

# Планиметр

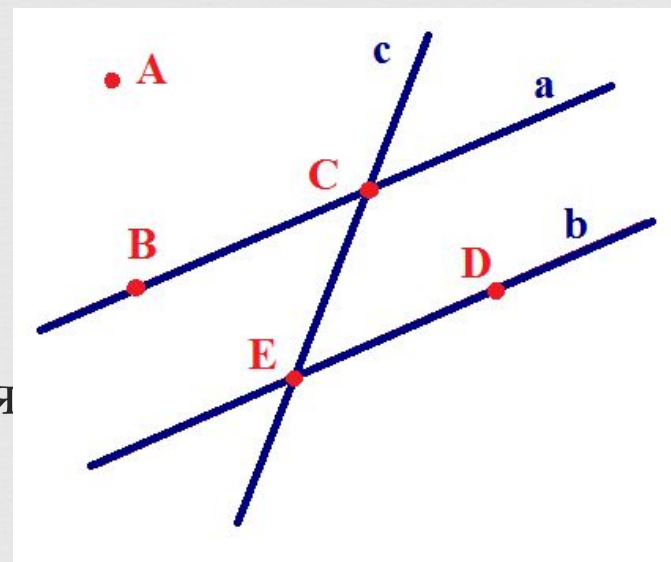
## ия



2015год

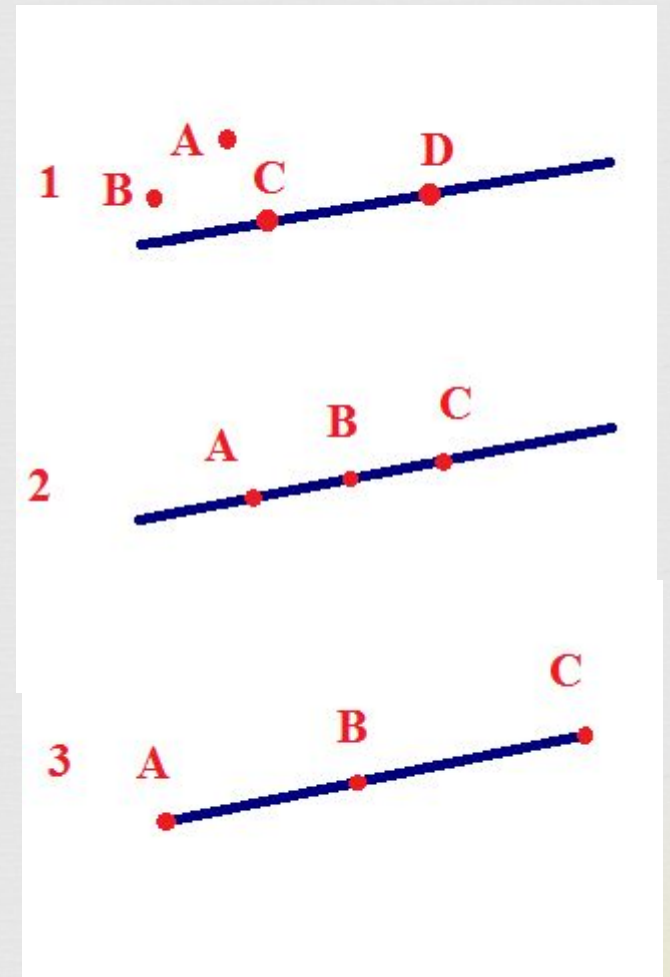
# Основные фигуры планиметрии

- Планиметрия - раздел геометрии, изучающий свойства геометрических фигур на плоскости.
- Основными фигурами на плоскости являются точка и прямая. Точки обычно обозначаются заглавными буквами -  $A, B, C, D$ . Прямые обозначаются строчными буквами -  $a, b, c, d$ .
- $a, b, c$  - прямые.
- $A, B, C, D, E$  - точки.
- Прямые  $a$  и  $b$  параллельны, прямые  $a$  и  $c$  пересекаются в точке  $C$ , прямые  $b$  и  $c$  пересекаются в точке  $E$ .
- Точка  $A$  не принадлежит ни одной прямой.  
Точка  $B$  принадлежит прямой  $a$ ,  
точка  $D$  - прямой  $b$ ,  
точка  $C$  - прямой  $a$  и  $c$ ,  
точка  $E$  - прямой  $b$  и  $c$ .



# Аксиомы планиметрии

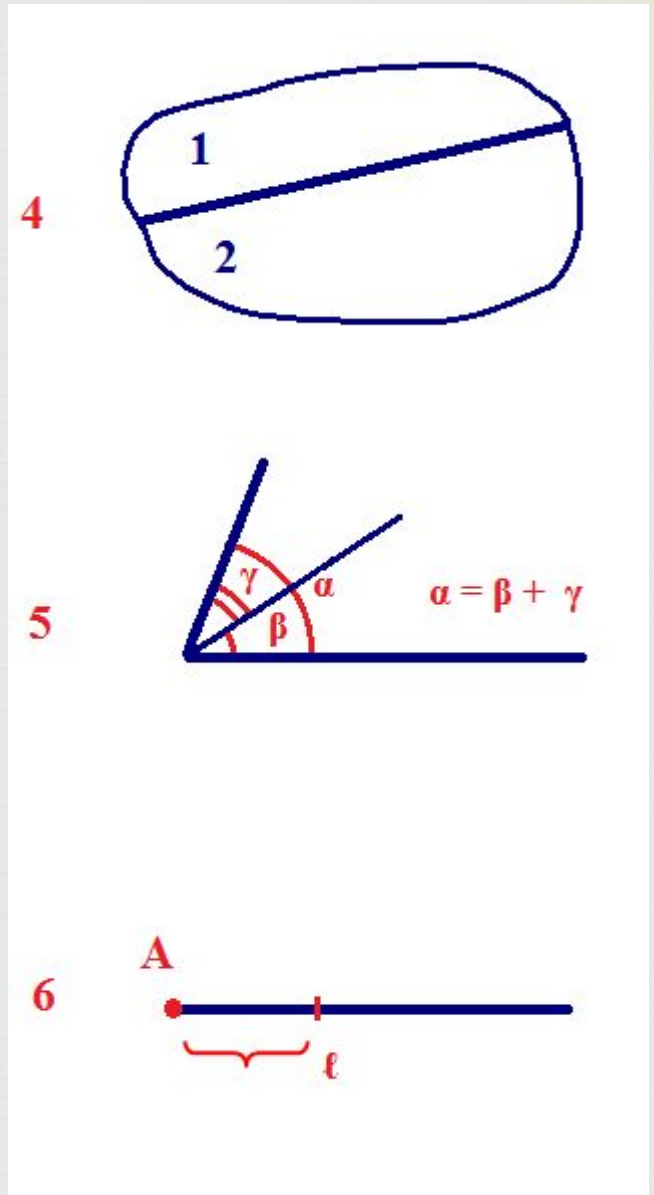
- 1. Для любой прямой на плоскости существуют точки принадлежащие ей и не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести только одну прямую.
- 2. Из трех точек, лежащих на прямой, только одна лежит между двумя другими.
- 3. Любой отрезок имеет длину больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой точкой, лежащей на этом отрезке



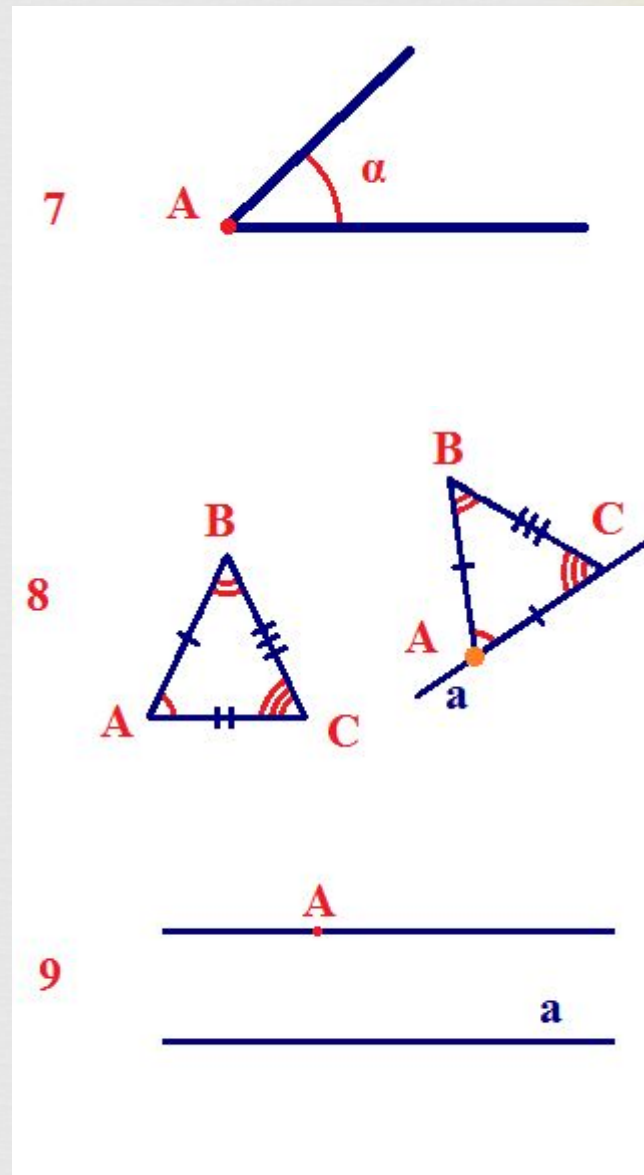
□ 4. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

□ 5. Любой угол имеет определенную градусную меру. Градусная мера любого угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучем, проходящим между его сторонами. Развернутый угол  $=180^\circ$ .

□ 6. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины.



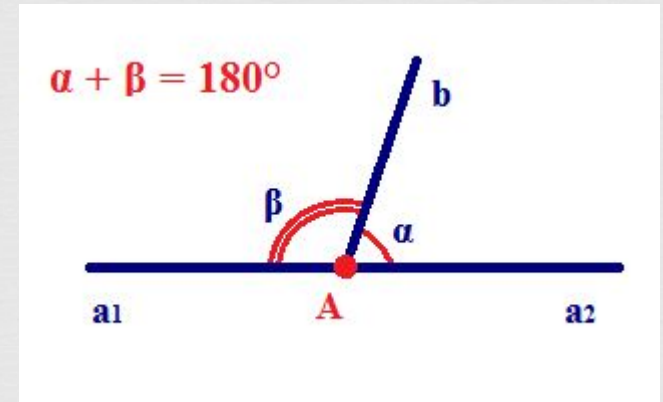
- 7. От любой полупрямой от ее начальной точки в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры, меньше  $180^\circ$ .
  
- 8. Для любого треугольника, существует треугольник равный данному, относительно заданной полупрямой в заданном расположении.
  
- 9. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую параллельную данной.



# Смежные углы



- Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, а другие их стороны являются дополнительными полупрямыми. Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .



- Угол равный  $90^\circ$  называется прямым. Менше  $90^\circ$  - острым. Больше  $90^\circ$  - тупым.



Прямой угол



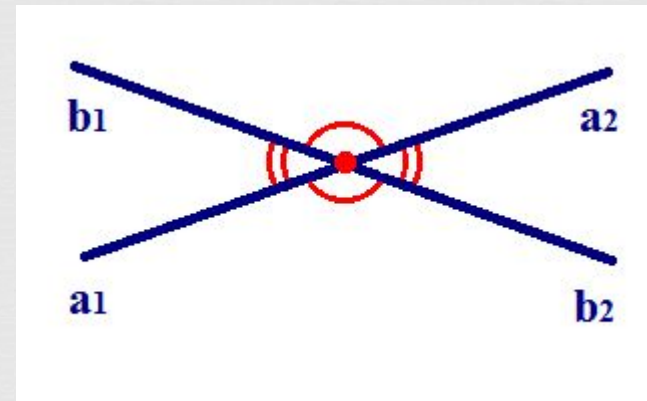
Острый угол



Тупой угол

# Вертикальные углы

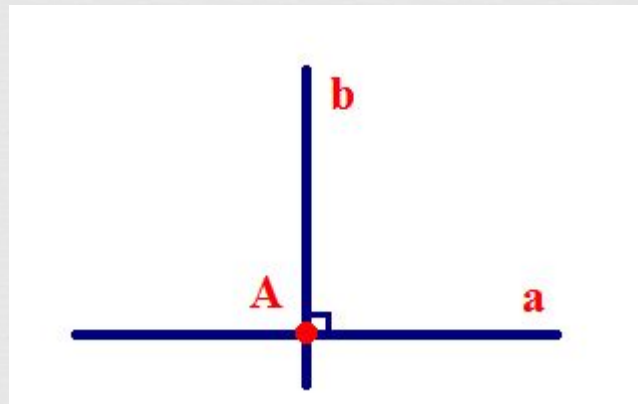
- Если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого угла, то такие углы называются вертикальными.



- **Теорема:** Вертикальные углы равны.  
**Доказательство.** Пусть  $a_1 b_1$  и  $a_2 b_2$  - данные вертикальные углы. Угол  $a_1 b_1$  является смежным с углом  $a_1 b_2$ . Угол  $a_1 b_2$  является смежным с углом  $a_2 b_2$ . Тогда  $a_1 b_1 + a_1 b_2 = 180^\circ$ ;  $a_2 b_2 + a_1 b_2 = 180^\circ$  откуда  $a_1 b_1 + a_1 b_2 = a_2 b_2 + a_1 b_2$ . Следовательно  $a_1 b_1 = a_2 b_2$ .

# Перпендикулярные прямые

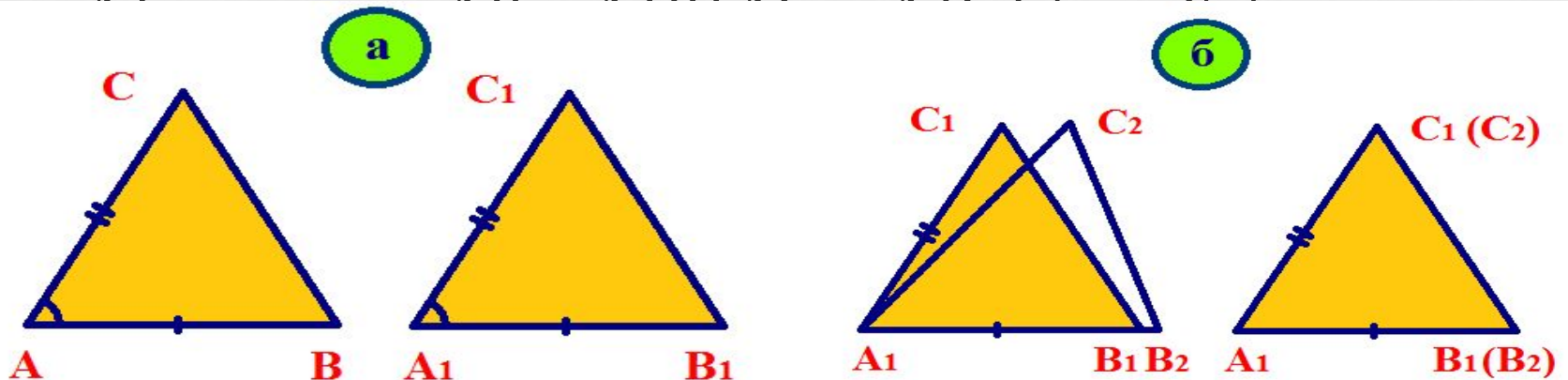
- Если две прямые пересекаются под прямым углом, то такие прямые называются перпендикулярными.
- **Теорема:** Через каждую точку прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.





# Признаки равенства треугольников

- **Теорема:** Если две стороны и угол между этими сторонами одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между этими сторонами другого треугольника, то такие треугольники равны.
- **Доказательство:**
- Пусть даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Угол  $A$

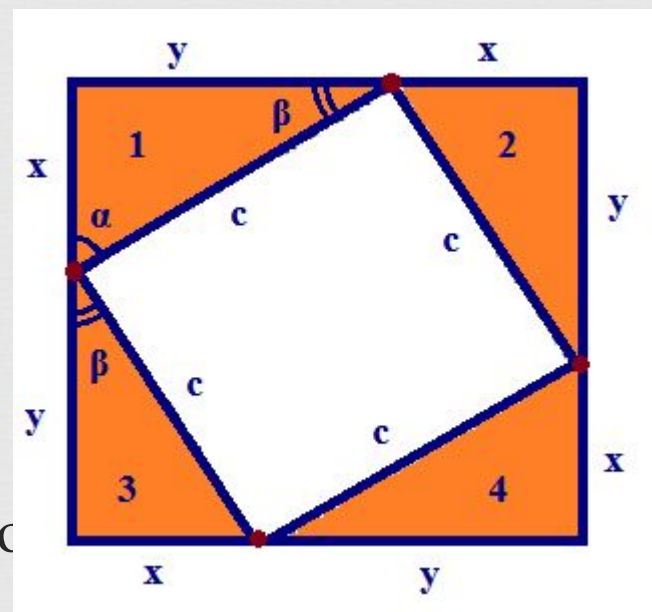


- Возьмем третий треугольник  $A_1B_2C_2 = ABC$ .  
Треугольники  $A_1B_1C_1 = A_1B_2C_2$  расположим таким образом, что стороны  $A_1B_1$  и  $A_1B_2$  лежат на одной полупрямой, а точка  $A_1$  является начальной точкой нашей полупрямой. Вершина  $B_2$  лежит на полупрямой  $A_1B_1$ , а вершина  $C_2$  лежит в той же полуплоскости, где и  $C_1$ . (рис 8б). Согласно аксиоме 6: на любой полупрямой, от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины. Следовательно сторона  $A_1B_2 = A_1B_1$ , т.е. точки  $B_1$  и  $B_2$  совпадают.
- Согласно аксиоме 7: от любой полупрямой, от ее начальной точки, в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры. Следовательно углы  $C_1A_1B_1$  и  $C_2A_1B_2$  равны, т.е. точки  $C_1$  и  $C_2$  совпадают. Таким образом, треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_1B_2C_2$  совпадают. Отсюда равны и треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

# Теорема Пифагора



- **Теорема:** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
- **Доказательство:**
- 1. Разделим каждую сторону большого квадрата на два отрезка  $x$  и  $y$  точкой. И проведем через эти точки отрезки.
- 2. Тогда треугольники 1,2,3,4 равны по двум сторонам и углу между ними.
- ∞ 3. Т.к. сумма углов  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , то фигура внутри большого квадрата тоже квадрат. (Все стороны =  $c$  и все углы =  $90^\circ$ )
- ∞ 4. Площадь большого квадрата равна сумме площадей малого квадрата и 4-х треугольников.
- ∞ Запишем:  $(x + y)^2 = c^2 + 4 \frac{xy}{2}$ ;  $x^2 + 2xy + y^2 = c^2 + 2xy$ ;  $\rightarrow x^2 + y^2 = c^2$ .



# Основные формулы планиметрии



1. Произвольный треугольник:
2. Прямоугольный треугольник:
3. Равносторонний треугольник:
4. Произвольный выпуклый четырехугольник
5. Параллелограмм
6. Ромб:
7. Прямоугольник:
8. Квадрат
9. Трапеция
10. Описанный многоугольник

# Произвольный треугольник

- ☞ Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.
- ☞ Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.  
( $a, b, c$  – стороны;  $\alpha, \beta, \gamma$  – противолежащие им углы;  $p$  – полупериметр;  $R$  – радиус описанной окружности;  $r$  – радиус вписанной окружности;  $S$  – площадь;  $h_a$  – высота, проведенная к стороне  $a$ ):
  - ☞  $S = \frac{1}{2}ah_a$ ;  $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ ;  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ;
  - $S = pr$ ;  $R = \frac{abc}{4S}$ ;
  - ☞  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  – теорема косинусов;
  - ☞  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$  – теорема синусов.

# Прямоугольный треугольник

☞ Центр описанной окружности совпадает с центром гипотенузы.

( $a, b$  – катеты;  $c$  – гипотенуза;  $ac, bc$  – проекции катетов на гипотенузу):

$$\text{☞ } S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$$

$$\text{☞ } c^2 = a^2 + b^2 - \text{Теорема Пифагора}$$

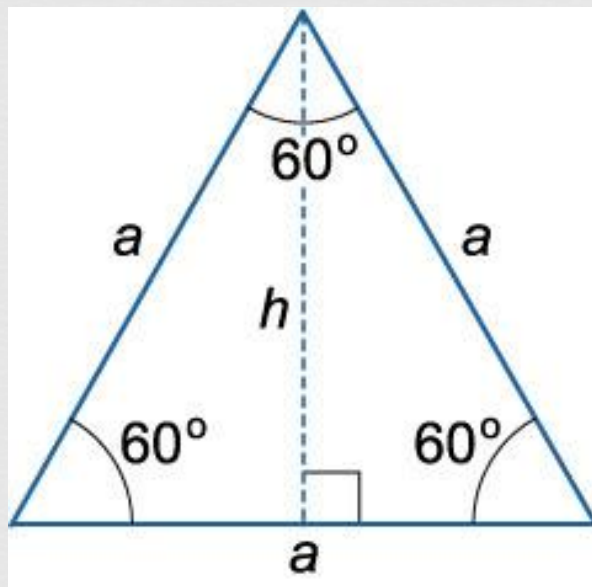
$$\text{☞ } \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c};$$

$$\text{☞ } a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \tan \alpha = b \cot \beta.$$

# Равносторонний треугольник

☞ Медиана = биссектрисе.  $OR = Or$ .

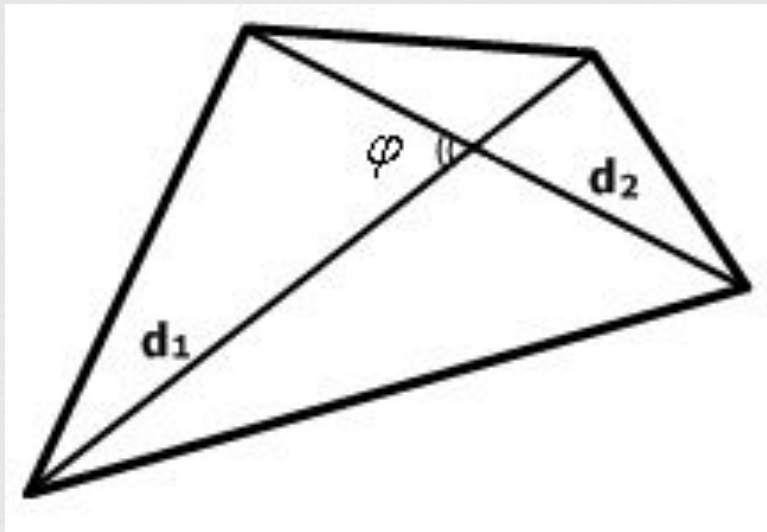
$$\text{☞ } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



# Произвольный выпуклый четырехугольник

$d_1$  и  $d_2$  – диагонали;  $\varphi$  – угол между ними;  $S$  – площадь)

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



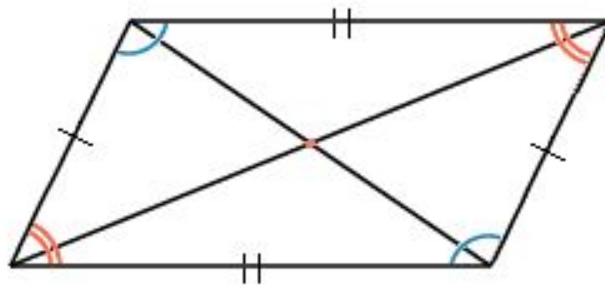


# Параллелограмм



☞ ( $a$  и  $b$  – смежные стороны;  $\alpha$  – угол между ними;  $h_a$  – высота, проведенная к стороне  $a$ ):

$$\infty S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

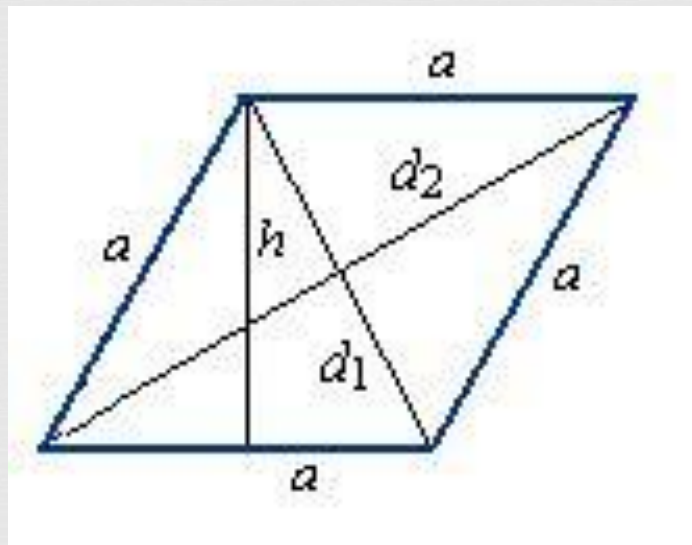


# Ромб



☞ В любой ромб можно вписать окружность.

$$\infty r = \frac{H}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}; \quad S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



# Прямоугольник и квадрат



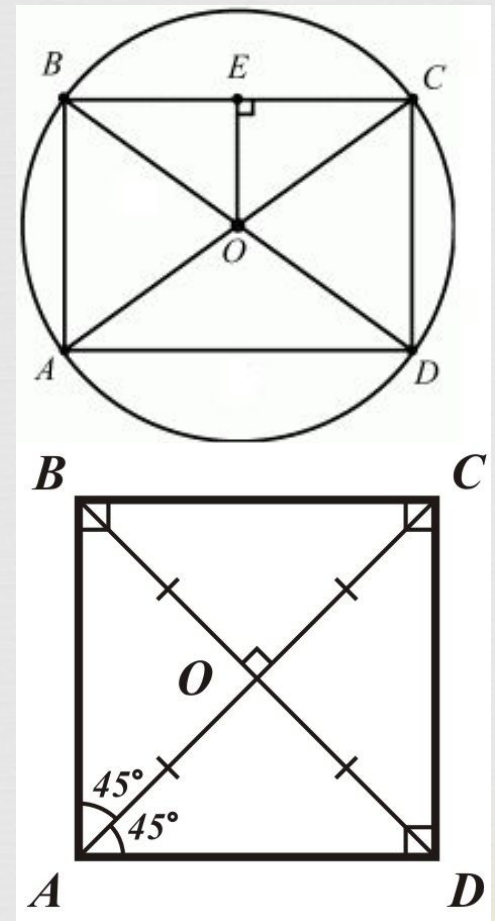
Около любого прямоугольника можно описать окружность.

$$R = \frac{d}{2}; \quad S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

Квадрат:

( $d$  – диагональ):

$$R = \frac{d}{2}; \quad r = \frac{a}{2}; \quad S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



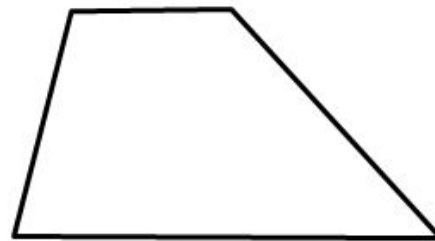
# Трапеция



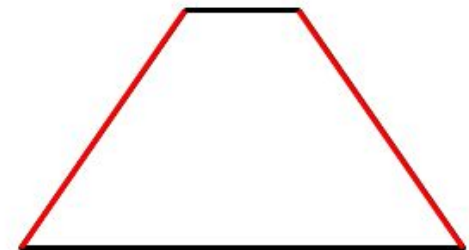
☞ ( $a$  и  $b$  – основания;  $h$  – расстояние между ними;  $l$  – средняя линия):

$$\text{☞ } l = \frac{a+b}{2};$$

$$\text{☞ } S = \frac{a+b}{2} h = lh$$



Разнобокая трапеция



Равнобокая трапеция



# Описанный многоугольник и правильный многоугольник

☞ Описанный многоугольник:

☞ ( $p$  – полупериметр;  $r$  – радиус вписанной окружности):

$$☞ S = pr.$$

☞ Правильный многоугольник:

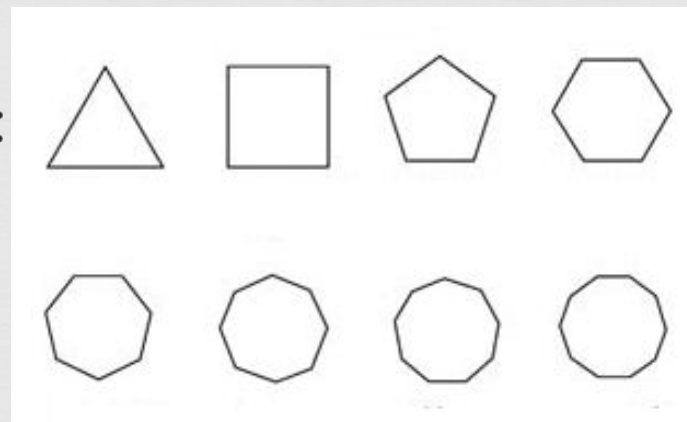
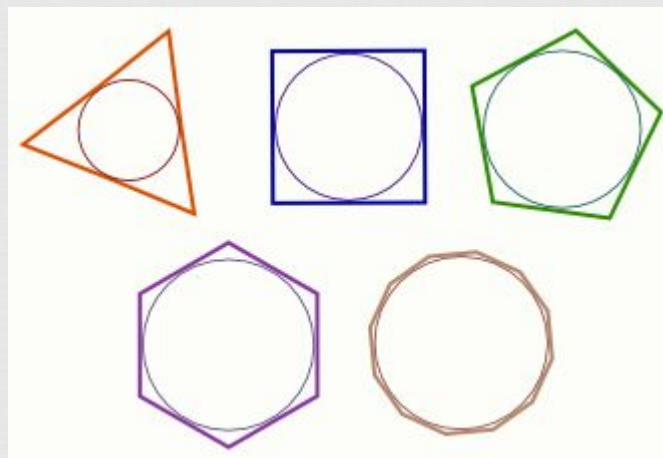
☞ ( $a_n$  – сторона правильного  $n$ -угольника;

$R$  – радиус описанной окружности;

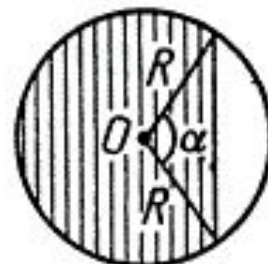
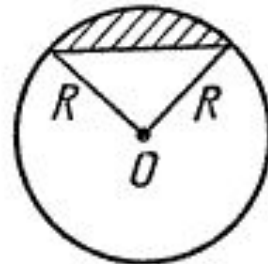
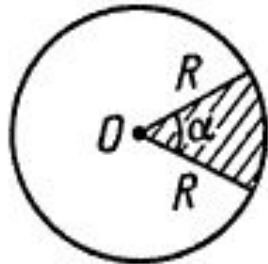
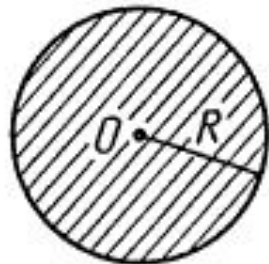
$r$  – радиус вписанной окружности):

$$☞ a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$$

$$☞ S = \frac{na_n r}{2}$$



# Окружность, круг



$R$  — радиус окружности (круга),

$C = 2\pi R$  — длина окружности,

$l = \frac{\pi R \alpha}{180}$  — длина дуги,

$S = \pi R^2$  — площадь круга,

$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$  — площадь кругового сектора,

$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta}$  — площадь кругового сегмента.

# Сектор



☞ ( $l$  – длина дуги, ограничивающей сектор;  $n^{\circ}$  – градусная мера центрального угла;  $\alpha$  – радианная мера центрального угла):

$$\text{☞ } l = \frac{\pi r n^{\circ}}{180^{\circ}} = r\alpha;$$

$$\text{☞ } S = \frac{\pi r^2 n^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

