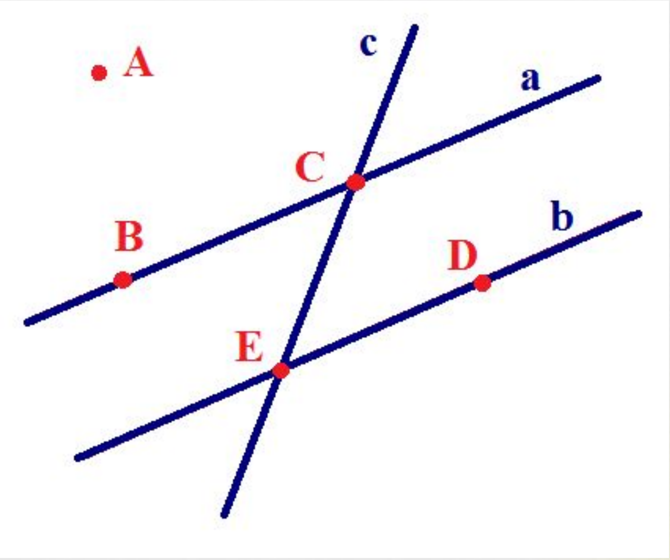
Планиметрия

2015год

Основные фигуры планиметрии

- Планиметрия - раздел геометрии, изучающий свойства геометрических фигур на плоскости.
- Основными фигурами на плоскости являются точка и прямая. Точки обычно обозначаются заглавными буквами - A, B, C, D. Прямые обозначаются строчными буквами - a, b, c, d.
- a, b, c - прямые.
- A, B, C, D, E - точки.
- Прямые a и b параллельны,
  прямые a и c пересекаются в точке C,
  прямые b и c пересекаются в точке E.
- Точка A не принадлежит ни одной пря
  Точка B принадлежит прямой a,
  точка D - прямой b,
  точка C - прямой a и c,
  точка E - прямой b и c.

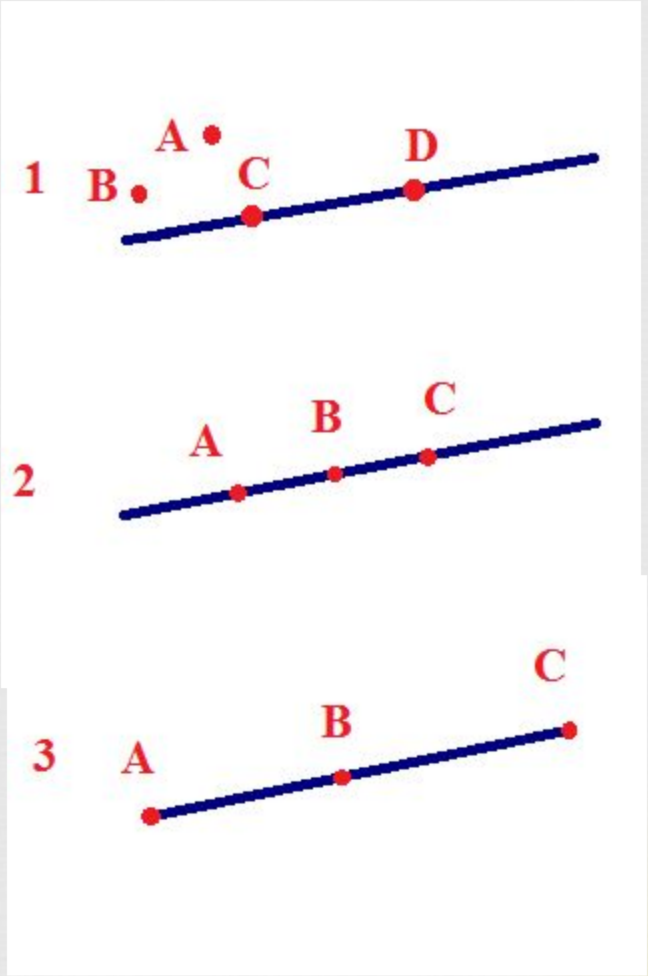


Аксиомы планиметрии

- 1. Для любой прямой на плоскости существуют точки принадлежащие ей и не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести только одну прямую.

- 2. Из трех точек, лежащих на прямой, только одна лежит между двумя другими.

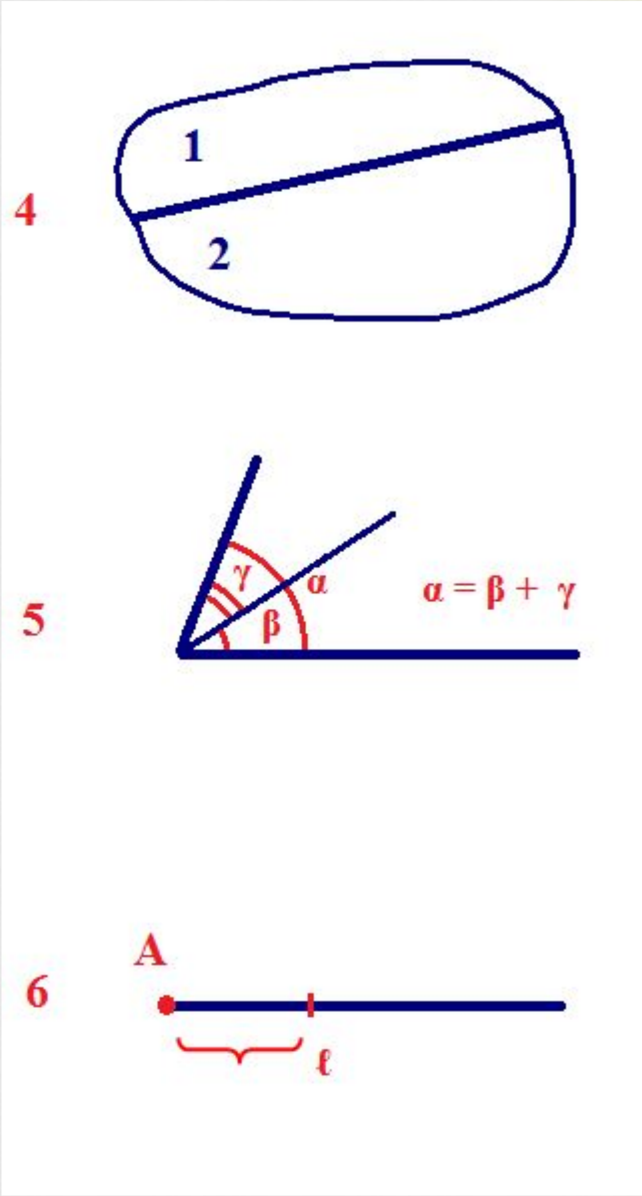
- 3. Любой отрезок имеет длину больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой точкой, лежащей на этом отрезке.



- 4. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

- 5. Любой угол имеет определенную градусную меру. Градусная мера любого угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучем, проходящим между его сторонами. Развернутый угол =180˚.

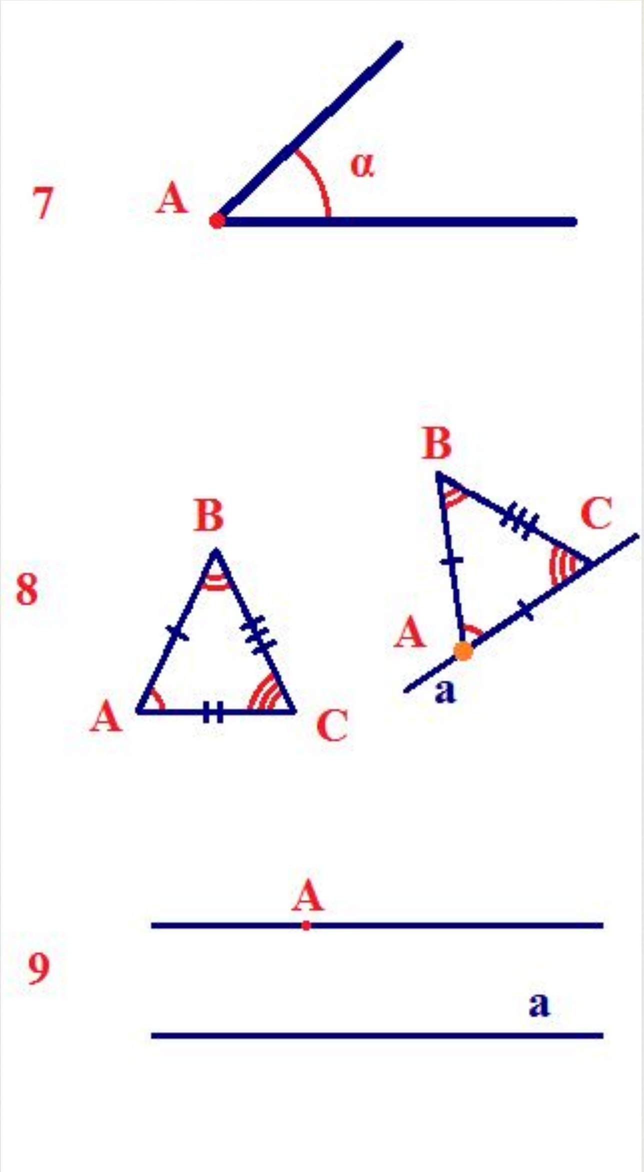
- 6. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины.



- 7. От любой полупрямой от ее начальной точки в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры, меньше 180˚.

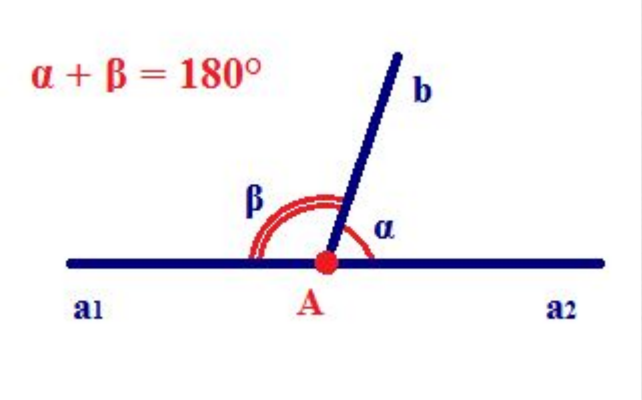
- 8. Для любого треугольника, существует треугольник равный данному, относительно заданной полупрямой в заданном расположении.

- 9. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую параллельную данной.



Смежные углы

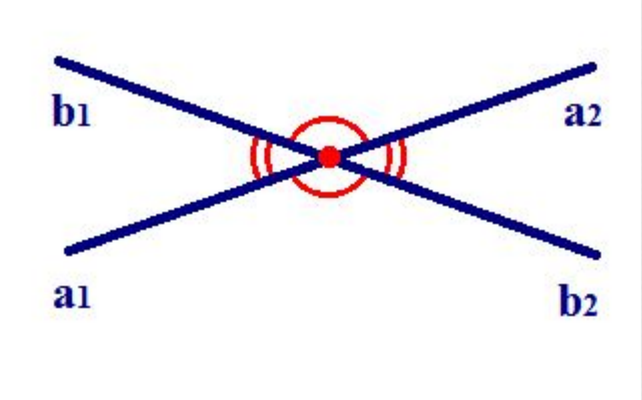
- Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, а другие их стороны являются дополнительными полупрямыми. Сумма смежных углов равна 180°.



- Угол равный 90° называется прямым. Меньше 90° - острым. Больше 90° - тупым.

Вертикальные углы

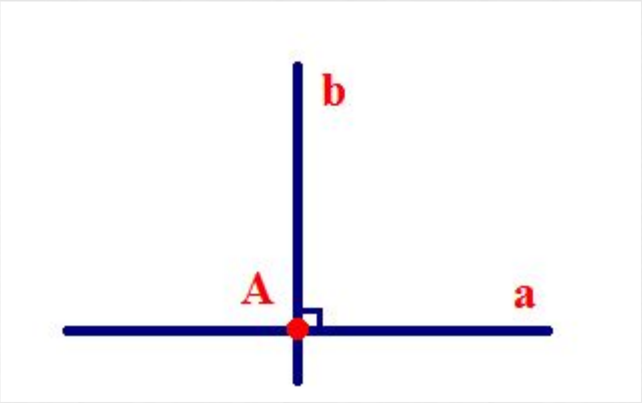
- Если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого угла, то такие углы называются вертикальными.



- **Теорема:** Вертикальные углы равны.
- **Доказательство.** Пусть a1 b1 и a2 b2 - данные вертикальные углы. Угол a1b1 является смежным с углом a1b2. Угол a1b2 является смежным с углом a2b2.
  Тогда a1b1+ a1b2= 180° ;   a2b2+ a1b2= 180°
  откуда a1b1+ a1b2= a2b2+ a1b2.
  Следовательно a1b1= a2b2.

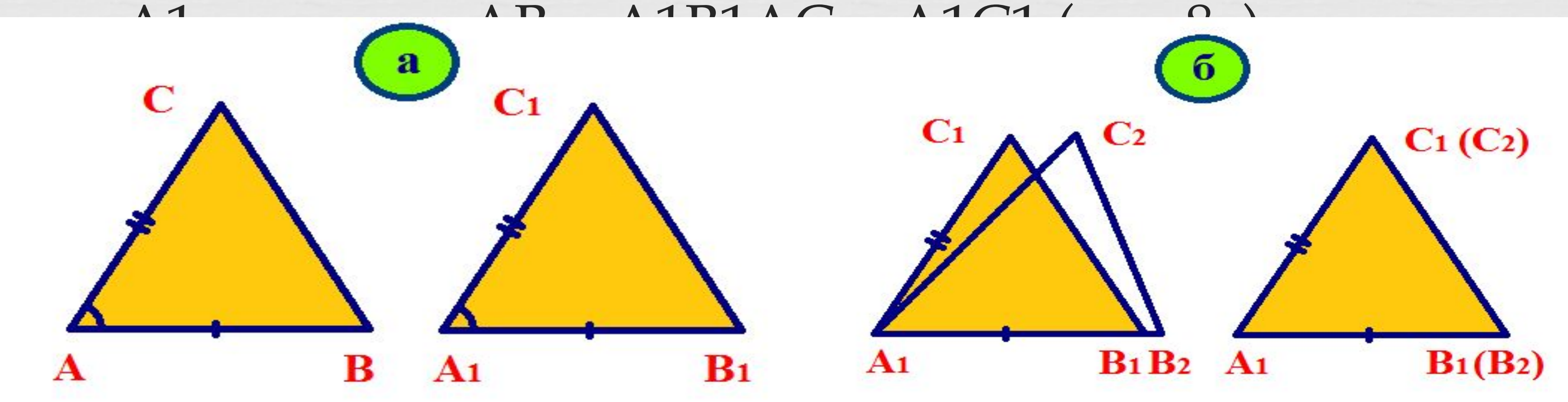
Перпендикулярные прямые

- Если две прямые пересекаются под прямым углом, то такие прямые называются перпендикулярными.
- **Теорема:** Через каждую точку прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.



Признаки равенства треугольников

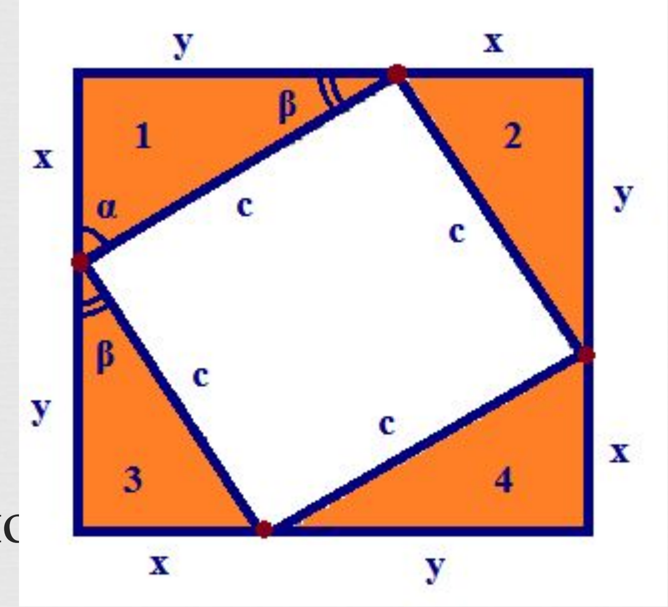
- **Теорема:** Если две стороны и угол между этими сторонами одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между этими сторонами другого треугольника, то такие треугольники равны.
- **Доказательство:**
- Пусть даны два треугольника ABC и A1B1C1. Угол A



- Возьмем третий треугольник A1B2C2 = ABC. Треугольники A1B1C1 = A1B2C2расположим таким образом, что стороны A1B1 и A1B2 лежат на одной полупрямой, а точка A1 является начальной точкой нашей полупрямой. Вершина B2 лежит на полупрямой A1B1, а вершина C2 лежит в той же полуплоскости, где и C1. (рис 8б). Согласно аксиоме 6: на любой полупрямой, от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины. Следовательно сторона A1B2 = A1B1, т.е. точки B1 и B2 совпадают.
- Согласно аксиоме 7: от любой полупрямой, от ее начальной точки, в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры. Следовательно углы C1A1B1 и C2A1B2 равны, т.е. точки C1 и C2 совпадают. Таким образом, треугольники A1B1C1 и A1B2C2 совпадают. Отсюда равны и треугольники ABC и A1B1C1.

Теорема Пифагора

- **Теорема:** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
- **Доказательство:**
- 1. Разделим каждую сторону большого квадрата на два отрезка **x** и **y** точкой. И проведем через эти точки отрезки.
- 2. Тогда треугольники 1,2,3,4 равны по двум сторонам и углу между ними.



- 3. Т.к. сумма углов $\alpha + \beta = 90°$, то фигура внутри большого квадрата тоже квадрат. (Все стороны = c и все углы = 90°)
- 4. Площадь большого квадрата равна сумме площадей малого квадрата и 4-х треугольников.
- Запишем: $(x+y)^2 = c^2 + 4\frac{xy}{2}$; $x^2 + 2xy + y^2 = c^2 + 2x; \rightarrow x^2 + y^2 = c^2$.

Основные формулы планиметрии

1. Произвольный треугольник:
2. Прямоугольный треугольник:
3. Равносторонний треугольник:
4. Произвольный выпуклый четырехугольник
5. Параллелограмм
6. Ромб:
7. Прямоугольник:
8. Квадрат
9. Трапеция
10. Описанный многоугольник

Произвольный треугольник

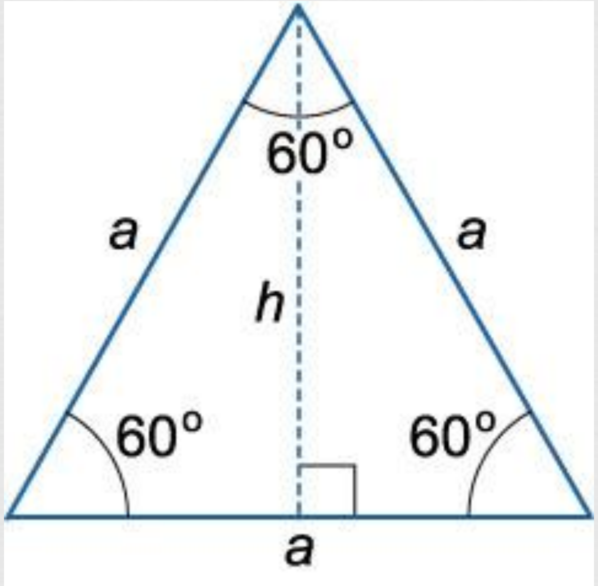
- Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.
- Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис. (a, b, c – стороны: α, β, γ - противолежащие им углы; p – полупериметр; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь; h_a– высота, проведенная к стороне a):
- $S = \frac{1}{2} a h_a;\quad S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha;\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$
  $S = pr;\quad R = \frac{abc}{4S};$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\alpha$- теорема косинусов;
- $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$- теорема синусов.

Прямоугольный треугольник

- Центр описанной окружности совпадает с центром гипотенузы.
(${a}, {b}$ – катеты; c – гипотенуза; a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу):
- $S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$
- $c^2 = a^2 + b^2$- Теорема Пифагора
- $\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c};$
- $a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha = b\cot\beta.$

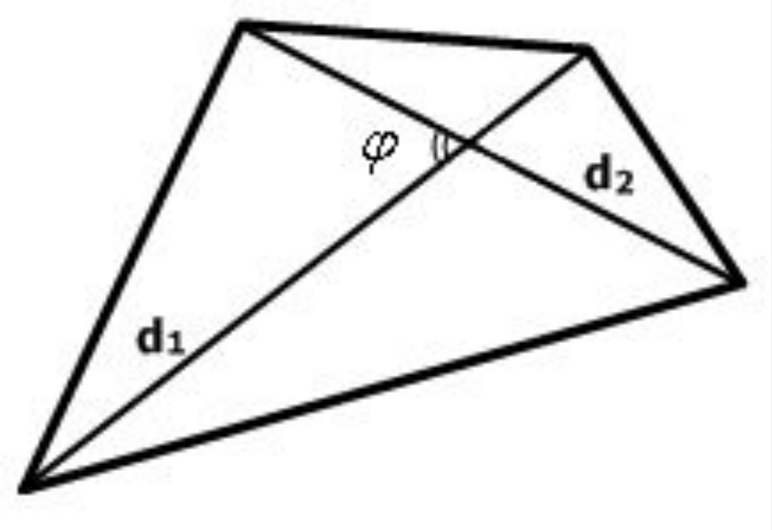
Равносторонний треугольник

- Медиана = биссектрисе. $OR = Or$.
- $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



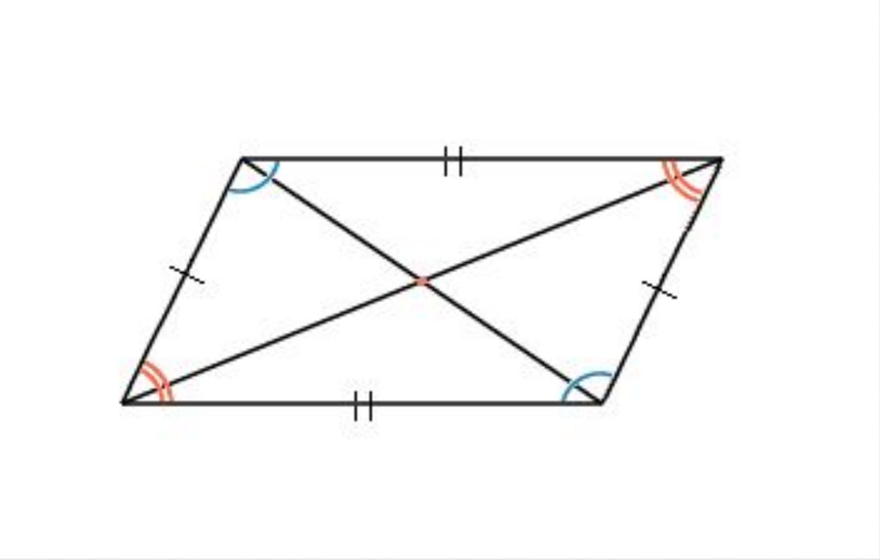
Произвольный выпуклый четырехугольник

- ($d1$ и $d2$ – диагонали; φ– угол между ними; S - площадь)
- $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$



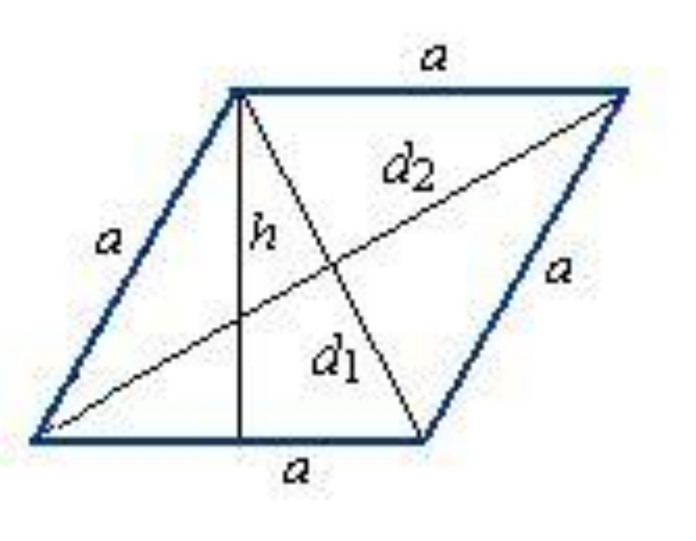
Параллелограмм

- (a и b – смежные стороны; α– угол между ними; h_a – высота, проведенная к стороне a):
- $S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1\,d_2\sin\varphi$



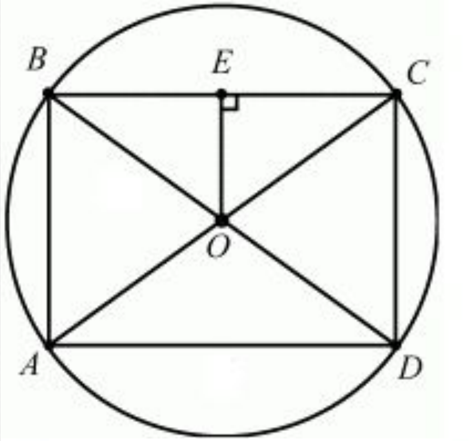
Ромб

- В любой ромб можно вписать окружность.
- $r = \frac{H}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$; $S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$



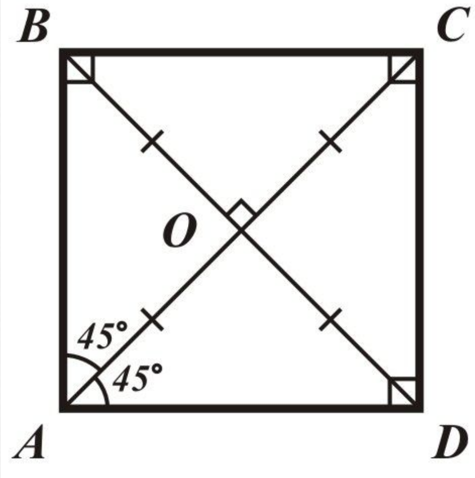
Прямоугольник и квадрат

- Около любого прямоугольника можно описать окружность.
- $R = \frac{d}{2}$; $S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$



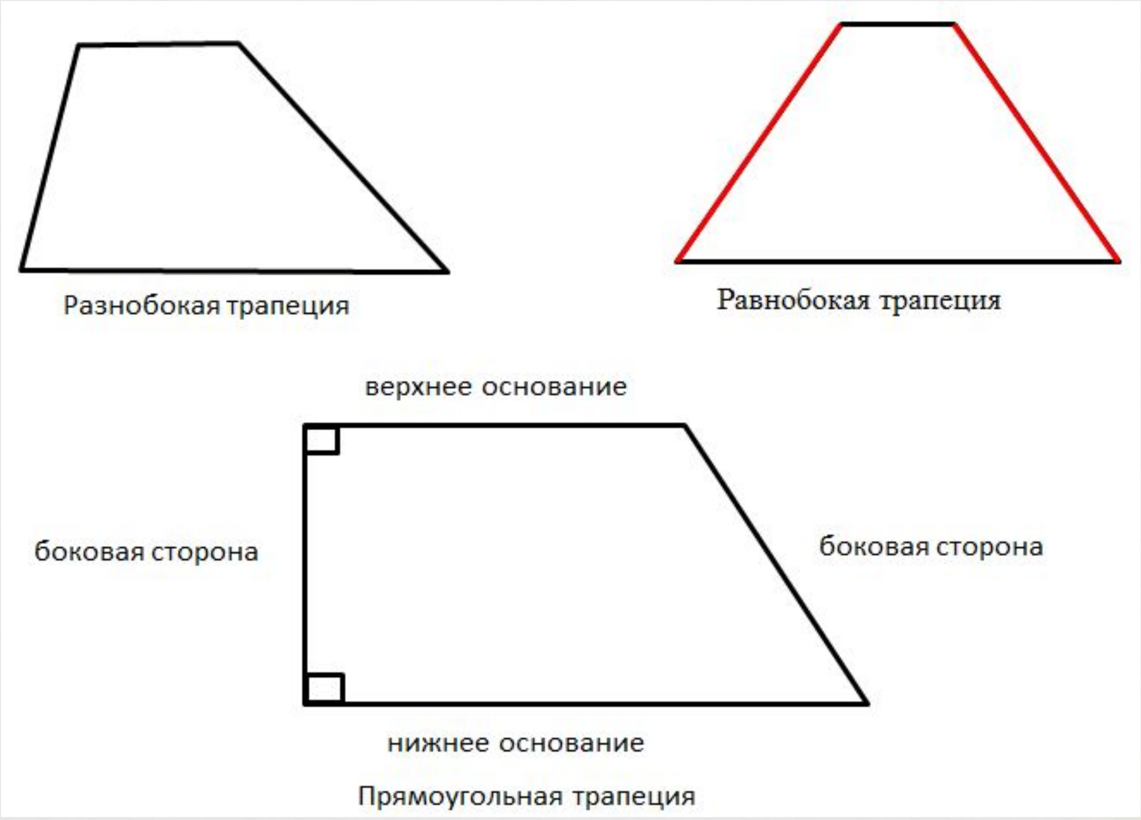
- Квадрат:

  (d – диагональ):
- $R = \frac{d}{2}$; $r = \frac{a}{2}$; $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$

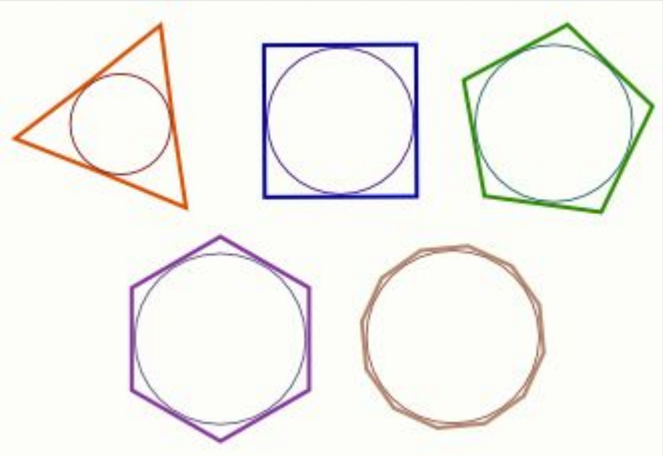


Трапеция

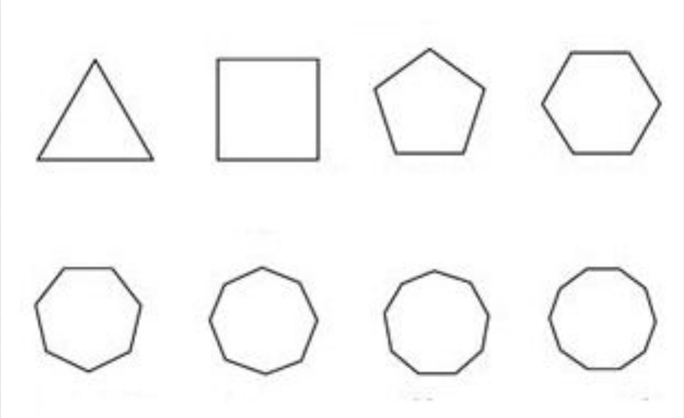
- (a и b – основания; h – расстояние между ними; l – средняя линия):
- $l = \frac{a+b}{2}$;
- $S = \frac{a+b}{2}h = lh$



Описанный многоугольник и правильный многоугольник

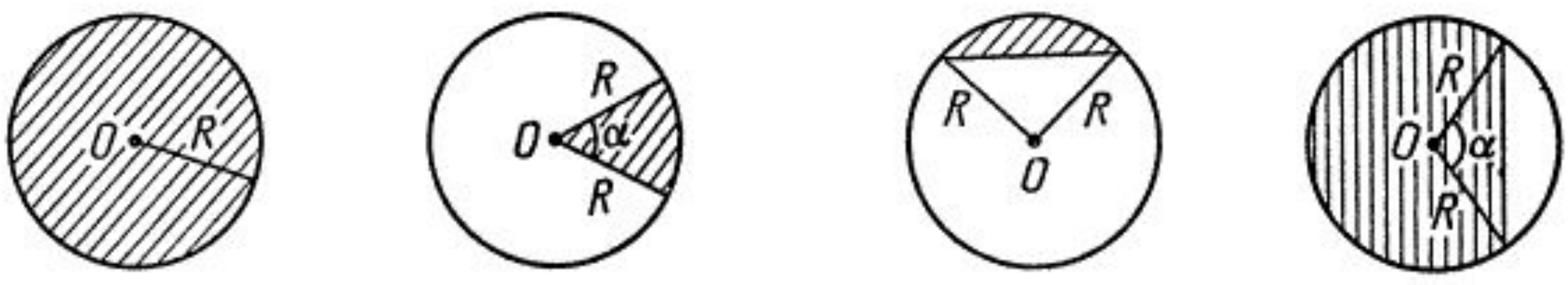


- Описанный многоугольник:
- (p – полупериметр; r – радиус вписанной окружности):
- $S = pr$.
- Правильный многоугольник:
- (a_n– сторона правильного n-угольника; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности):



- $a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$
- $S = \frac{n a_n r}{2}$

Окружность, круг



R — *радиус окружности (круга),*

$C = 2\pi R$ — *длина окружности,*

$l = \frac{\pi r\,\alpha}{180}$ — *длина дуги,*

$S = \pi R^2$ — *площадь круга,*

$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2\,\alpha}{360}$ — *площадь кругового сектора,*

$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360}\,\alpha \pm S_{\triangle}$ — *площадь кругового сегмента.*

Сектор

- (l – длина дуги, ограничивающей сектор; n^0 - градусная мера центрального угла; α - радианная мера центрального угла):
- $l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = \text{r}\alpha;$
- $S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^0} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$