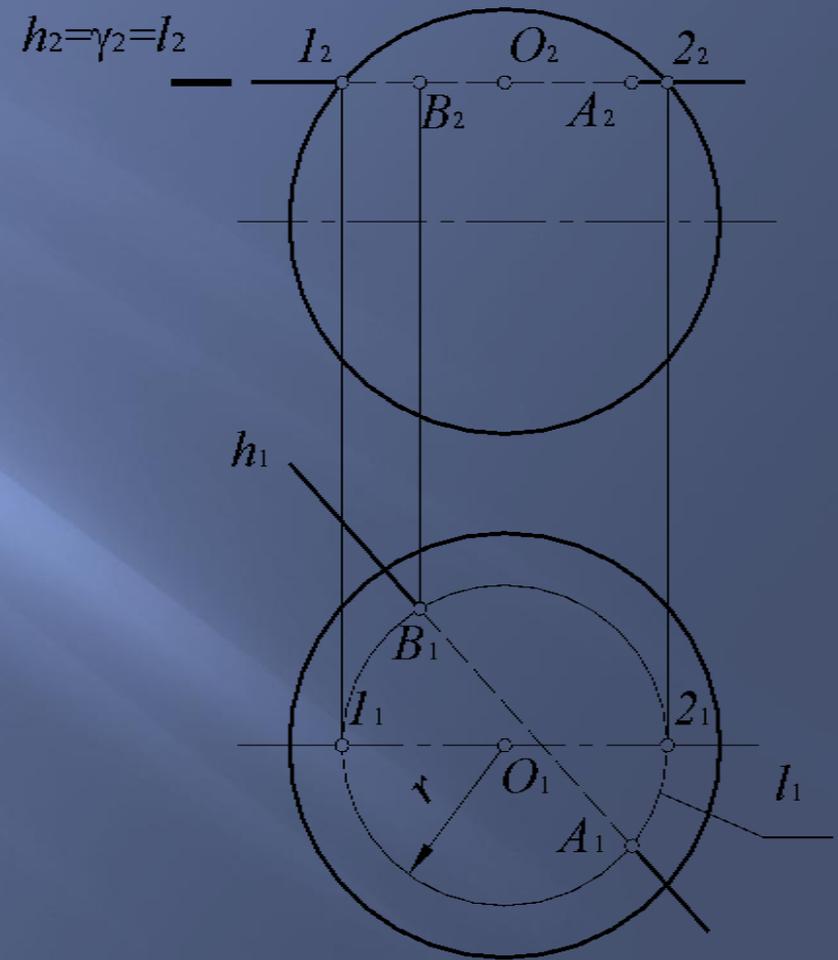
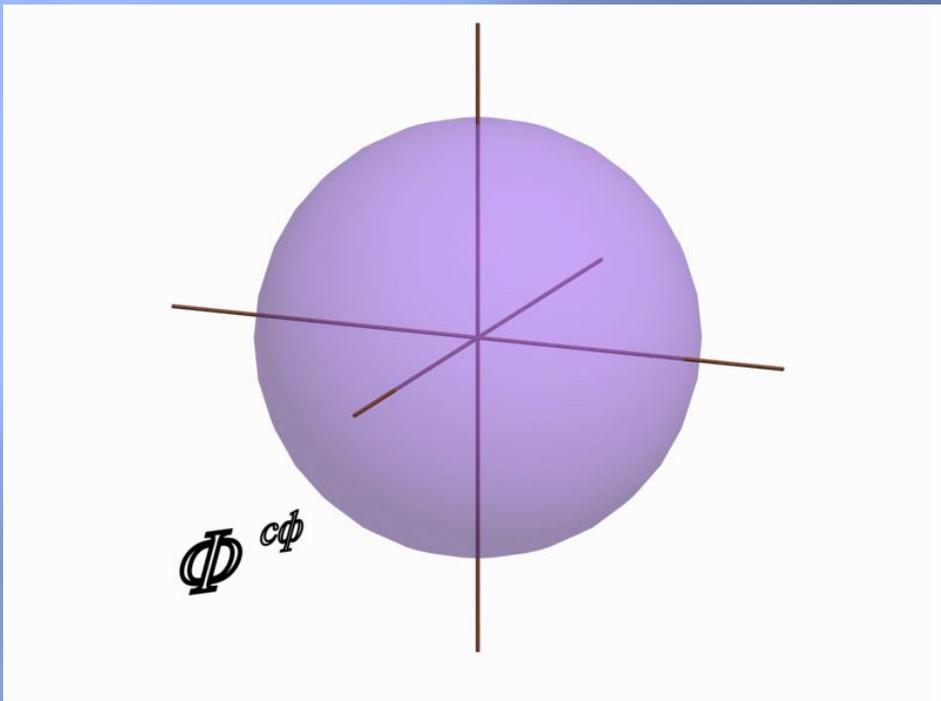
В сечении конуса плоскостью, пересекающей образующие по обе стороны от вершины, получается гипербола.



В сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину, получаются пересекающиеся прямые.

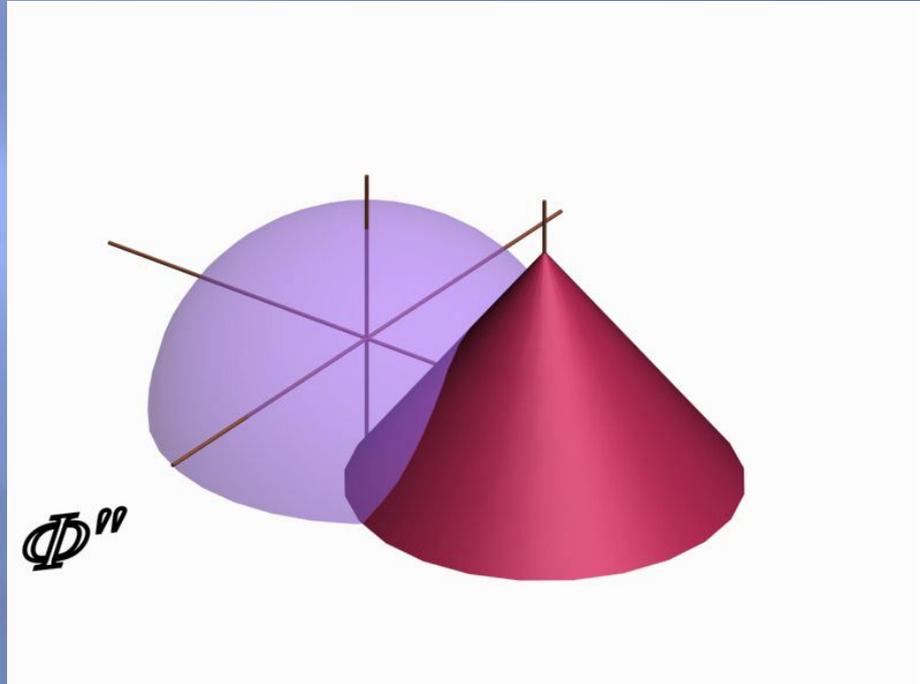


# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ



Алгоритм решения задач об определении взаимного положения поверхности и прямой аналогичен решению первой позиционной задачи .

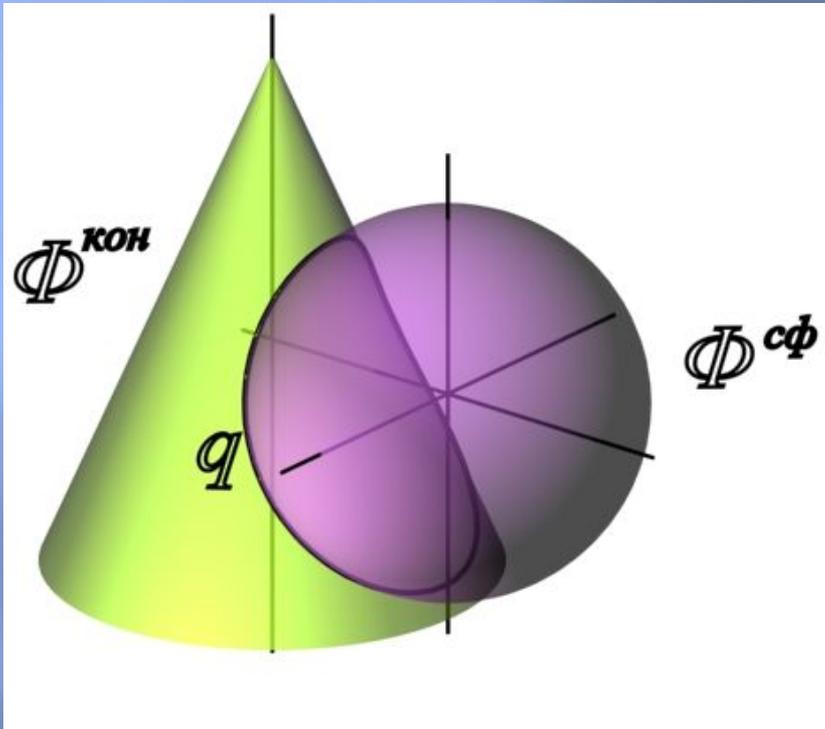
# ЛЕКЦИЯ 7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ



1. Обе заданные поверхности  $\Phi'$  и  $\Phi''$  рассекают третьей, вспомогательной плоскостью или поверхностью .
2. Определяют линии пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной:  $\Phi' \times P = l'$ ,  $\Phi'' \times P = l''$ .
3. Определяют точки пересечения полученных линий  $l' \times l'' = I$  и  $II$  и соединяют лекальной кривой, которая и является искомой линией пересечения поверхностей.
4. Определяют видимость поверхностей и линии их пересечения.

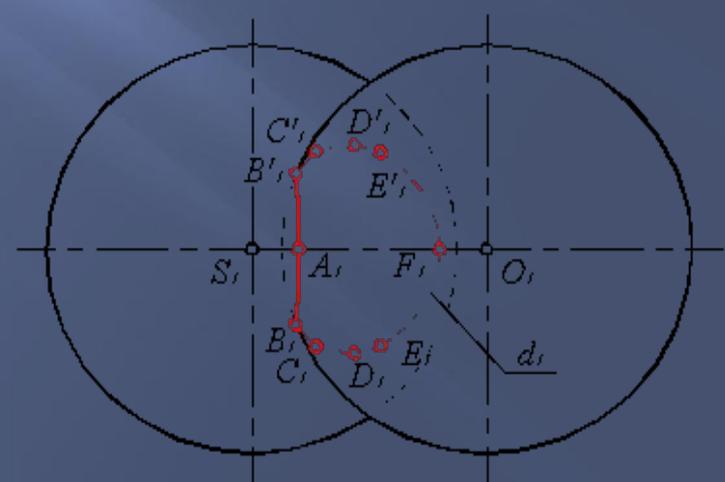
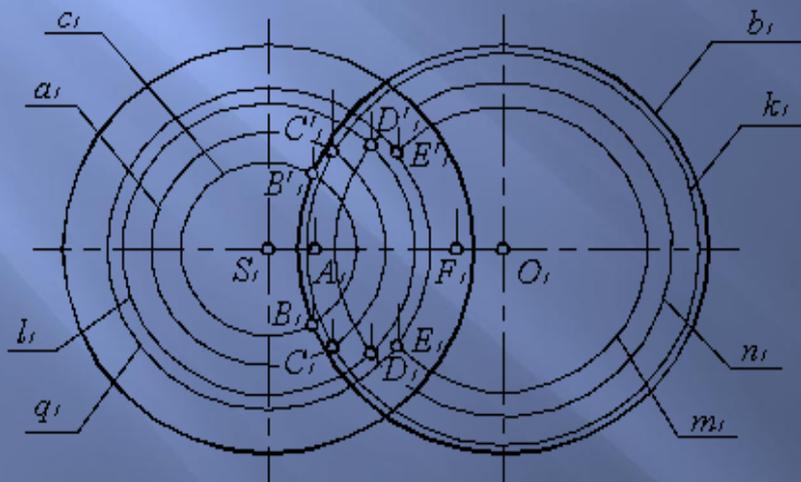
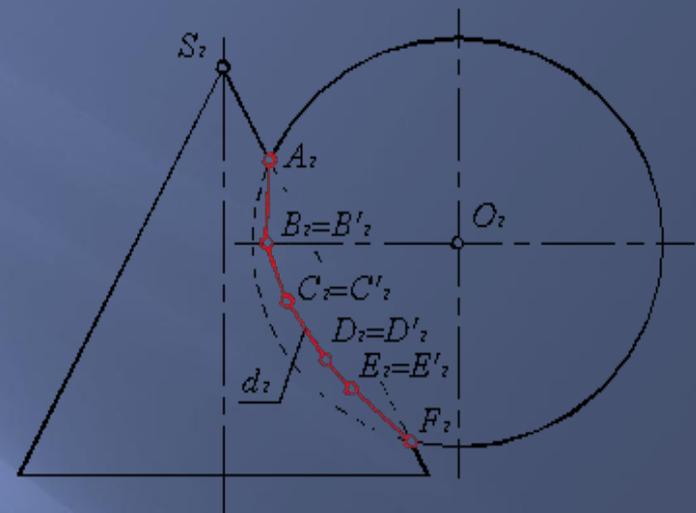
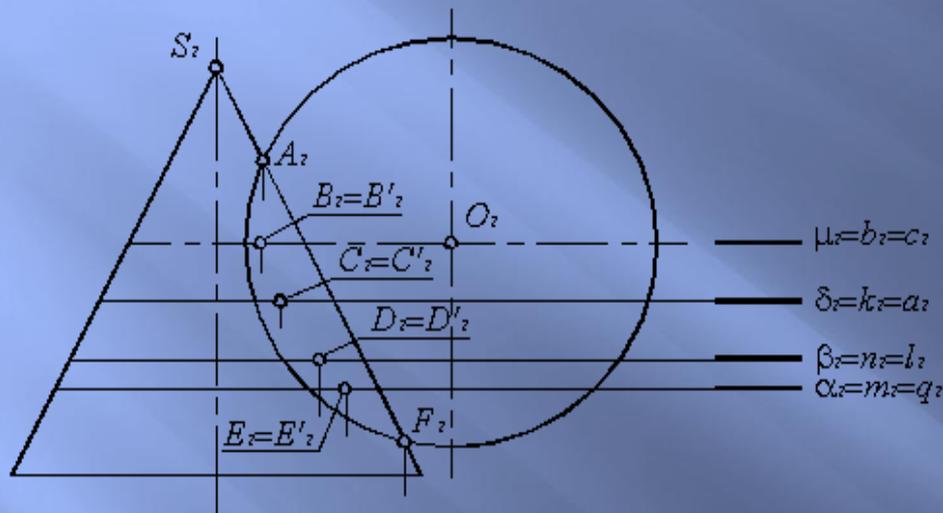
# СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ УРОВНЯ

Этот способ заключается в том, что обе поверхности пересекаются параллельными плоскостями уровня.



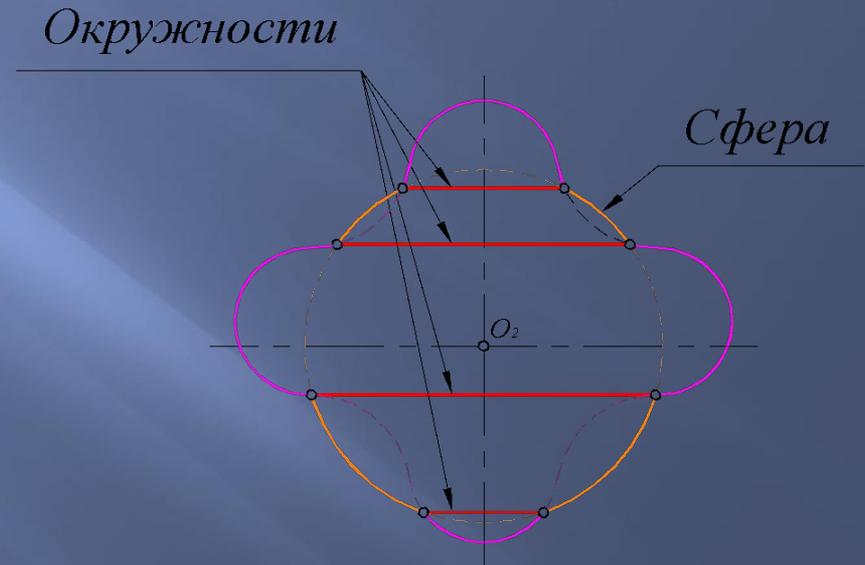
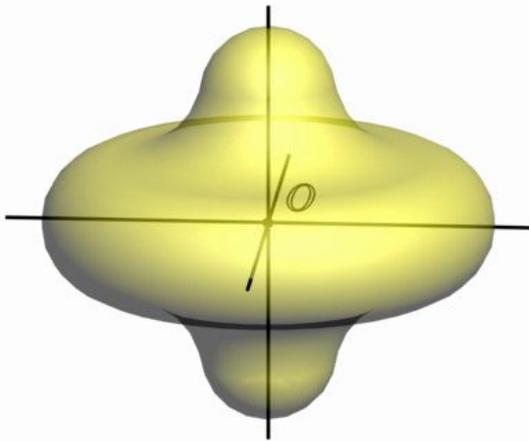
Рассмотрим построение линии пересечения прямого кругового конуса и сферы. Горизонтальные плоскости уровня пересекают обе поверхности по окружностям  $q$  и  $t$ .

# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПОСОБОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ УРОВНЯ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ



# СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

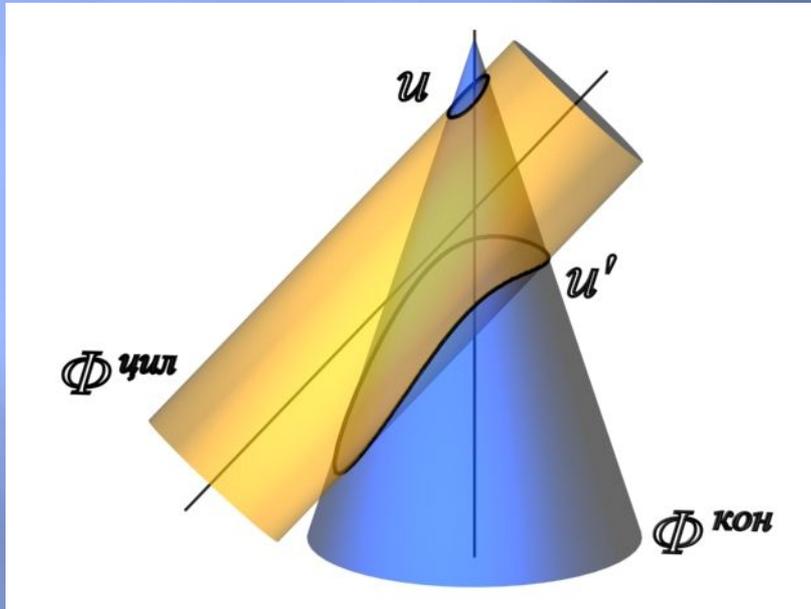
Этот способ применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения произвольного вида, при условии, что оси этих поверхностей пересекаются.



Свойство сферы с центром на оси какой-либо поверхности: *если центр сферы находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, то сфера соосна с поверхностью вращения и в их пересечении получатся окружности*

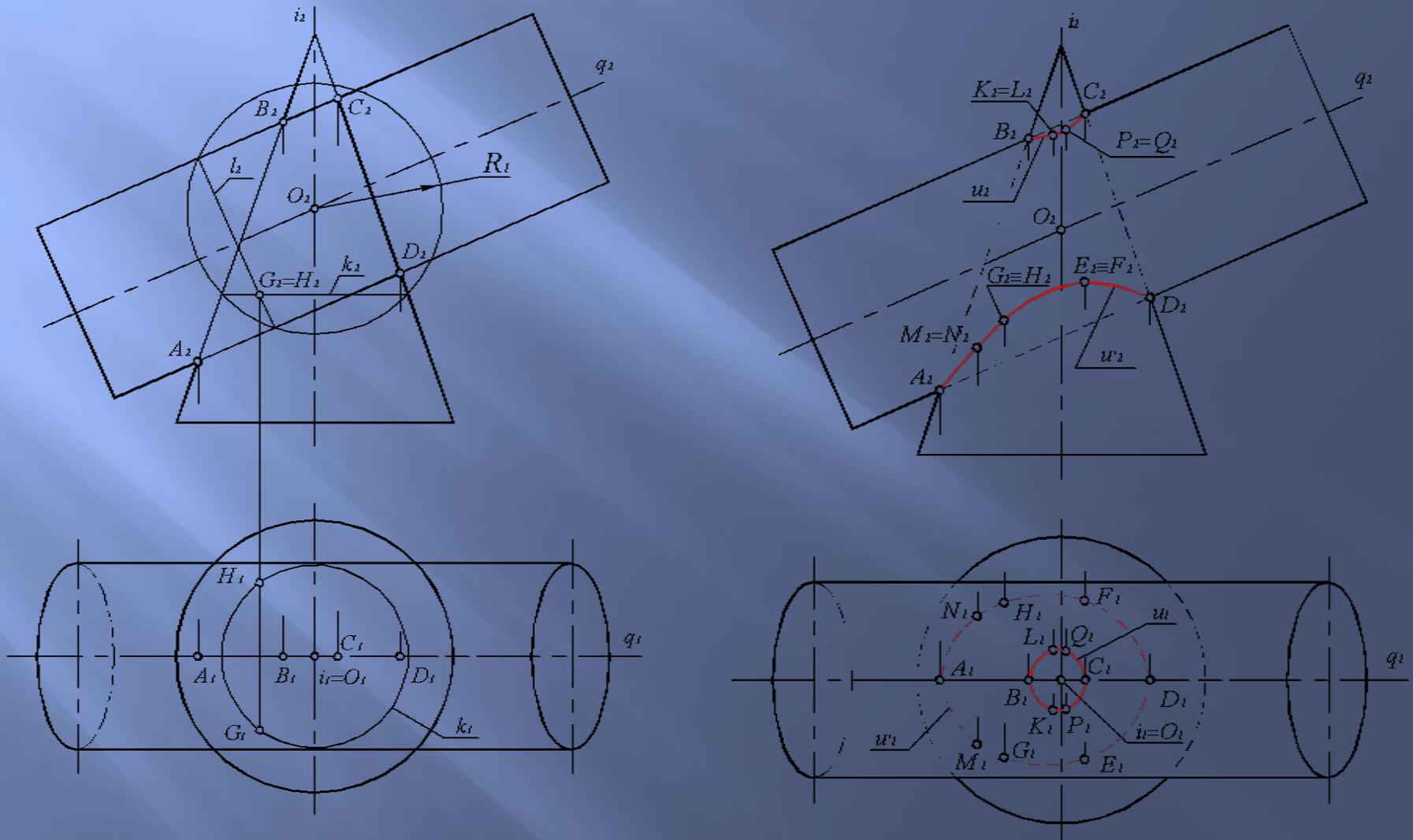
# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ

Точка пересечения осей поверхностей принимается за центр вспомогательных концентрических сфер.



Вспомогательная сфера пересекает поверхность цилиндра по окружности  $l$ , а поверхность конуса – по окружности  $m$ . Точки пересечения окружностей  $l$  и  $m$  являются точками пересечения поверхностей.

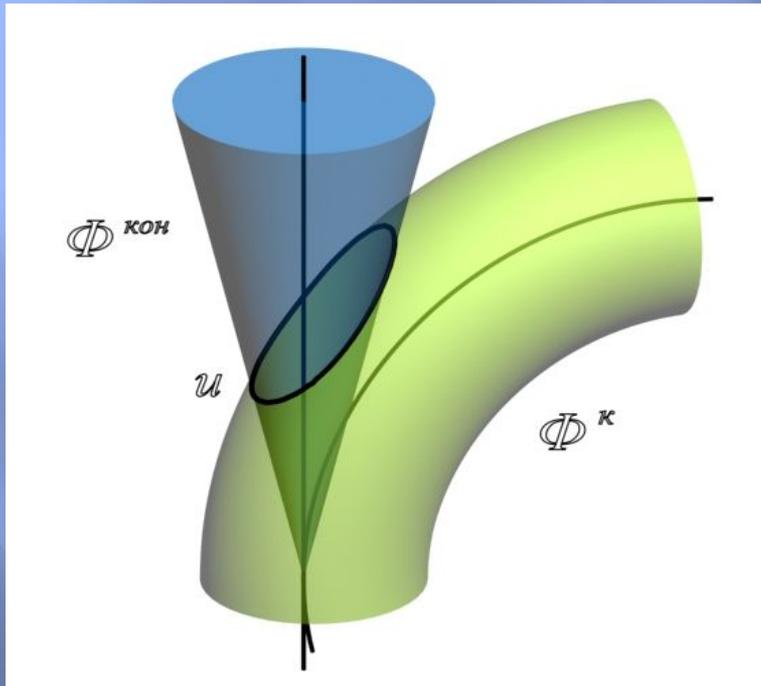
# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПОСОБОМ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ



# СПОСОБ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

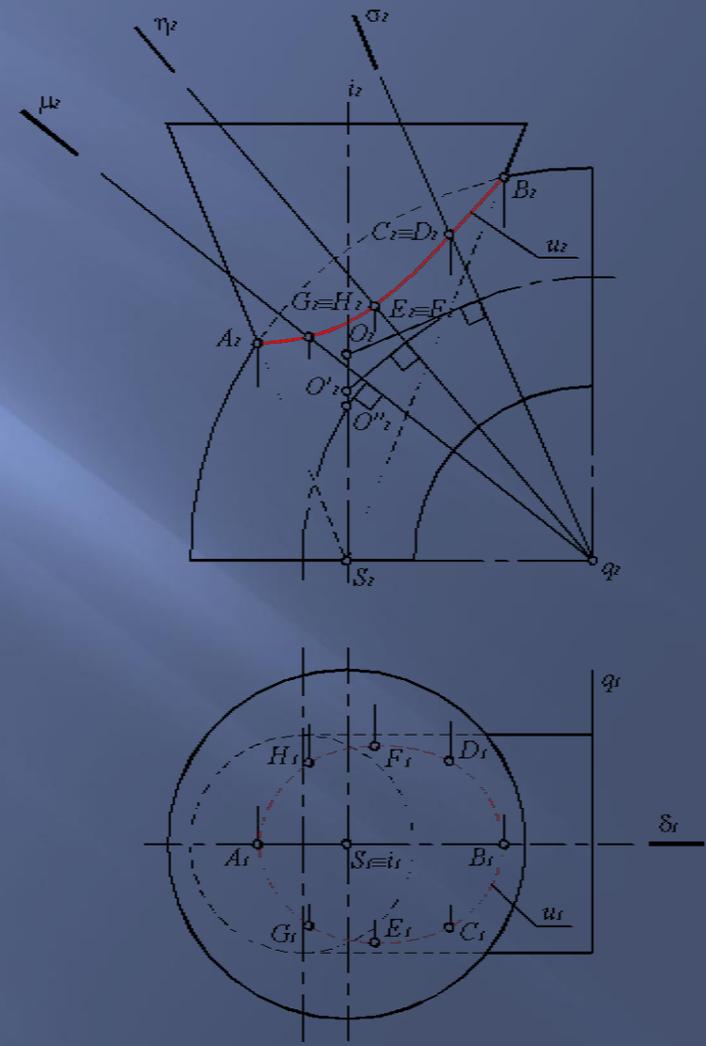
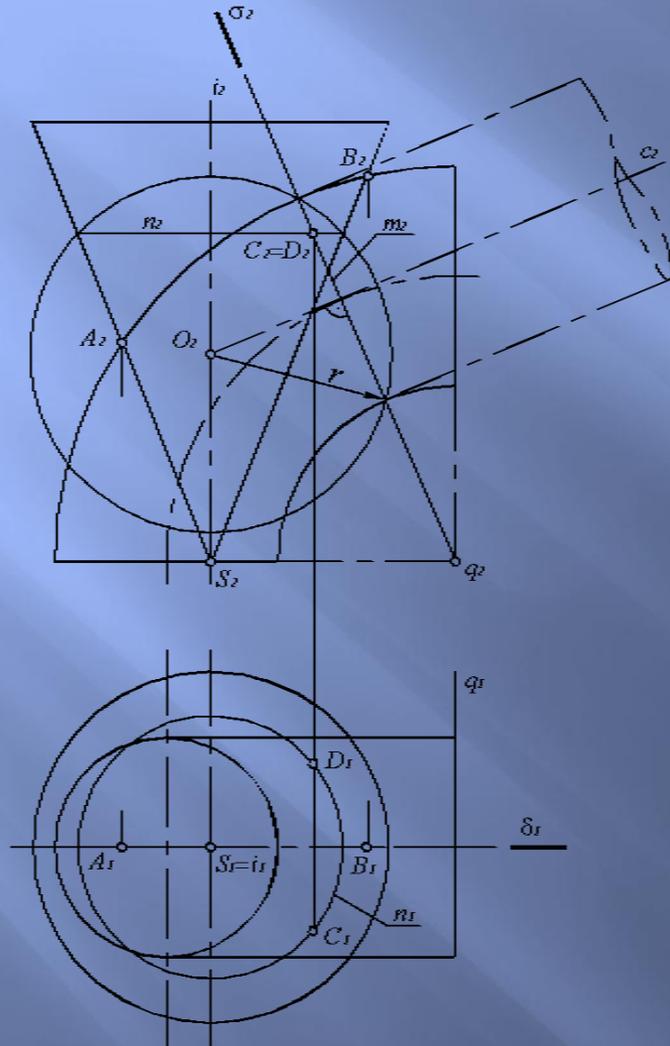
Способ эксцентрических сфер основан на том, что около всякой окружности можно описать бесчисленное множество сфер, геометрическим местом центров которых является прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная плоскости окружности.

Обязательным является наличие общей плоскости симметрии.



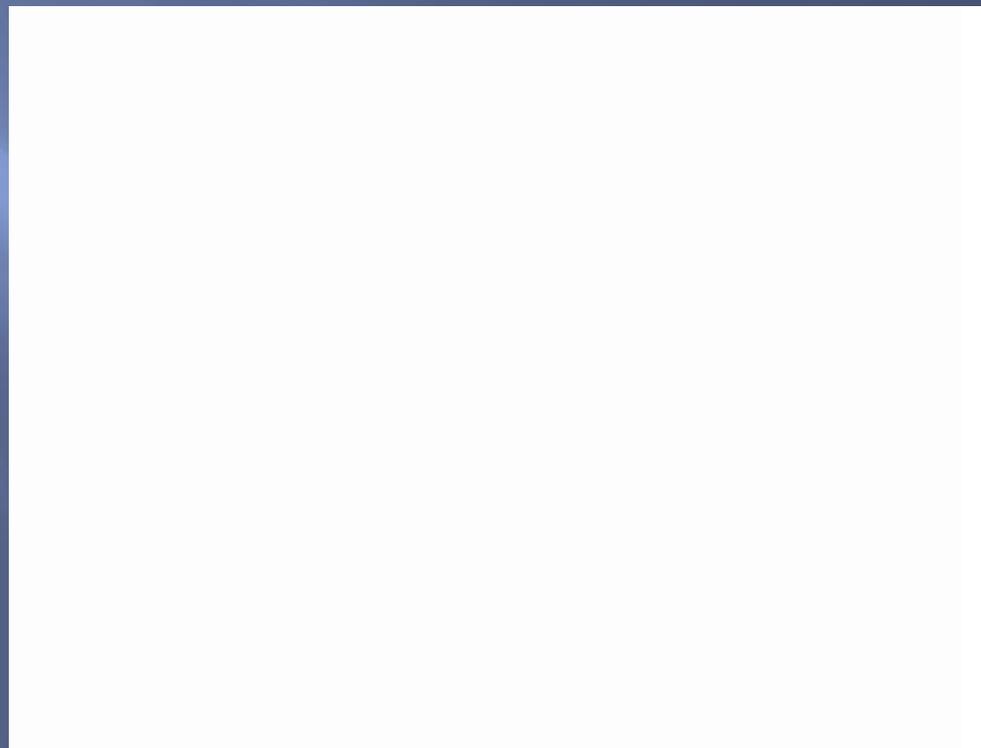
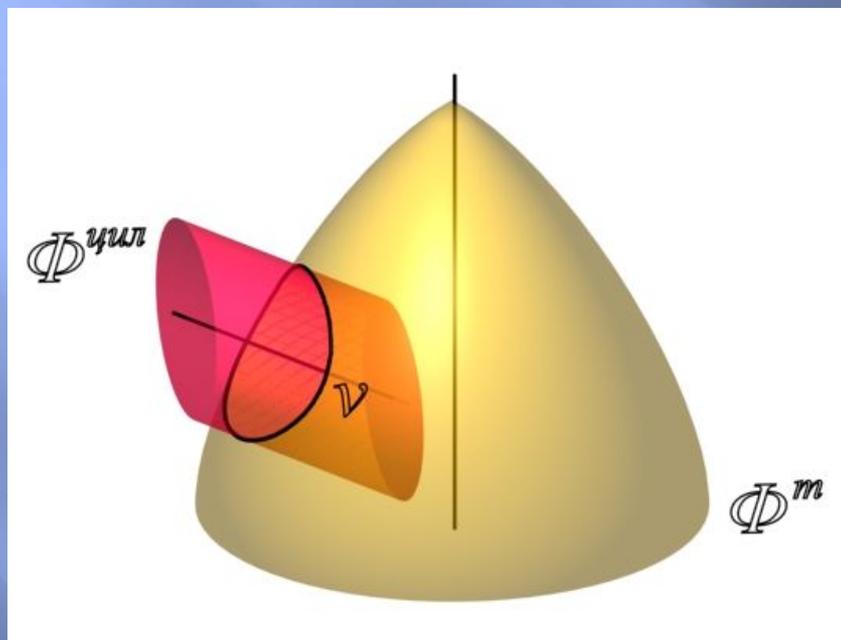
Рассмотрим способ на примере построения линии пересечения поверхностей конуса и кольца, оси которых - скрещивающиеся прямые

# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПОСОБОМ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

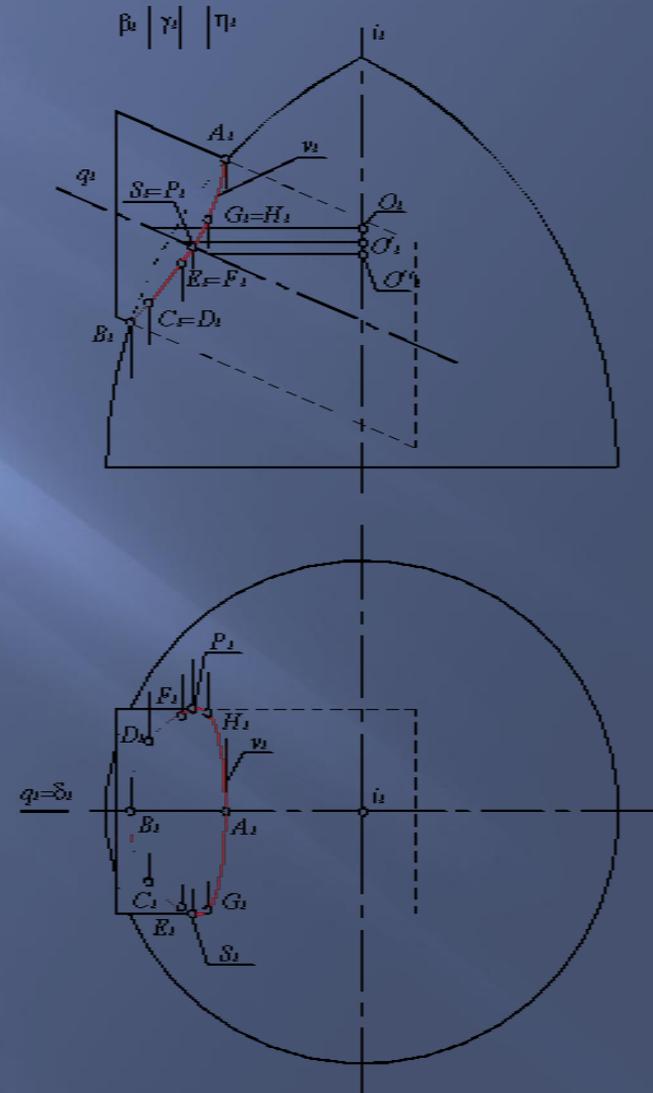
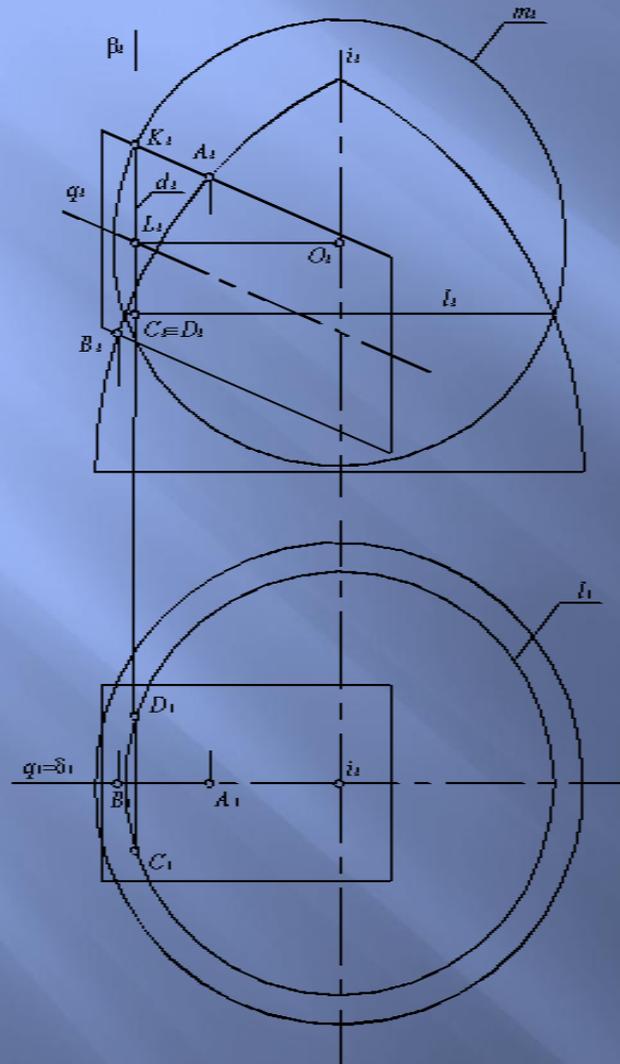


Рассмотрим также способ эксцентрических сфер на примере построения линии пересечения поверхности тора и наклонного (эллиптического) цилиндра.

Тор – поверхность вращения, наклонный цилиндр – поверхность, имеющая круговые сечения параллельные основанию цилиндра.



# ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СПОСОБОМ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

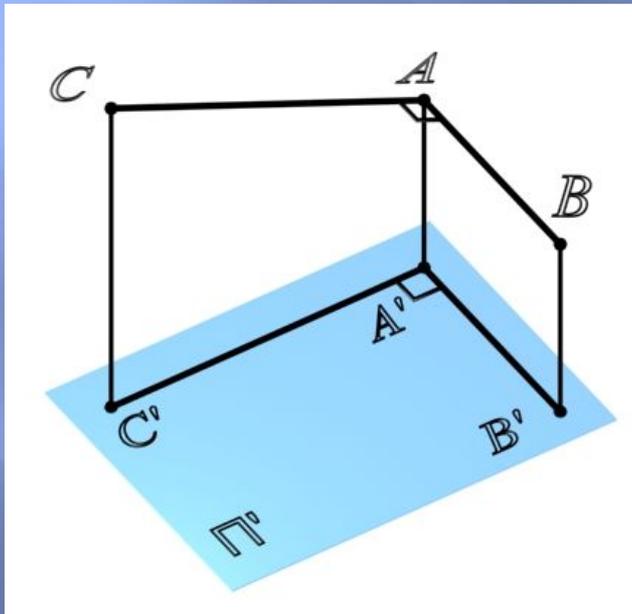


## ЛЕКЦИЯ 8. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи, в которых определяются различные геометрические величины – расстояния между объектами, длины отрезков, углы, площади и т.д. называются метрическими.

### ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ ПРЯМОГО УГЛА

*Прямой угол проецируется на плоскость без искажения, если одна из его сторон параллельна этой плоскости*



Дано:  $\angle BAC = 90^\circ$ ;  $AB \parallel \Pi'$

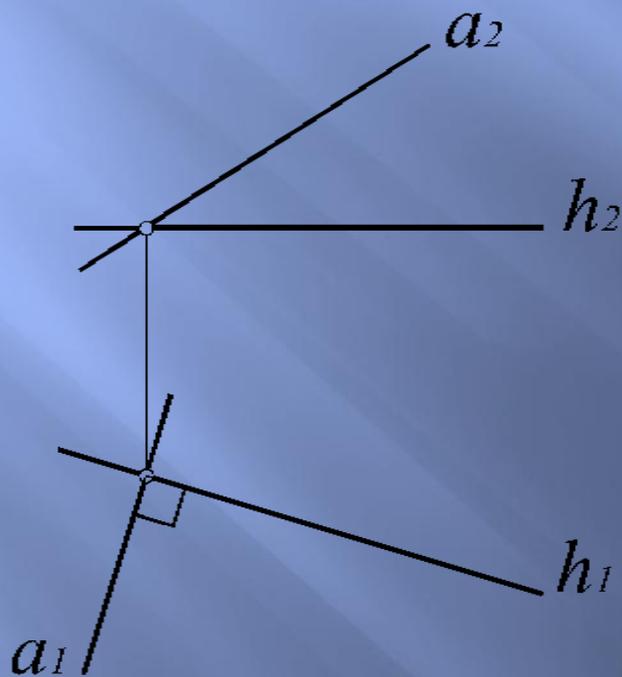
Доказать, что  $C'A' \perp A'B'$

Доказательство:

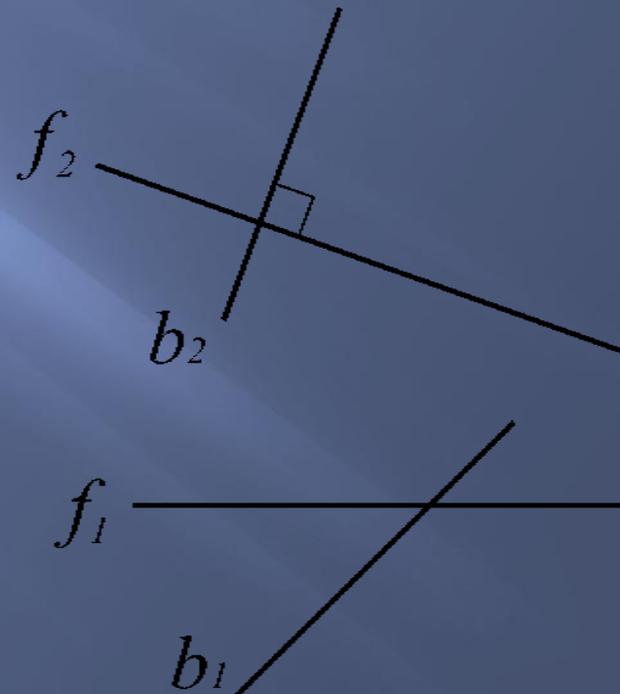
если  $AB \parallel \Pi'$ , то  $A'B' \parallel AB$ , но  $AA' \perp \Pi' \Rightarrow AA' \perp A'B'$  значит  $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp$  плоскости, тогда и  $A'B' \perp CAA'C'$ .  
Следовательно,  $C'A' \perp A'B'$ .

# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

На основании теоремы о проекциях прямого угла две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецируются на  $\Pi_1$  в виде взаимно перпендикулярных прямых, если одна из них горизонталь, на  $\Pi_2$  – если одна из них фронталь.



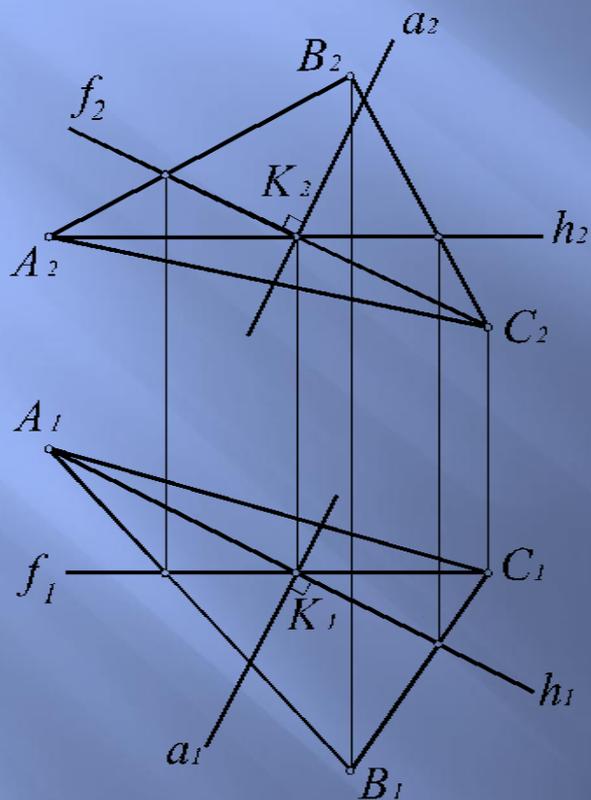
Пересекающиеся прямые



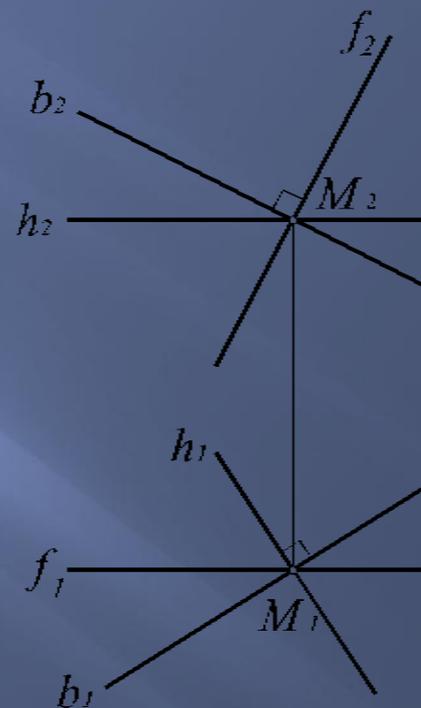
Скрещивающиеся прямые

# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.



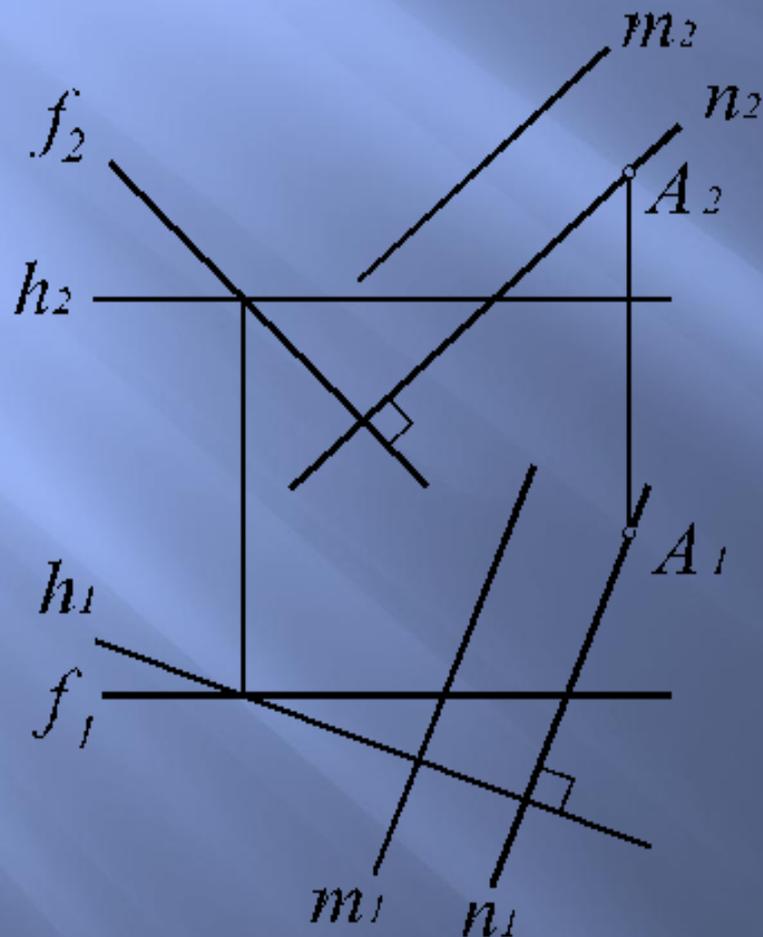
Построение прямой,  
перпендикулярной плоскости



Построение плоскости,  
перпендикулярной прямой

# ВЗАИМНАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.



Дано:

$$\alpha(h \times f); A(A_1, A_2)$$

Построить:

$$A \in \beta \perp \alpha$$

Решение:

$$A \in n;$$

$$n \perp \alpha(h \times f) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \perp h_1 \\ n_2 \perp f_2 \end{cases}$$

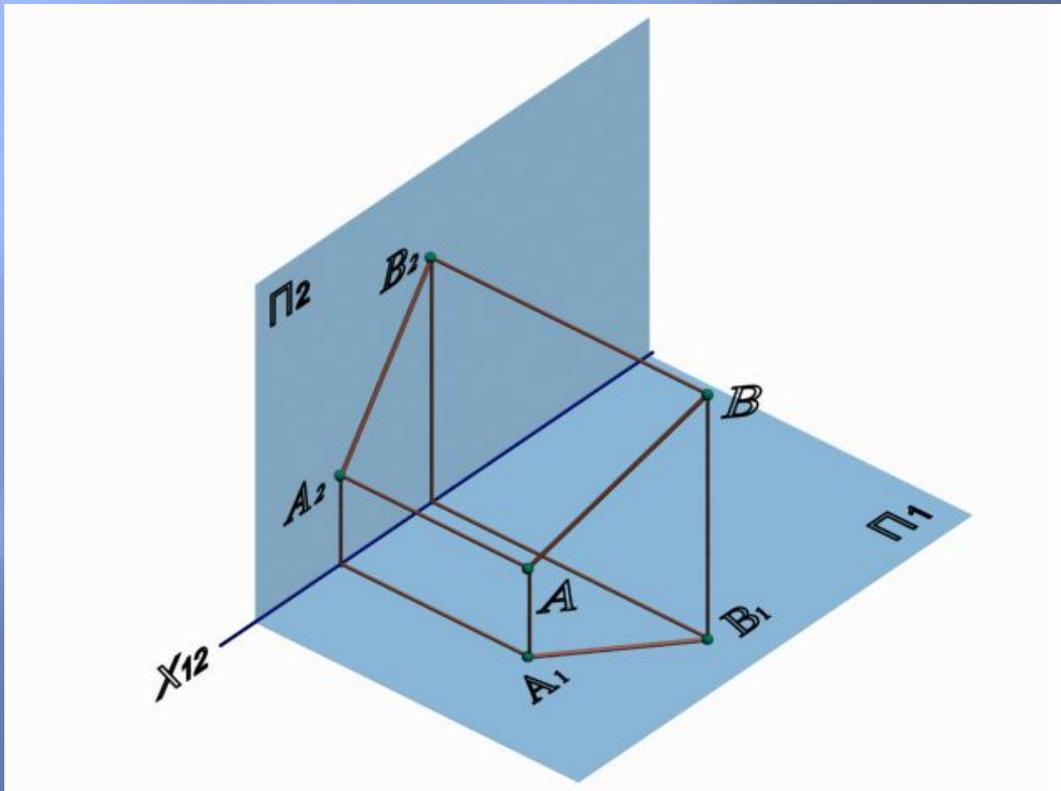
$$m_1 \parallel n_1; m_2 \parallel n_2;$$

$$\beta(n \times m) \perp \alpha(f \times h).$$

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Способы преобразования комплексного чертежа позволяют переходить от произвольных положений пространственных объектов к частным.

## СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

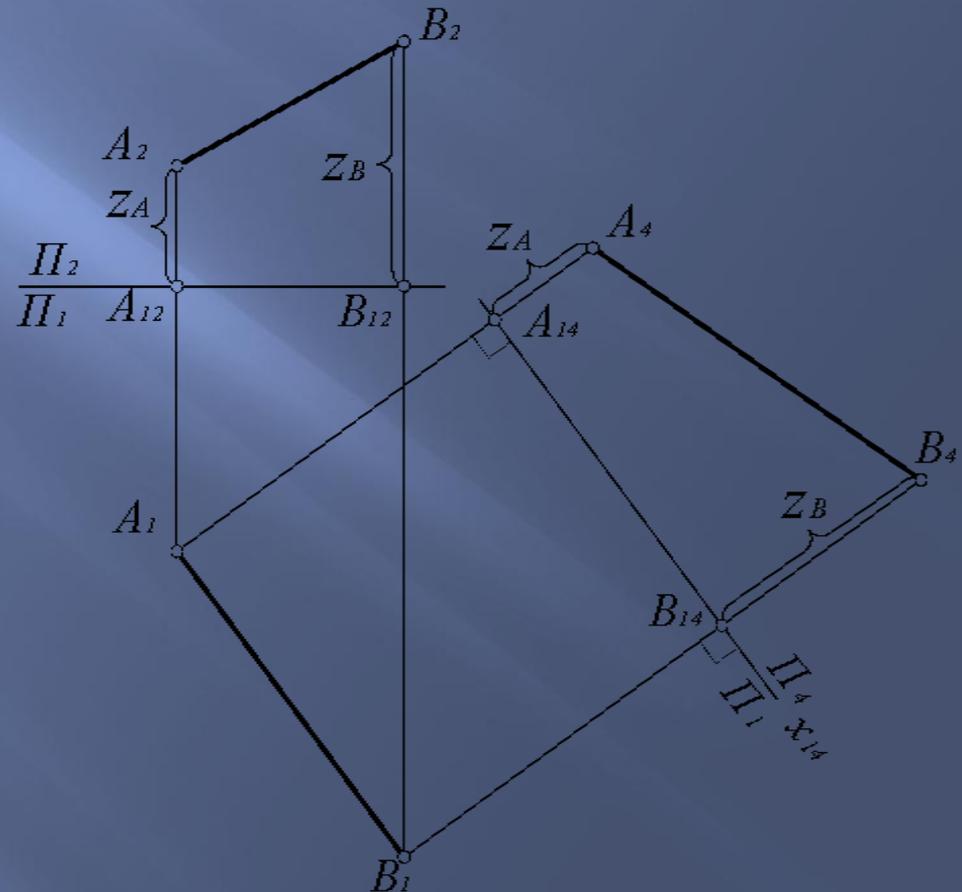


Способ замены плоскостей проекций состоит в том, что проецируемый объект остается неподвижным, а одна из плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  или  $\Pi_3$  заменяется новой, расположенной так, чтобы проецируемый объект по отношению к новой плоскости занял частное положение.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

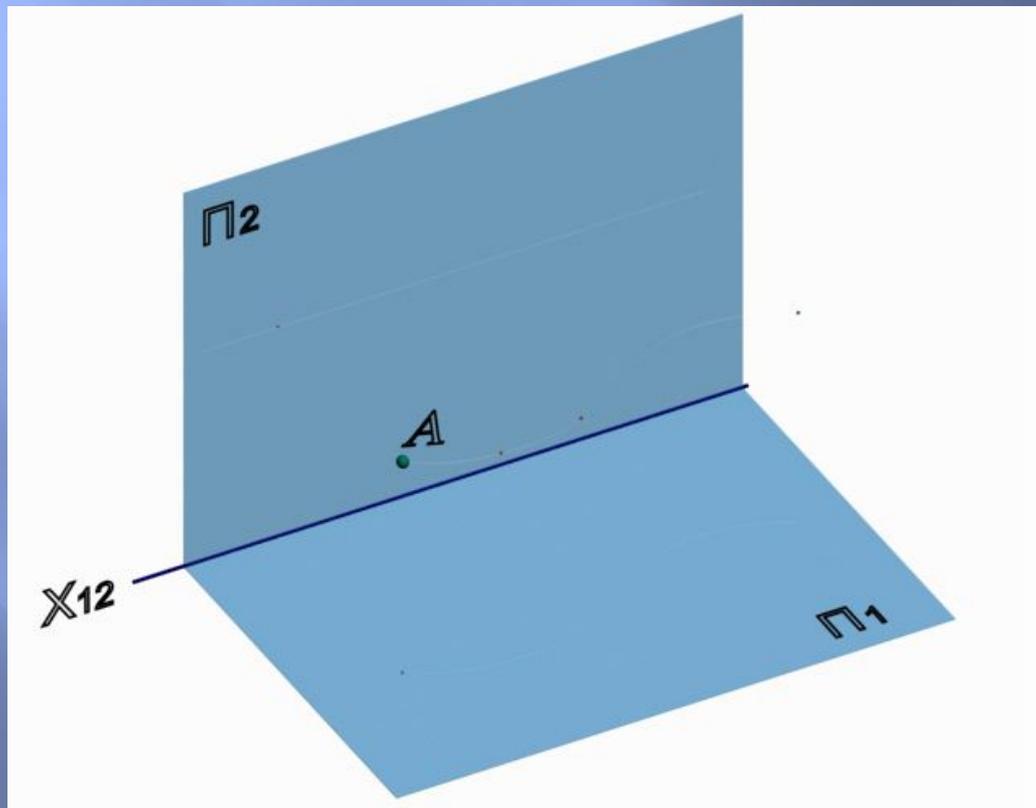
Необходимо выбрать новую плоскость проекций таким образом, чтобы в новой системе плоскостей проекций отрезок занял положение линии уровня, при этом:

- каждая новая система должна представлять собой систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей;
- на новые плоскости объект проецируется ортогонально;
- расстояние от точки до заменяемой плоскости сохраняется.



# СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

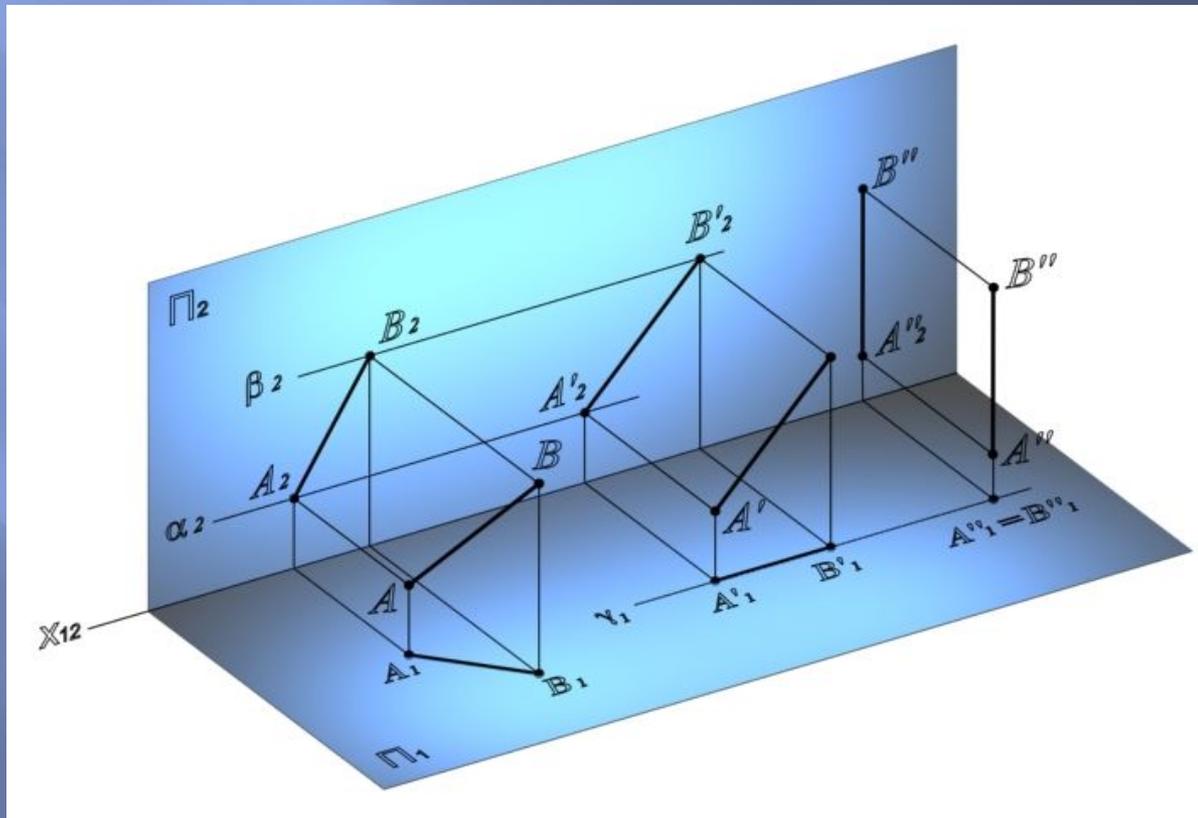
Плоскопараллельным движением объекта в пространстве называется такое его перемещение, при котором все точки объекта перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.



- **Теорема.** Если объект совершает плоскопараллельное движение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ , то фронтальные проекции его точек будут двигаться по прямым, перпендикулярным к линиям связи; при этом горизонтальная проекция объекта движется по плоскости проекций, оставаясь равной самой себе.

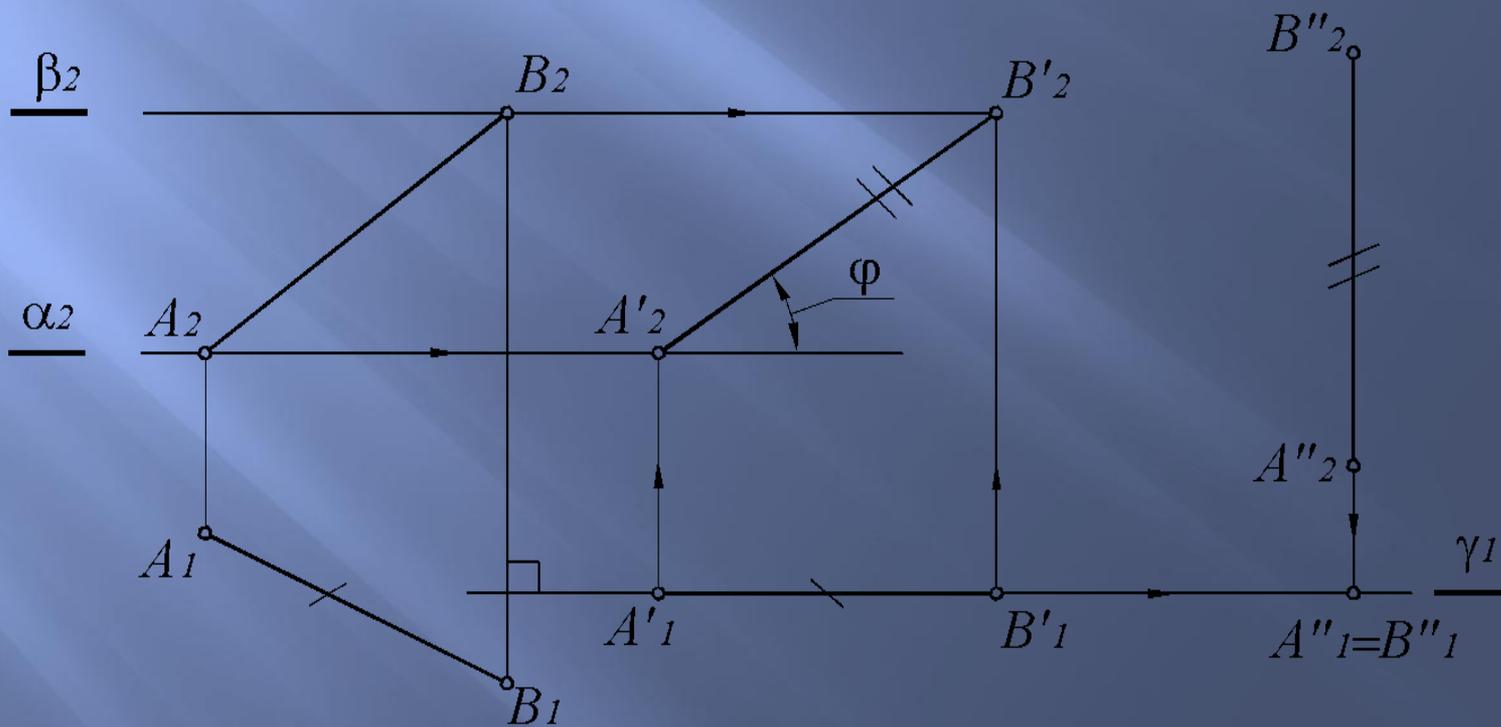
# ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим преобразование отрезка  $[AB]$  общего положения в положение фронтальной линии уровня, а затем в положение горизонтально–проецирующей прямой способом плоскопараллельного движения.



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТРЕЗКА ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

Плоскопараллельным движением относительно  $\Pi_1$  отрезок  $[AB]$  общего положения переводится в положение фронтали, затем, плоскопараллельным движением относительно  $\Pi_2$  - в положение горизонтально-проецирующей прямой



# ВРАЩЕНИЕ

Вращение – это движение по окружности вокруг некоторой оси. При преобразовании комплексного чертежа способом вращения плоскости проекций остаются неизменными, а проецируемый объект перемещается таким образом, чтобы он занял какое-либо частное положение.

## *Элементы вращения:*

*Ось вращения* – прямая, вокруг которой осуществляется вращение.

*Плоскость вращения* – плоскость, проходящая через вращаемую точку и перпендикулярная оси вращения (плоскость окружности, которую описывает точка при вращении).

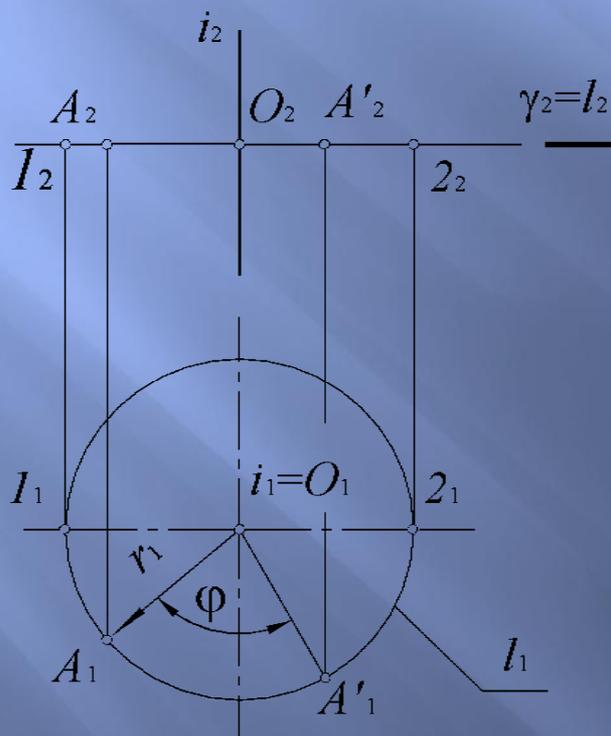
*Центр вращения* – точка пересечения оси вращения и плоскости вращения.

*Радиус вращения* – кратчайшее расстояние от вращаемой точки до центра (оси) вращения. Радиус всегда перпендикулярен оси вращения.

*Угол поворота* – угол между начальным и конечным положением радиуса вращения.

# ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ПРОЕКЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

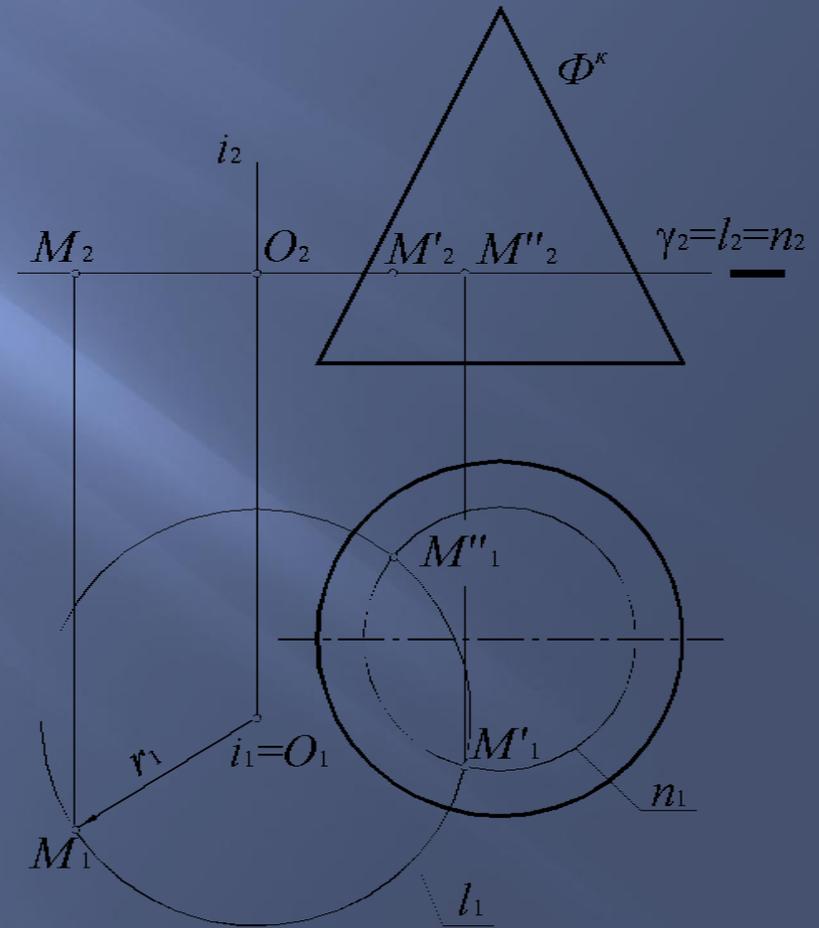
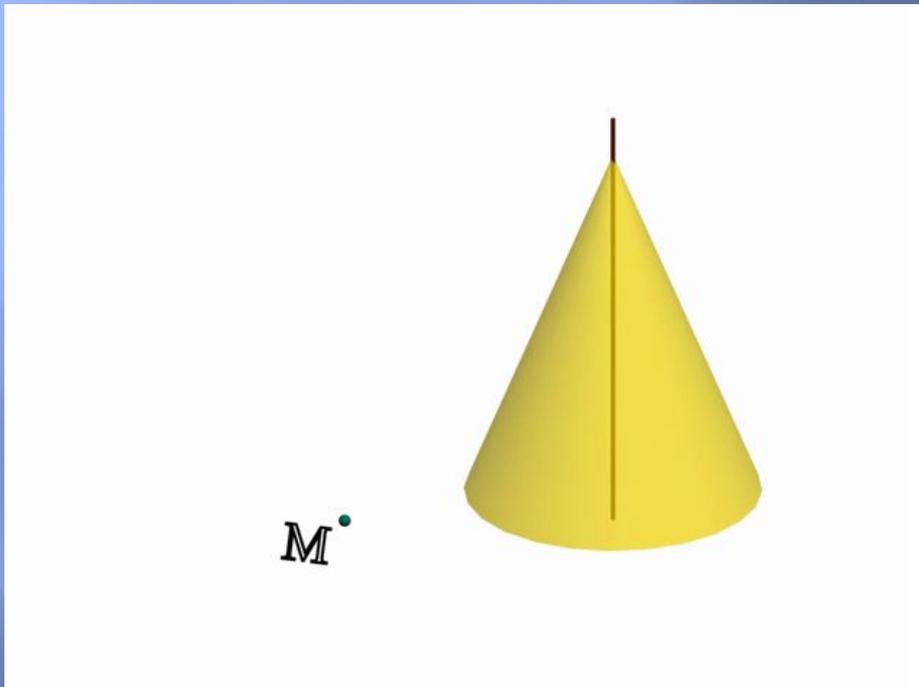
При вращении вокруг горизонтально-проецирующей прямой  $A_1$  перемещается по окружности  $l_1$  с центром в точке  $O_1$  и радиусом  $r=r_1=|O_1A_1|$ ,  $A_2$  перемещается по фронтальному следу плоскости  $\gamma_2$  в пределах отрезка  $[I_2, 2_2]$ .



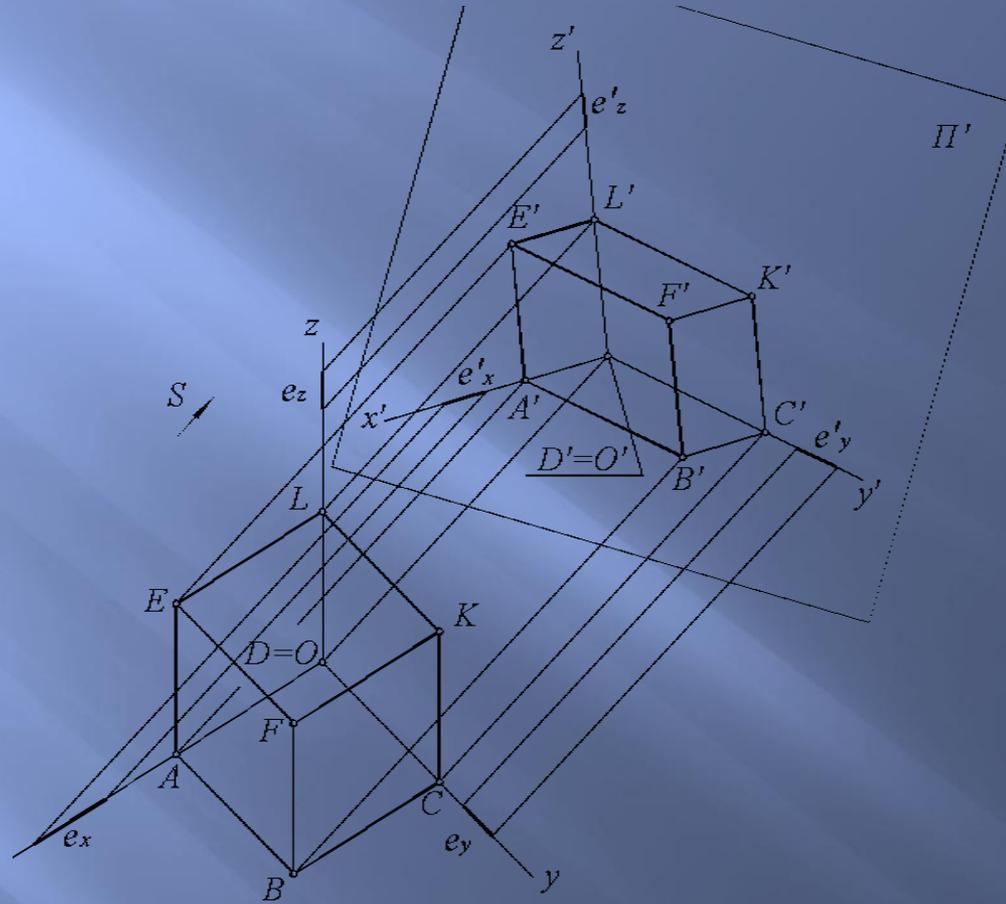
*Элементы вращения:*

- $i(i_1, i_2) \perp \Pi_1$  – ось вращения ;
- $(\gamma_2) \perp i$  – плоскость вращения;
- $O=i(i_1, i_2) \times \gamma (\gamma_2)$  – центр вращения;
- $R=O_1A_1$  – радиус вращения;
- $l$  – траектория вращения.

Способом вращения вокруг проецирующей прямой можно совместить точку с плоскостью или поверхностью. Рассмотрим совмещение точки с поверхностью прямого кругового конуса, поставленного основанием на плоскость



# ЛЕКЦИЯ 9. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ



Сущность рассматриваемого метода заключается в том, что предмет, жестко связанный с осями прямоугольных координат, параллельно проецируется на некоторую плоскость — плоскость аксонометрических проекций. Направление проецирования не должно совпадать ни с одной из координатных осей.

# ВИДЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Показателем искажения называют отношение аксонометрического масштаба к соответствующему натуральному:

$$\text{по оси } x: u = ex'/ex;$$

$$\text{по оси } y: v = ey'/ey;$$

$$\text{по оси } z: w = ez'/ez.$$

В зависимости от соотношения показателей искажения различают три вида аксонометрических проекций:

1. Изометрия - все три показателя искажения равны между собой:

$$u = v = w;$$

2. Диметрия - два показателя искажения одинаковы:

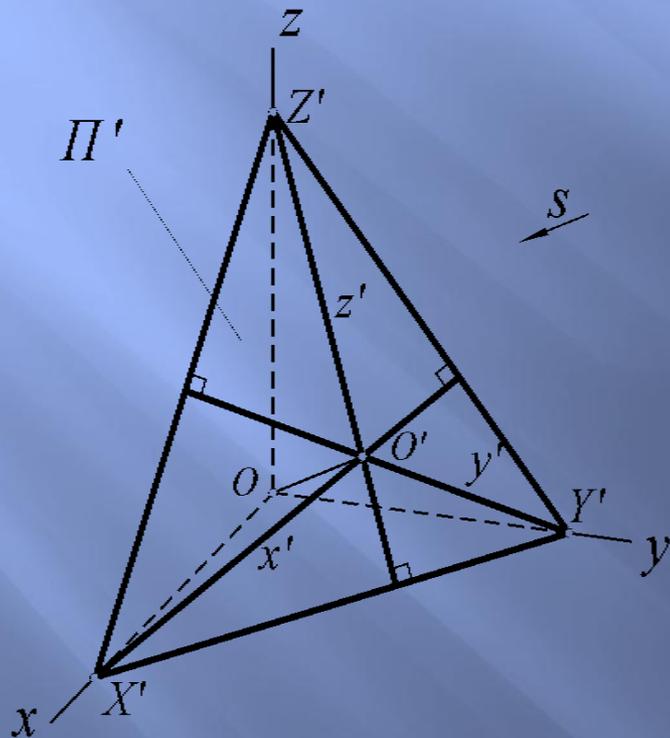
$$u = w \neq v;$$

3. Триметрия - все три показателя искажения различны:

$$u \neq w \neq v.$$

# ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ (ОРТОГОНАЛЬНЫЕ) АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Треугольник  $X'Y'Z'$ , по которому плоскость аксонометрических проекций пересекает координатные плоскости натуральной системы координат, называется треугольником следов .



$\Pi'$  – аксонометрическая плоскость проекций;

$OxOyOz$  – натуральные координатные оси;

$S \perp \Pi'$  – направление проецирования, ;

$X'Y'Z'$  – треугольник следов;

$O'x'O'y'O'z'$  – аксонометрические оси

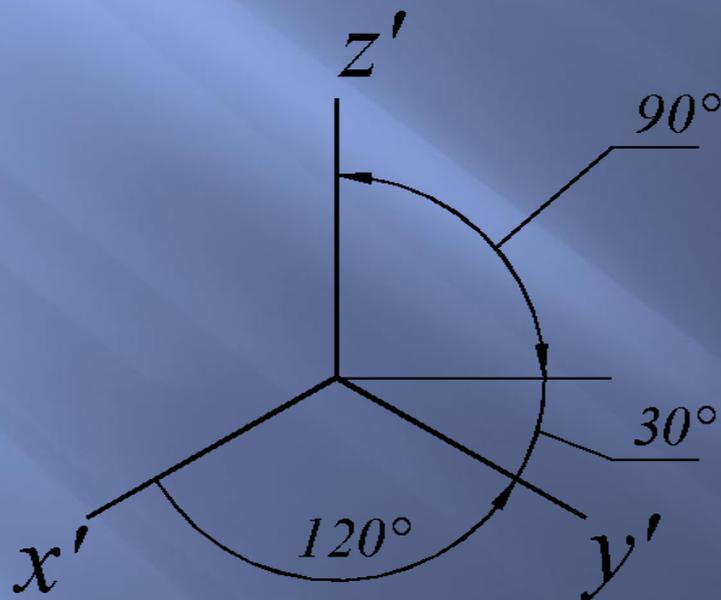
В ортогональной аксонометрии треугольник следов всегда остроугольный, а аксонометрические оси являются его высотами. Показатели искажения в ортогональной аксонометрии связаны соотношением:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2$$

# ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Точные показатели искажения:  $u=v=w=0.82$

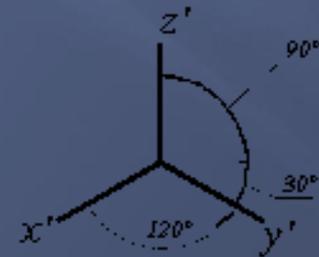
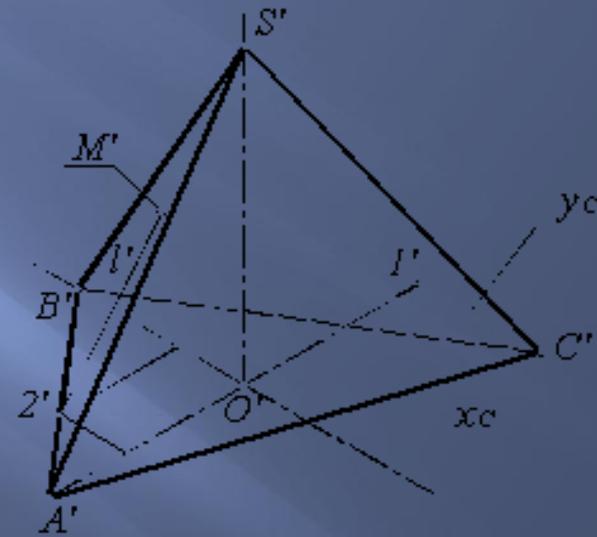
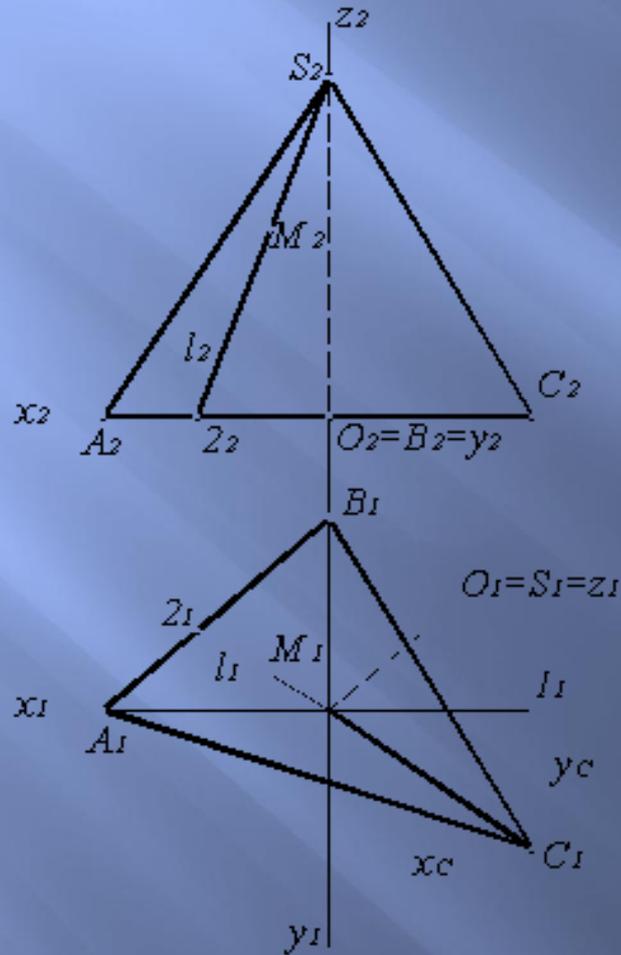
Треугольник следов равносторонний, поэтому аксонометрические оси как высоты равностороннего треугольника образуют углы  $120^\circ$ .



На практике пользуются приведенными показателями:  $U=V=W=1$ .

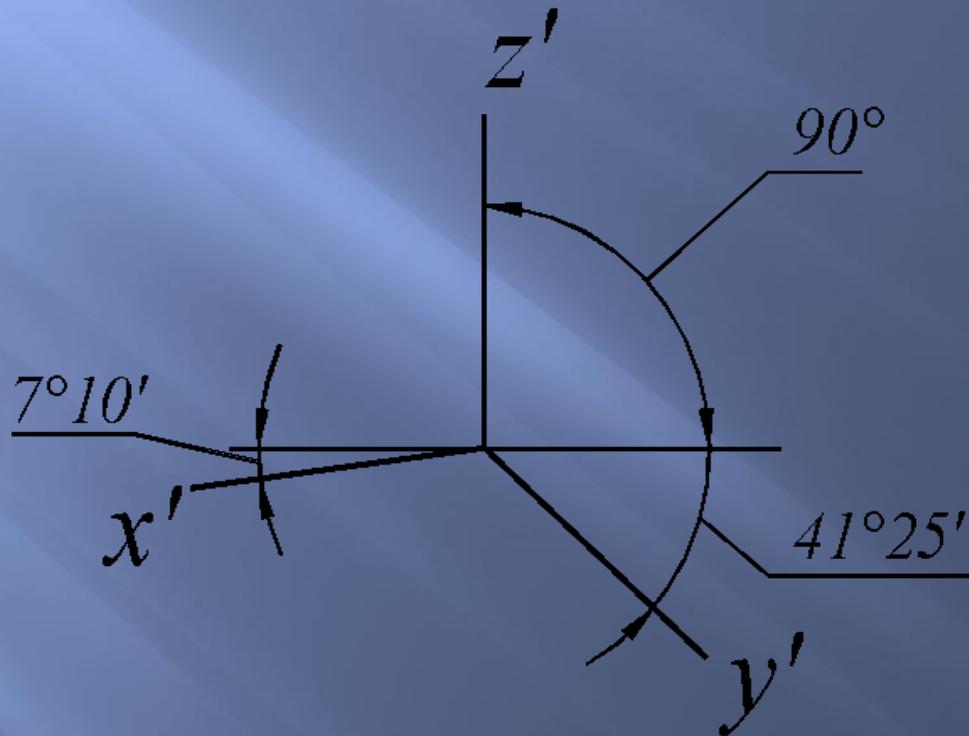
При использовании приведенных показателей искажения изображения получаются увеличенными в 1.22 раза.

# ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРИВЕДЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ПИРАМИДЫ



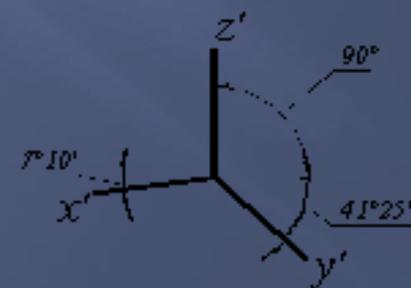
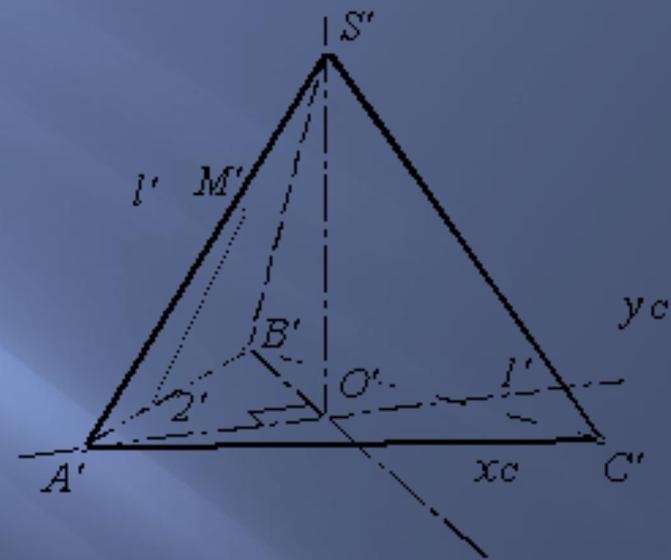
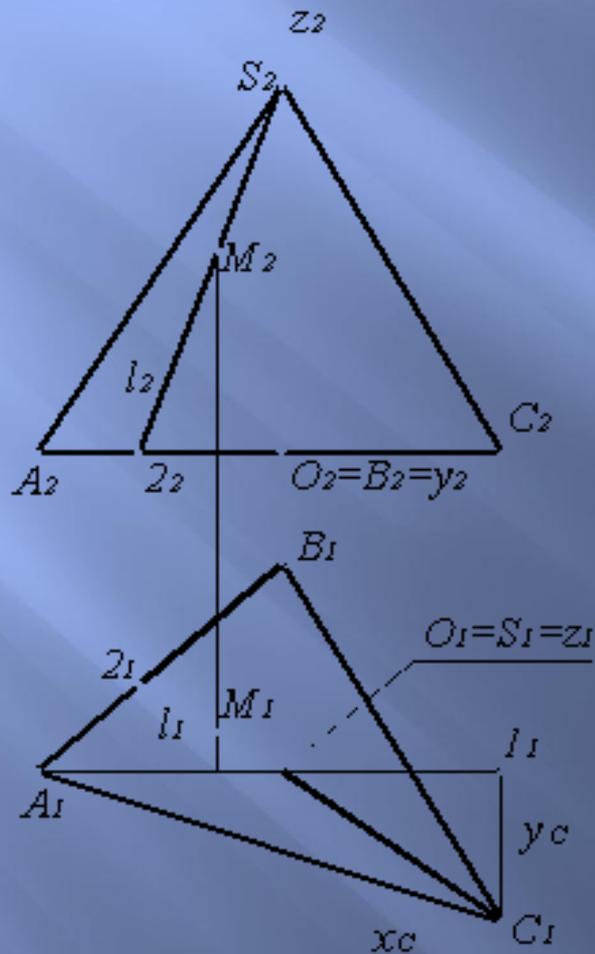
# ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Точные показатели искажения:  $u=w=0.94$ ;  $v=0.47$ .



На практике пользуются приведенными показателями:  $U=W=1$ ;  $V=0.5$ .

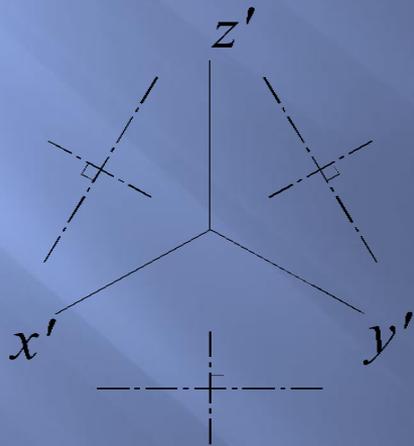
# ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРИВЕДЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДИМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ПИРАМИДЫ



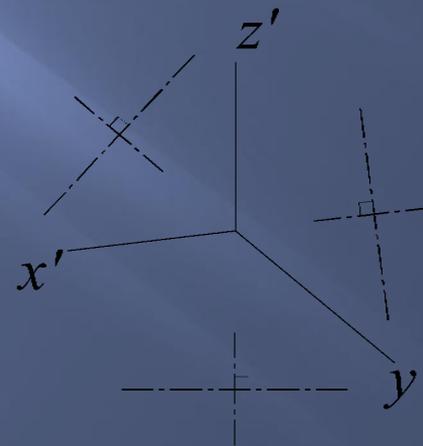
# АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ОКРУЖНОСТИ

Окружность проецируется на аксонометрическую плоскость проекций в виде эллипса.

*Если окружность лежит в координатной плоскости или параллельна ей, то на аксонометрическом чертеже большая ось эллипса, изображающего окружность, располагается перпендикулярно той аксонометрической оси, которая отсутствует в наименовании плоскости окружности*



Изометрия

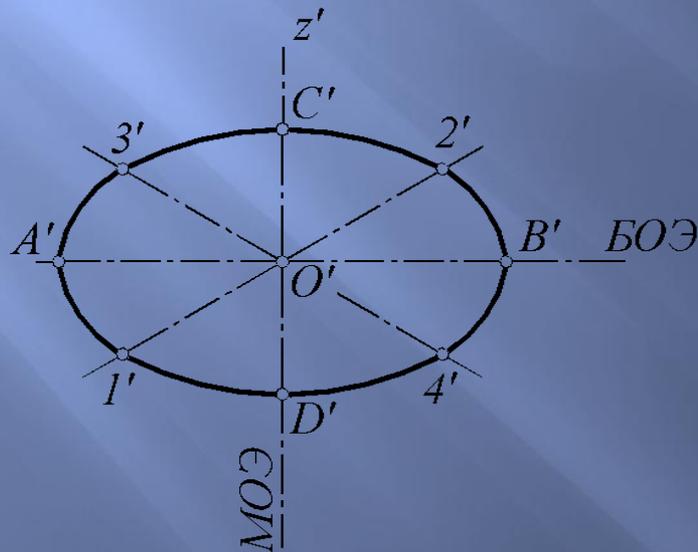


Диметрия

# РАЗМЕРЫ ОСЕЙ ЭЛЛИПСА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРИВЕДЕННЫХ ИЗОМЕТРИИ И ДИМЕТРИИ ( $d$ – ДИАМЕТР ОКРУЖНОСТИ).

Изометрия		Диметрия			
во всех плоскостях		в плоскостях $\Pi_1$ и $\Pi_3$		в плоскости $\Pi_2$	
БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ	БОЭ	МОЭ
$1.22d$	$0.72d$	$1.06d$	$0.35d$	$1.06d$	$0.95d$

## ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСОВ ПО ВОСЬМИ ТОЧКАМ В ИЗОМЕТРИИ



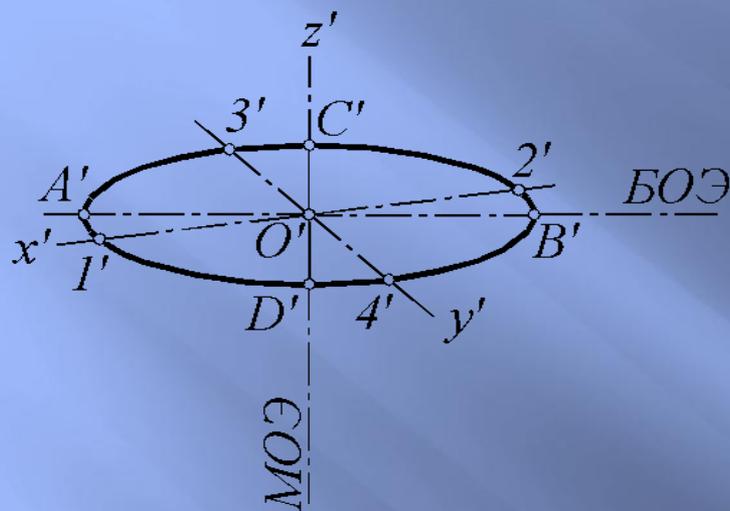
$A'B'=1,22d$  – большая ось эллипса;

$C'D'=0,7d$  – малая ось эллипса;

$1'-2'$  – размер по оси  $x$ , равный диаметру окружности  $d$ ;

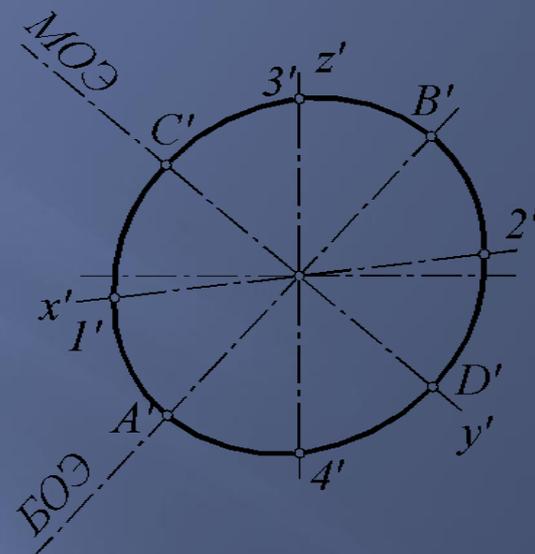
$3'-4'$  – размер по оси  $y$ , равный диаметру окружности  $d$

# ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСОВ ПО ВОСЬМИ ТОЧКАМ В ДИМЕТРИИ



Для окружностей в плоскостях  
 $\Pi_1(xOy)$  и  $\Pi_3(zOy)$ :

$БОЭ = 1,06d$  – большая ось эллипса;  
 $МОЭ = 0,35d$  – малая ось эллипса;  
 $1'-2'=d$  – размер по оси  $x$ ;  
 $3'-4'=0,5d$  – размер по оси  $y$ ;



Для окружностей в плоскости  
 $\Pi_2(xOz)$ :

$БОЭ = 1,06d$  – большая ось эллипса;  
 $МОЭ = 0,94d$  – малая ось эллипса;  
 $1'-2'=d$  – размер по оси  $x$ ;  
 $3'-4'=d$  – размер по оси  $z$