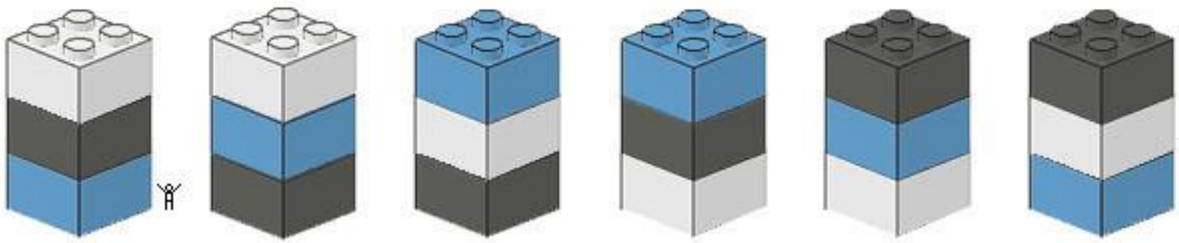
Комбінаторика, як розділ математики. Сполуки без повторень. Найпростіші комбінаторні задачі.

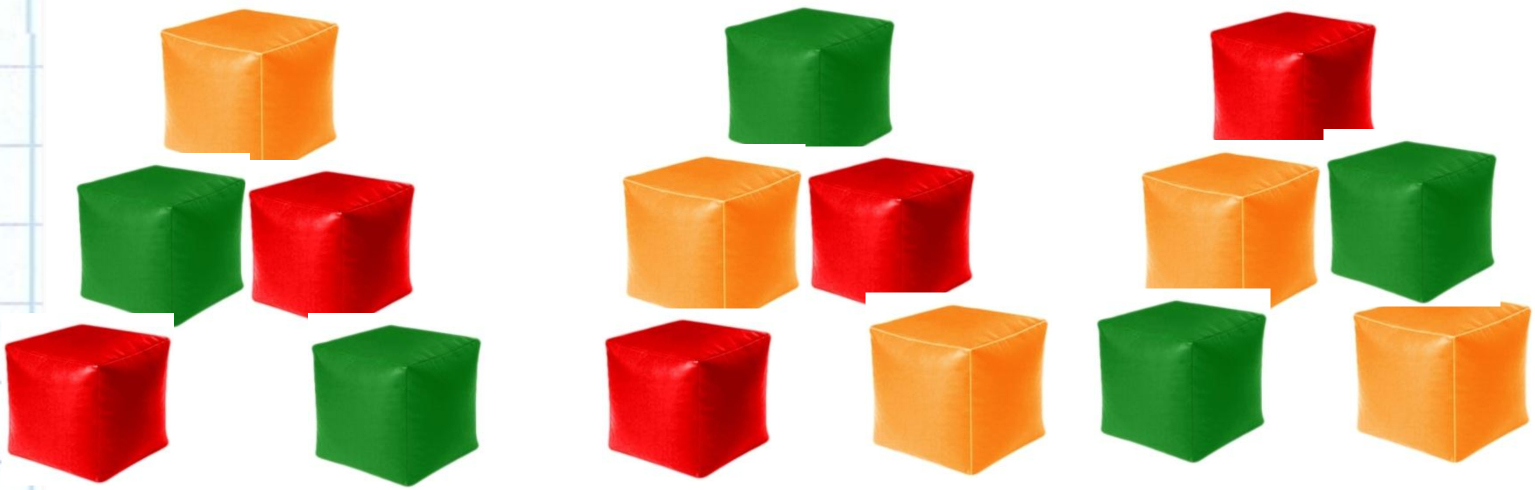


Впорядкована множина

- Множина, кожному елементу якої поставлений у відповідність певний номер називається впорядкованою.
- Будь-яку впорядковану множину, що містить більше одного елемента можна впорядкувати декількома способами.
- Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони складаються з різних елементів або мають різний порядок одних і тих же елементів.
- Різні впорядковані множини, що відрізняються лише порядком елементів (тобто можуть бути отримані з однієї множини) називаються перестановками цієї множини.

Задача 1

Скількома різними способами можна розставити 3 різнокольорових кубики?



1 2 3 4 5 6

- Розділ математики, який досліджує можливі способи утворення різних підмножин з елементів деякої множини за певних умов, називається ***комбінаторикою***.

- Задачі, в яких потрібно знайти кількість можливих способів утворення таких підмножин, називаються ***комбінаторними***.

Для розв'язування комбінаторних задач доцільно **використовувати таблиці** або **будувати «дерево».**

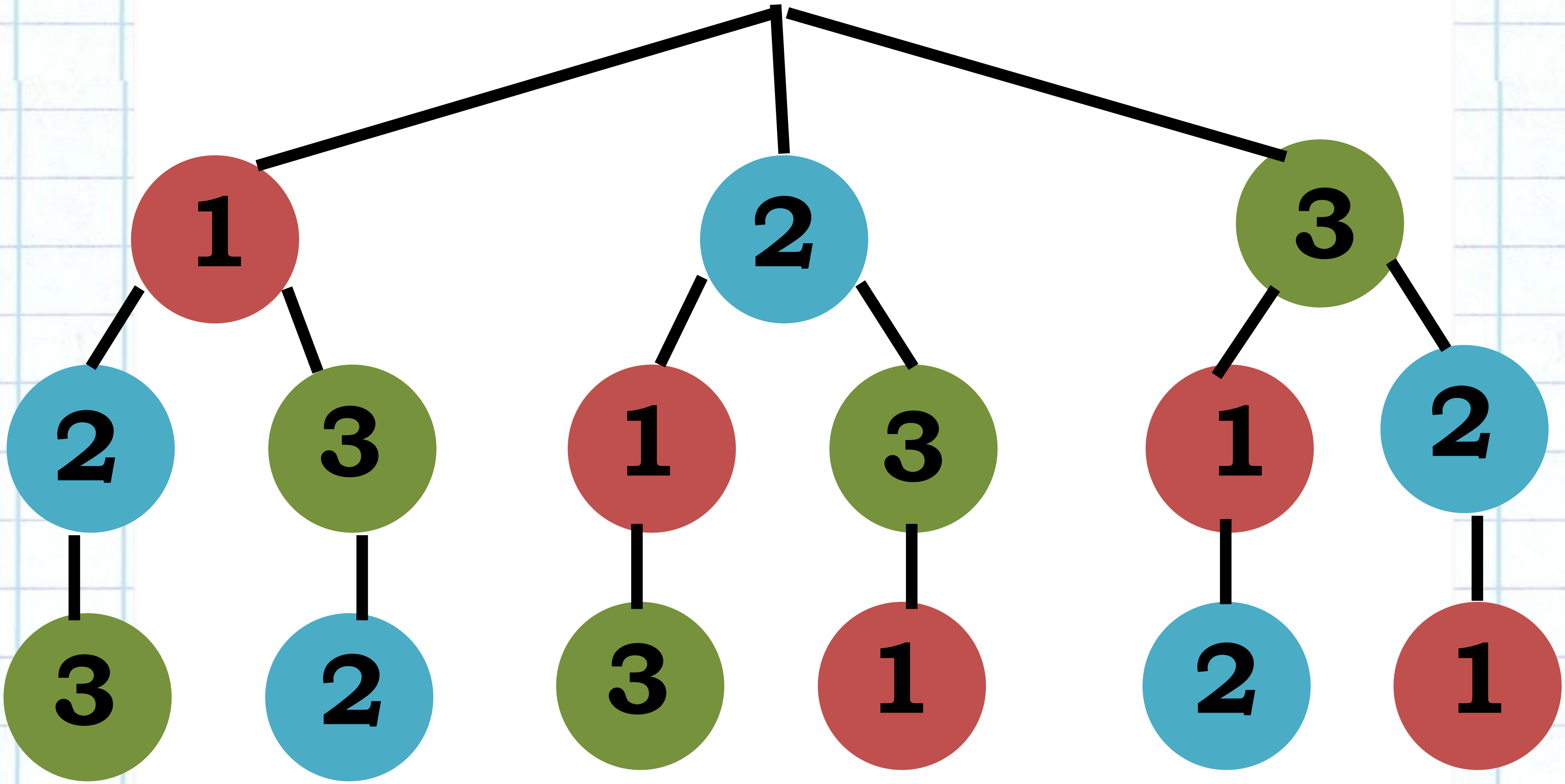
Наприклад:

Скільки натуральних трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, використовуючи в запису числа кожну з них не більше одного разу?

Складемо **таблицю**

На місці сотень	1		2		3	
На місці десятків	2	3	1	3	1	2
На місці одиниць	3	2	3	1	2	1
	1	2	3	4	5	6

Розглянемо розв’язування даної задачі побудовою **«дерева» варіантів**



Отже, всього $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

$n!$ (ен факторіал) –
добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n.
Наприклад,

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

В основі розв'язування багатьох комбінаторних задач лежать два основних правила – правило суми і правило добутку.

Правила суми і добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

Правило суми: якщо доводиться вибирати **або** перший елемент, **або** другий, **або** третій і т. д. елемент, кількості способів вибору кожного елемента **додають**.

Правило добутку: коли доводиться вибирати набір у який входить **і** один, **і** другий, **і** третій, і т. д. елемент, кількості способів вибору **перемножають.**

Перестановки

Перестановки множини А (позначається P_n) – це множини, що складаються з тих самих елементів, що й А, але розставлених у різному порядку.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1)$$

Розміщення

Будь-яка впорядкована підмножина з k елементів даної n-елементної множини називається розміщенням з n елементів по k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Комбінації

Комбінацією з n елементів по k називається будь-яка невпорядкована, k - елементна підмножина даної

n - елементної множини.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Потренуйтеся працювати з комбінаторними формулами:

1. Обчислити:

а) $\dfrac{P_5 + P_4}{P_3}$; б) $\dfrac{P_{10} - P_9}{P_8}$; в) $\dfrac{P_{10} \cdot P_9}{P_8 \cdot P_{11}}$;

г) C_8^4; ґ) C_7^6; д) C_{22}^{20}; е) A_8^2; є) $\dfrac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3}$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $A_x^2 = 20$; б) $A_{x+1}^2 = 156$; в) $C_x^2 = 153$;

г) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$; ґ) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.

Вибір формули у задачах

Чи враховується порядок?
(Чи є множина впорядкованою?)

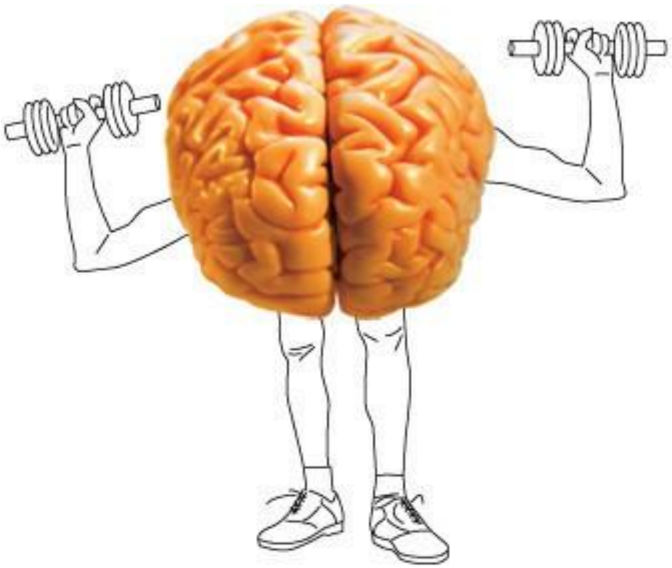
Так → *Усі елементи приймають участь?*

- *Так* → Перестановки
- *Ні* → Розміщення

Ні → Комбінації

Перестановки	Розміщення	Комбінації
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Потренуйтеся розв'язувати комбінаторні задачі у вигляді тестів на наступних слайдах.



З 30 учасників зборів треба вибрати голову і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

870

30!

15

435

інша

Скількома способами можна вибрати трьох чергових з групи в 20 чоловік?

20!

6840

6

1140

інша

Скількома способами можна вісім учнів вишикувати в колону по одному?

8

40320

256

64

інша

У коробці знаходяться 10 білих і 6 чорних куль. Скількома способами з коробки можна витягти одну кулю будь-якого кольору?

6

10

16

60

інша

Маємо чотири різні конверти без марок і 3 різні марки. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

3

7

4

12

інша

Успіхів!