

Планиметр

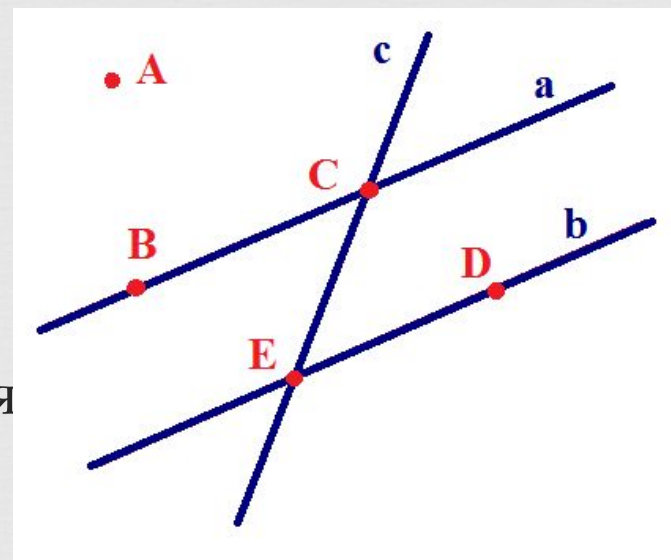
ия



2015год

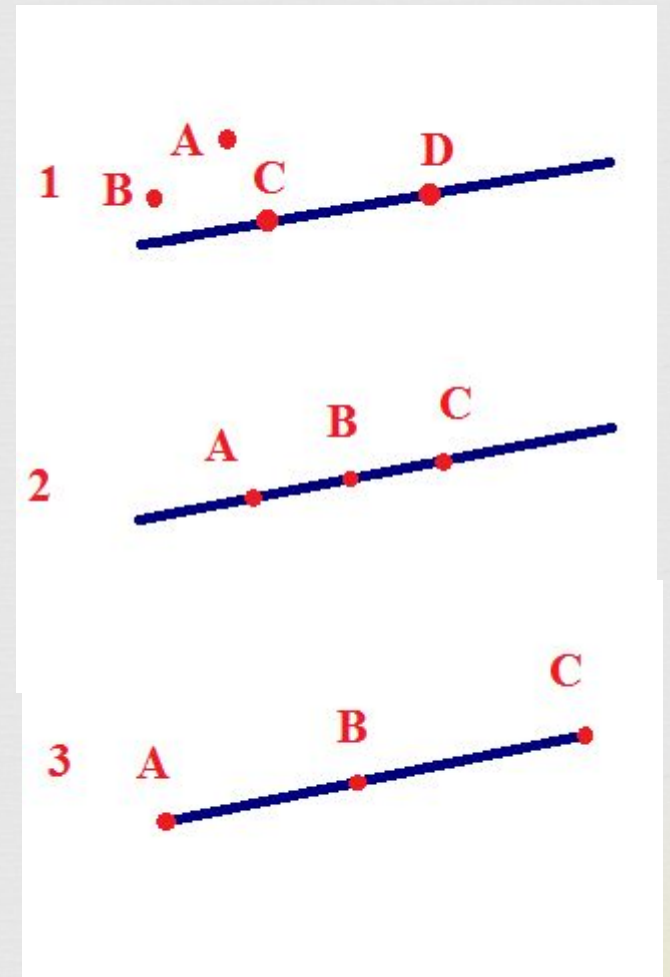
Основные фигуры планиметрии

- Планиметрия - раздел геометрии, изучающий свойства геометрических фигур на плоскости.
- Основными фигурами на плоскости являются точка и прямая. Точки обычно обозначаются заглавными буквами - A, B, C, D . Прямые обозначаются строчными буквами - a, b, c, d .
- a, b, c - прямые.
- A, B, C, D, E - точки.
- Прямые a и b параллельны, прямые a и c пересекаются в точке C , прямые b и c пересекаются в точке E .
- Точка A не принадлежит ни одной прямой.
Точка B принадлежит прямой a ,
точка D - прямой b ,
точка C - прямой a и c ,
точка E - прямой b и c .



Аксиомы планиметрии

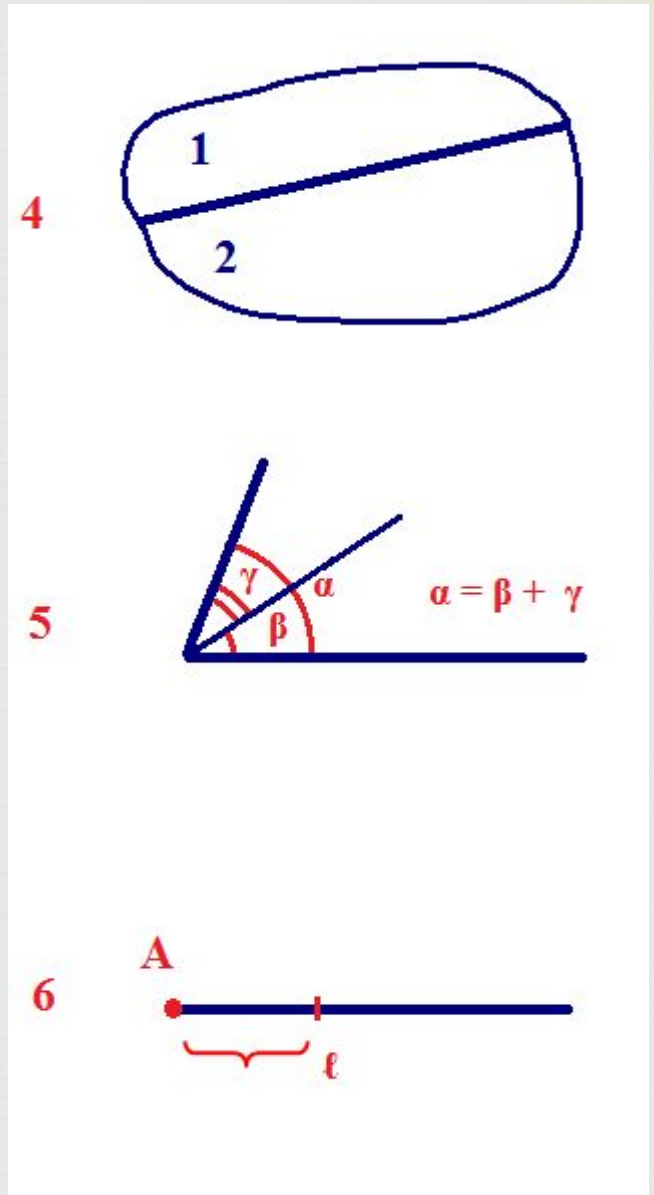
- 1. Для любой прямой на плоскости существуют точки принадлежащие ей и не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести только одну прямую.
- 2. Из трех точек, лежащих на прямой, только одна лежит между двумя другими.
- 3. Любой отрезок имеет длину больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой точкой, лежащей на этом отрезке



□ 4. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

□ 5. Любой угол имеет определенную градусную меру. Градусная мера любого угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучем, проходящим между его сторонами. Развернутый угол $=180^\circ$.

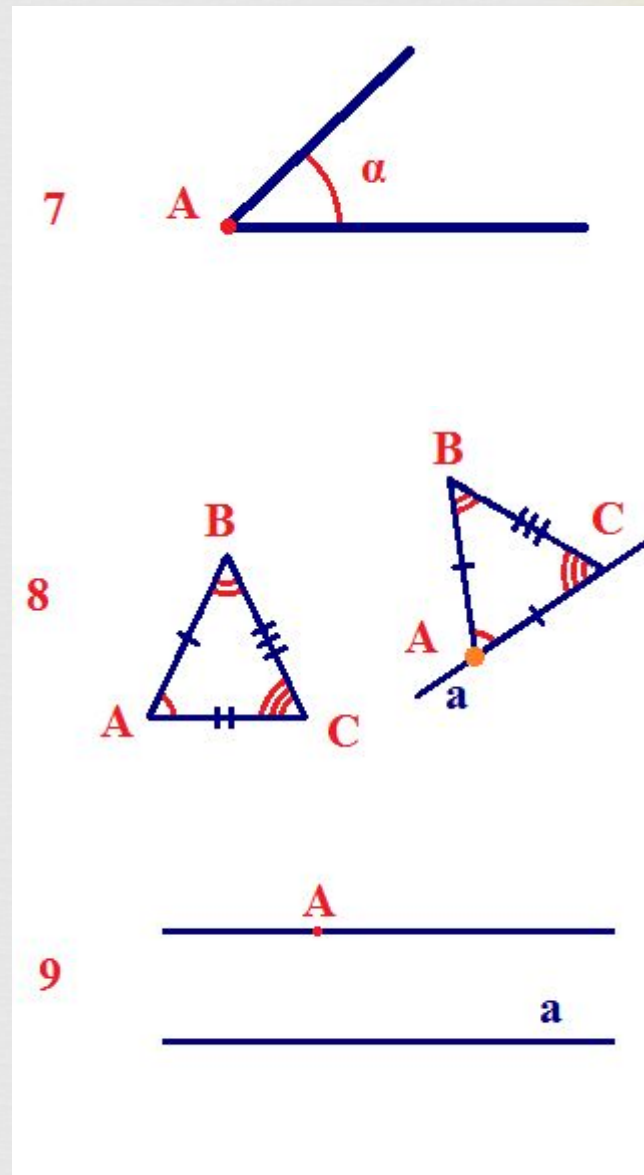
□ 6. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины.



□ 7. От любой полупрямой от ее начальной точки в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры, меньше 180° .

□ 8. Для любого треугольника, существует треугольник равный данному, относительно заданной полупрямой в заданном расположении.

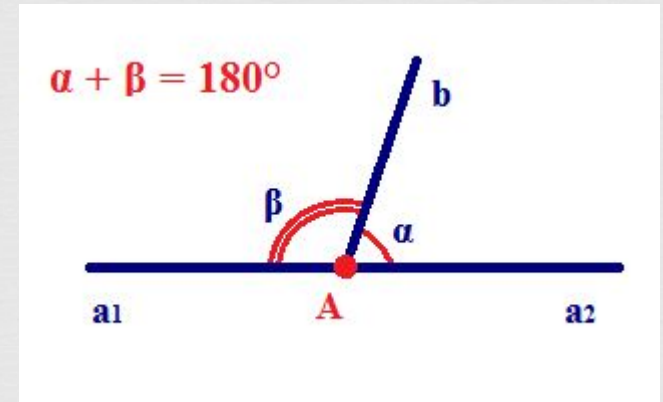
□ 9. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую параллельную данной.



Смежные углы



- Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, а другие их стороны являются дополнительными полупрямыми. Сумма смежных углов равна 180° .

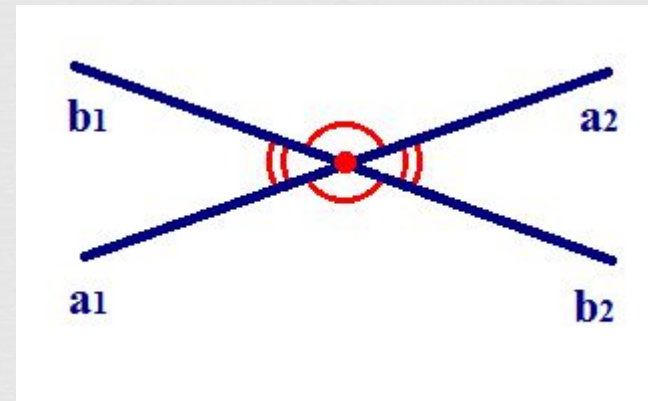


- Угол равный 90° называется прямым. Менше 90° - острым. Больше 90° - тупым.



Вертикальные углы

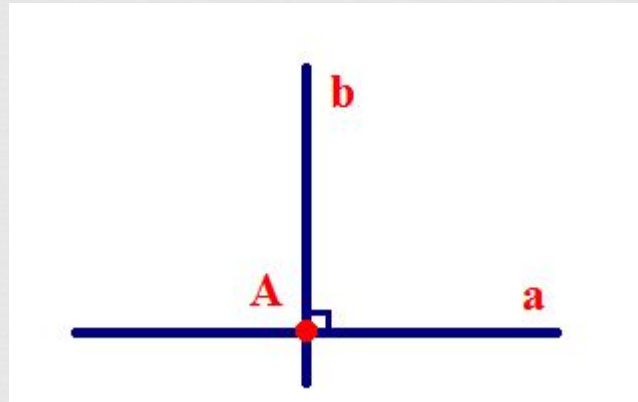
- Если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого угла, то такие углы называются вертикальными.



- **Теорема:** Вертикальные углы равны.
Доказательство. Пусть $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ - данные вертикальные углы. Угол $a_1 b_1$ является смежным с углом $a_1 b_2$. Угол $a_1 b_2$ является смежным с углом $a_2 b_2$. Тогда $a_1 b_1 + a_1 b_2 = 180^\circ$; $a_2 b_2 + a_1 b_2 = 180^\circ$ откуда $a_1 b_1 + a_1 b_2 = a_2 b_2 + a_1 b_2$. Следовательно $a_1 b_1 = a_2 b_2$.

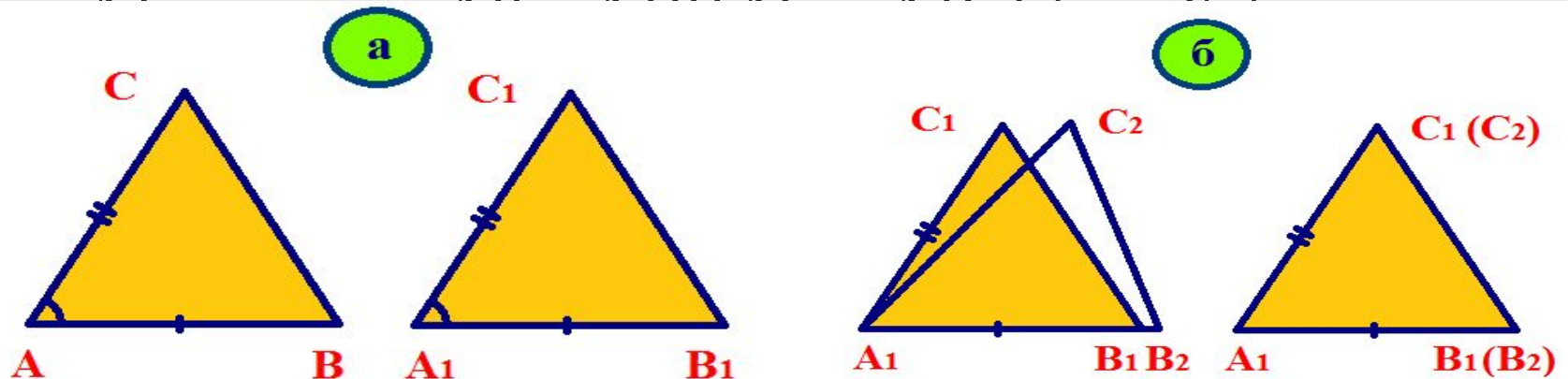
Перпендикулярные прямые

- Если две прямые пересекаются под прямым углом, то такие прямые называются перпендикулярными.
- **Теорема:** Через каждую точку прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.



Признаки равенства треугольников

- **Теорема:** Если две стороны и угол между этими сторонами одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между этими сторонами другого треугольника, то такие треугольники равны.
- **Доказательство:**
- Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Угол A

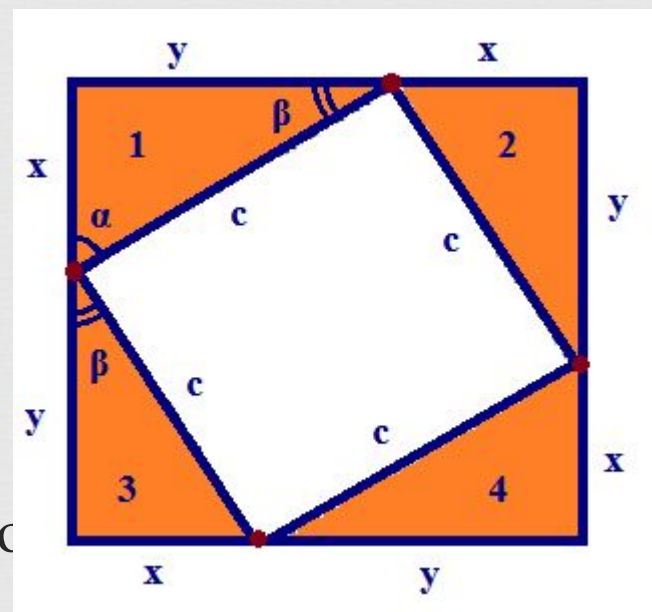


- Возьмем третий треугольник $A_1B_2C_2 = ABC$.
Треугольники $A_1B_1C_1 = A_1B_2C_2$ расположим таким образом, что стороны A_1B_1 и A_1B_2 лежат на одной полупрямой, а точка A_1 является начальной точкой нашей полупрямой. Вершина B_2 лежит на полупрямой A_1B_1 , а вершина C_2 лежит в той же полуплоскости, где и C_1 . (рис 8б). Согласно аксиоме 6: на любой полупрямой, от ее начальной точки можно отложить только один отрезок определенной длины. Следовательно сторона $A_1B_2 = A_1B_1$, т.е. точки B_1 и B_2 совпадают.
- Согласно аксиоме 7: от любой полупрямой, от ее начальной точки, в заданную полуплоскость можно отложить только один угол определенной градусной меры. Следовательно углы $C_1A_1B_1$ и $C_2A_1B_2$ равны, т.е. точки C_1 и C_2 совпадают. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$ совпадают. Отсюда равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Теорема Пифагора



- **Теорема:** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
- **Доказательство:**
- 1. Разделим каждую сторону большого квадрата на два отрезка x и y точкой. И проведем через эти точки отрезки.
- 2. Тогда треугольники 1,2,3,4 равны по двум сторонам и углу между ними.
- ∞ 3. Т.к. сумма углов $\alpha + \beta = 90^\circ$, то фигура внутри большого квадрата тоже квадрат. (Все стороны = c и все углы = 90°)
- ∞ 4. Площадь большого квадрата равна сумме площадей малого квадрата и 4-х треугольников.
- ∞ Запишем: $(x + y)^2 = c^2 + 4 \frac{xy}{2}$; $x^2 + 2xy + y^2 = c^2 + 2xy$; $\rightarrow x^2 + y^2 = c^2$.



Основные формулы планиметрии



1. Произвольный треугольник:
2. Прямоугольный треугольник:
3. Равносторонний треугольник:
4. Произвольный выпуклый четырехугольник
5. Параллелограмм
6. Ромб:
7. Прямоугольник:
8. Квадрат
9. Трапеция
10. Описанный многоугольник

Произвольный треугольник

- ☞ Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.
- ☞ Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.
(a, b, c – стороны; α, β, γ – противолежащие им углы; p – полупериметр; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь; h_a – высота, проведенная к стороне a):
 - ☞ $S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
 - $S = pr$; $R = \frac{abc}{4S}$;
 - ☞ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ – теорема косинусов;
 - ☞ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ – теорема синусов.

Прямоугольный треугольник

☞ Центр описанной окружности совпадает с центром гипотенузы.

(a, b – катеты; c – гипотенуза; ac, bc – проекции катетов на гипотенузу):

$$\text{☞ } S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$$

$$\text{☞ } c^2 = a^2 + b^2 - \text{Теорема Пифагора}$$

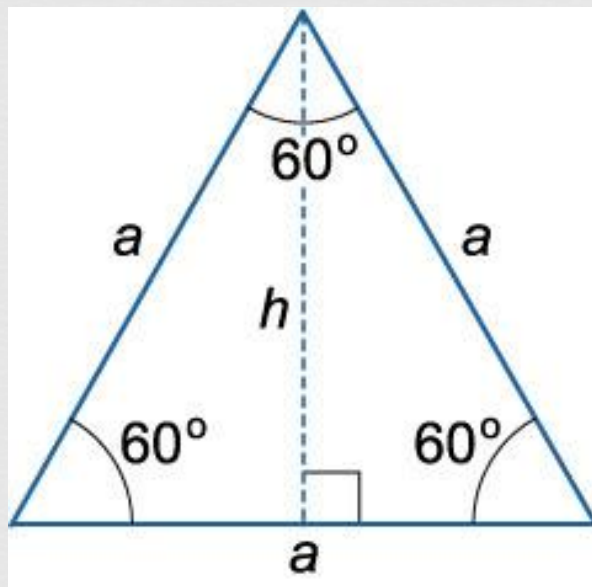
$$\text{☞ } \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c};$$

$$\text{☞ } a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \tan \alpha = b \cot \beta.$$

Равносторонний треугольник

☞ Медиана = биссектрисе. $OR = Or$.

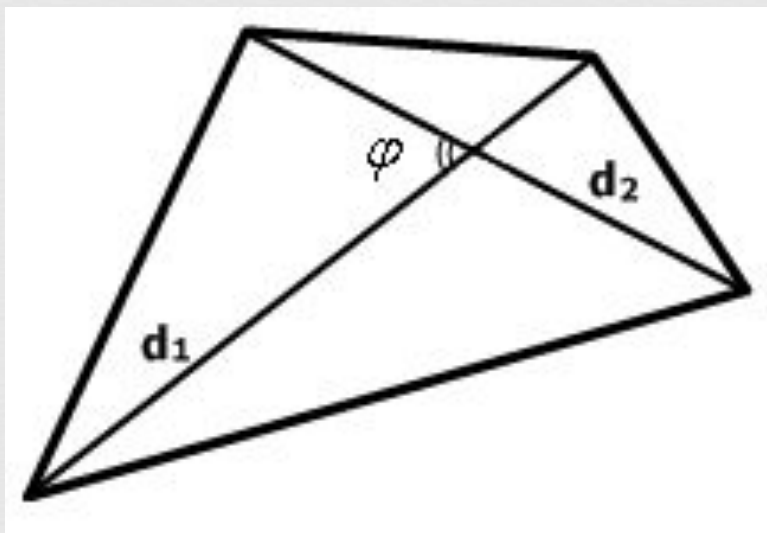
$$\text{☞ } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Произвольный выпуклый четырехугольник

d_1 и d_2 – диагонали; φ – угол между ними; S – площадь)

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

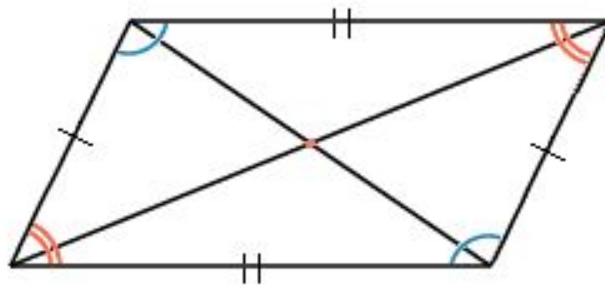


Параллелограмм



☞ (a и b – смежные стороны; α – угол между ними; h_a – высота, проведенная к стороне a):

$$\text{☞ } S = ah_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

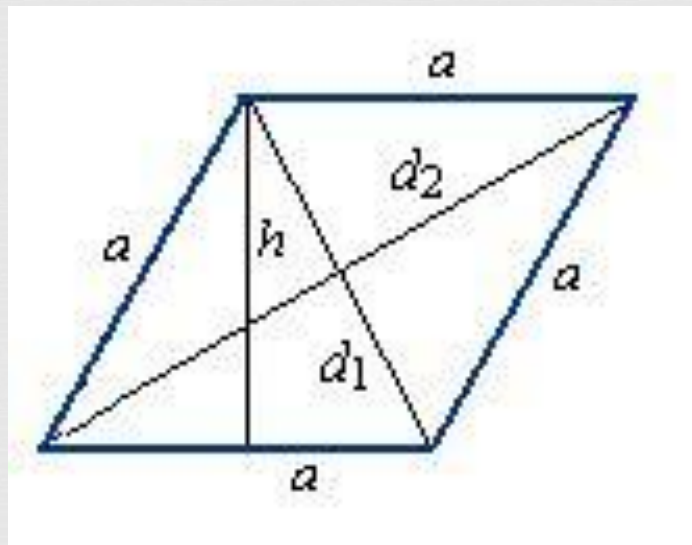


Ромб



☞ В любой ромб можно вписать окружность.

$$\text{☞ } r = \frac{H}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}; \quad S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



Прямоугольник и квадрат



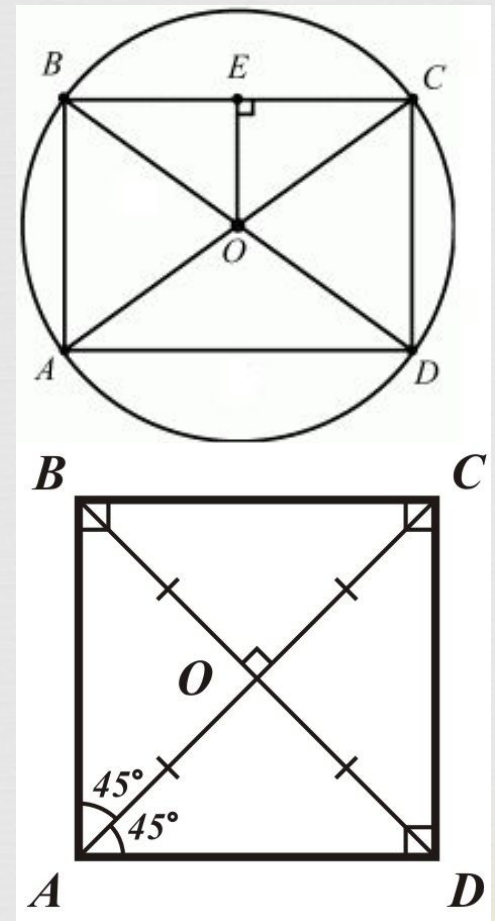
Около любого прямоугольника можно описать окружность.

$$R = \frac{d}{2}; \quad S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$

Квадрат:

(d – диагональ):

$$R = \frac{d}{2}; \quad r = \frac{a}{2}; \quad S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



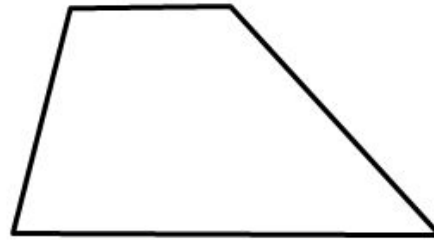
Трапеция



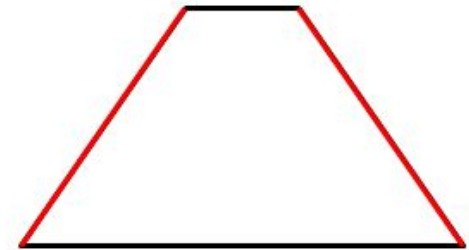
☞ (a и b – основания; h – расстояние между ними; l – средняя линия):

$$\text{☞ } l = \frac{a+b}{2};$$

$$\text{☞ } S = \frac{a+b}{2} h = lh$$



Разнобокая трапеция



Равнобокая трапеция



Описанный многоугольник и правильный многоугольник

☞ Описанный многоугольник:

☞ (p – полупериметр; r – радиус вписанной окружности):

$$\text{☞ } S = pr.$$

☞ Правильный многоугольник:

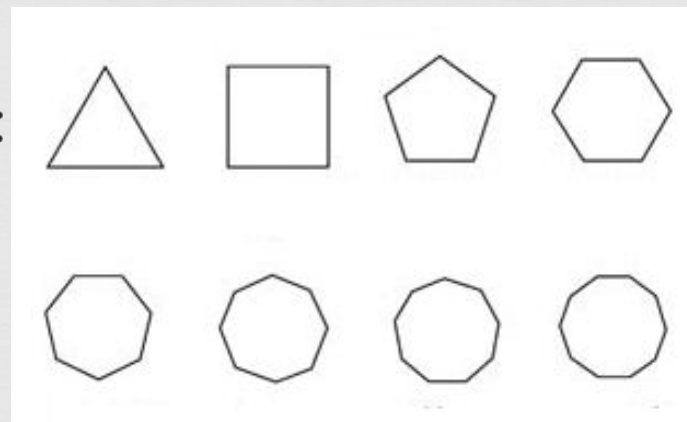
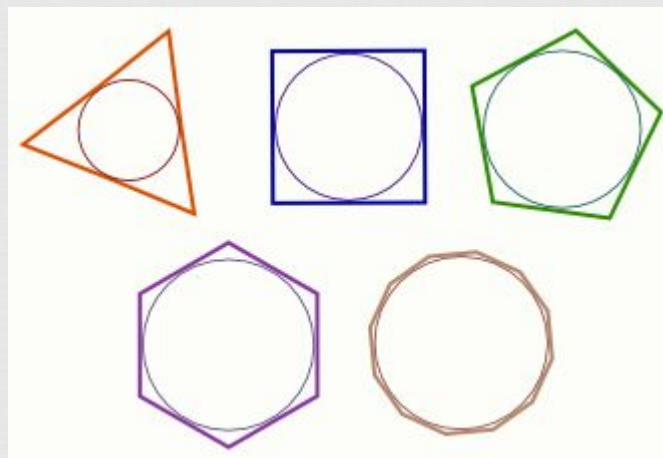
☞ (a_n – сторона правильного n -угольника;

R – радиус описанной окружности;

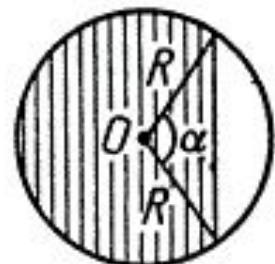
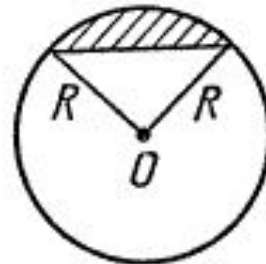
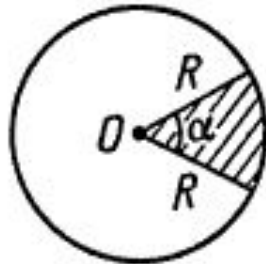
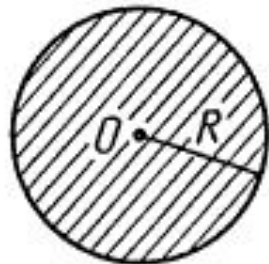
r – радиус вписанной окружности):

$$\text{☞ } a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$$

$$\text{☞ } S = \frac{na_n r}{2}$$



Окружность, круг



R — радиус окружности (круга),

$C = 2\pi R$ — длина окружности,

$l = \frac{\pi R \alpha}{180}$ — длина дуги,

$S = \pi R^2$ — площадь круга,

$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ — площадь кругового сектора,

$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta}$ — площадь кругового сегмента.

Сектор



☞ (l – длина дуги, ограничивающей сектор; n° – градусная мера центрального угла; α – радианная мера центрального угла):

$$\text{☞ } l = \frac{\pi r n^{\circ}}{180^{\circ}} = r\alpha;$$

$$\text{☞ } S = \frac{\pi r^2 n^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

