ПРОСТРАНСТВО I_sR ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

- Пространство I_sR центрированных интервалов
- Сопряженный интервал
- Расширенное множество интервалов
- Операции интервального сложения и умножения на число
- Операция интервального умножения
- Операция интервального деления
- Непрерывность интервальных операций
- Интервальные отображения
- Список рекомендуемой литературы

ПРОСТРАНСТВО I_sR ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

IR – множество замкнутых вещественных интервалов $[a, b]$, где $a \le b$, $a, b \in R^1$

$$[a, b] = [x - v_x, x + v_x], \qquad (1)$$

где

$$x = (a+b) / 2, \; v_x = (b-a) / 2$$

$$[a, b] \leftrightarrow \langle x, v_x \rangle, \qquad (2)$$

где $x \in R^1$, $v_x \in R^+$

$$IR \leftrightarrow I_sR$$

Сопряженный интервал

$$\overline{[a,\ b]} = [b,\ a] \qquad (3)$$

$\overline{IR}$ – множество интервалов, сопряженных с интервалами из IR

$$\overline{[a,\ b]} = [x + v_x,\ x - v_x]$$

$$\overline{\langle X \rangle} \leftrightarrow \langle x,\ -v_x \rangle$$

Сопряженный интервал

$$\overline{IR} \leftrightarrow \overline{I_s R}$$

$$IR \cap \overline{IR} = R^1$$

$$I_s R \cap \overline{I_s R} = R^1 \qquad (4)$$

Расширенное множество интервалов

$A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ элементы множества $\mathbf{IR} = IR \cup \overline{IR}$,

$\langle A \rangle, \langle B \rangle, \ldots, \langle X \rangle, \langle Y \rangle, \ldots$ – элементы множества $\mathbf{I}_s\mathbf{R} = I_s R \cup \overline{I_s R}$

если $\langle X \rangle \in I_s R$, то $\langle \overline{X} \rangle \in \overline{I_s R}$

если $\langle X \rangle \in \overline{I_s R}$, то $\langle \overline{X} \rangle \in I_s R$

$$A \leftrightarrow \langle A \rangle = \langle a, v_a \rangle, \; B \leftrightarrow \langle B \rangle = \langle b, v_b \rangle,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$X \leftrightarrow \langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle, \; Y \leftrightarrow \langle Y \rangle = \langle y, v_y \rangle, \qquad (5)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y,\ v_x + v_y \rangle \qquad (6)$$

Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y,\ v_x + v_y \rangle \qquad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x,\ |\lambda|\ v_x \rangle,\ \lambda \in R^1$$

Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y,\ v_x + v_y \rangle \qquad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x,\ |\lambda|\, v_x \rangle,\ \lambda \in R^1$$

$$\langle X \rangle - \langle Y \rangle = \langle X \rangle + (-1) \langle Y \rangle = \langle x - y,\ v_x + v_y \rangle$$

Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle - \langle X \rangle \neq \langle 0 \rangle = \langle 0,\ 0 \rangle$$

$$\langle X \rangle - \langle \overline{X} \rangle = \langle 0 \rangle = \langle 0,\ 0 \rangle \qquad (7)$$

$$\langle X \rangle + \langle \overline{X} \rangle = \langle 2x,\ 0 \rangle \in R^1$$

$$\langle \overline{\overline{X}} \rangle = \langle X \rangle$$

Операция интервального умножения

Разбиение пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \bigotimes_{i=1}^{3} \mathbf{I}_{si}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{I}_{s1}$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

$$x - |v_x| > 0 \qquad (9)$$

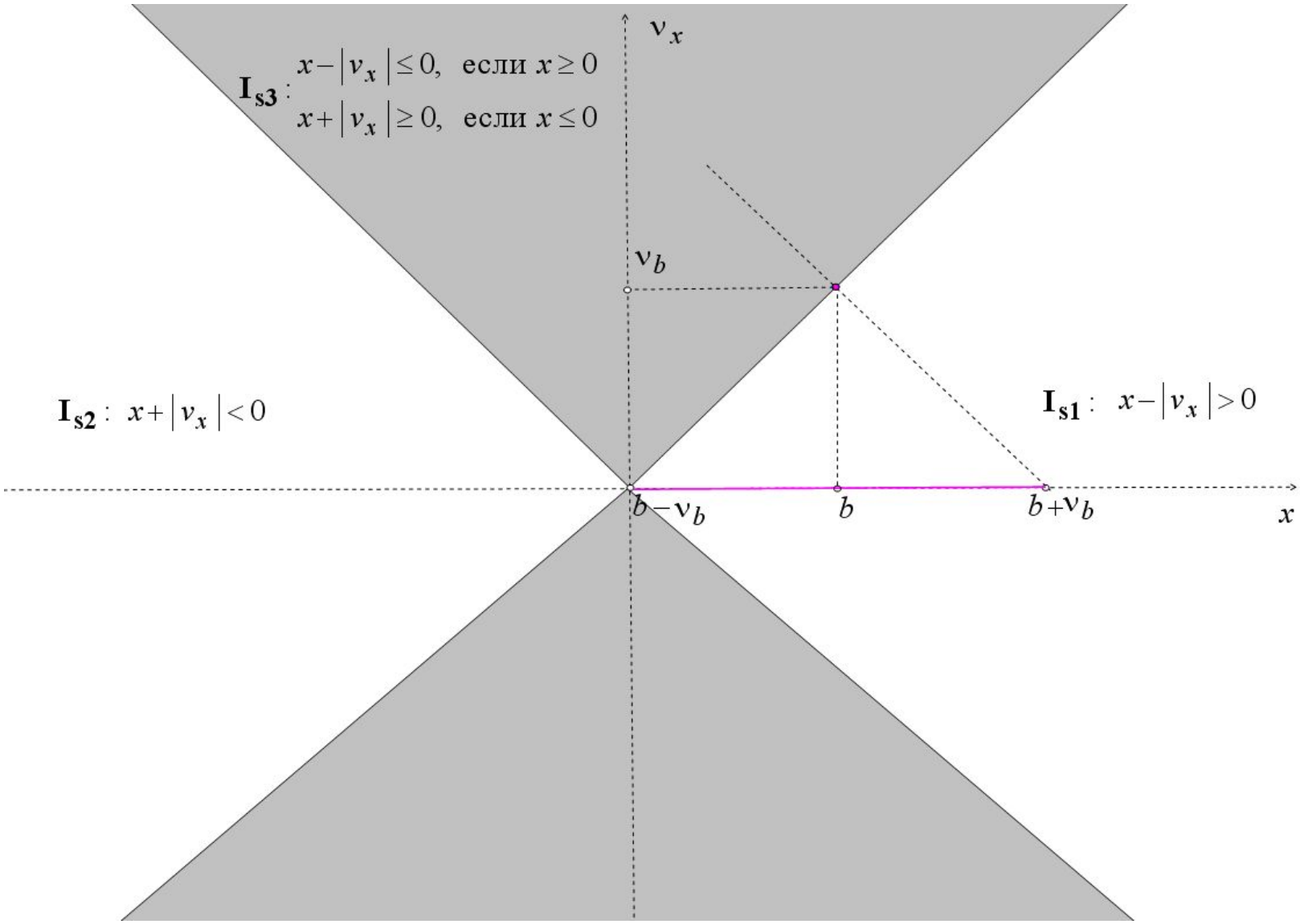
$\mathbf{I}_{s2}$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

$$x + |v_x| < 0 \qquad (10)$$

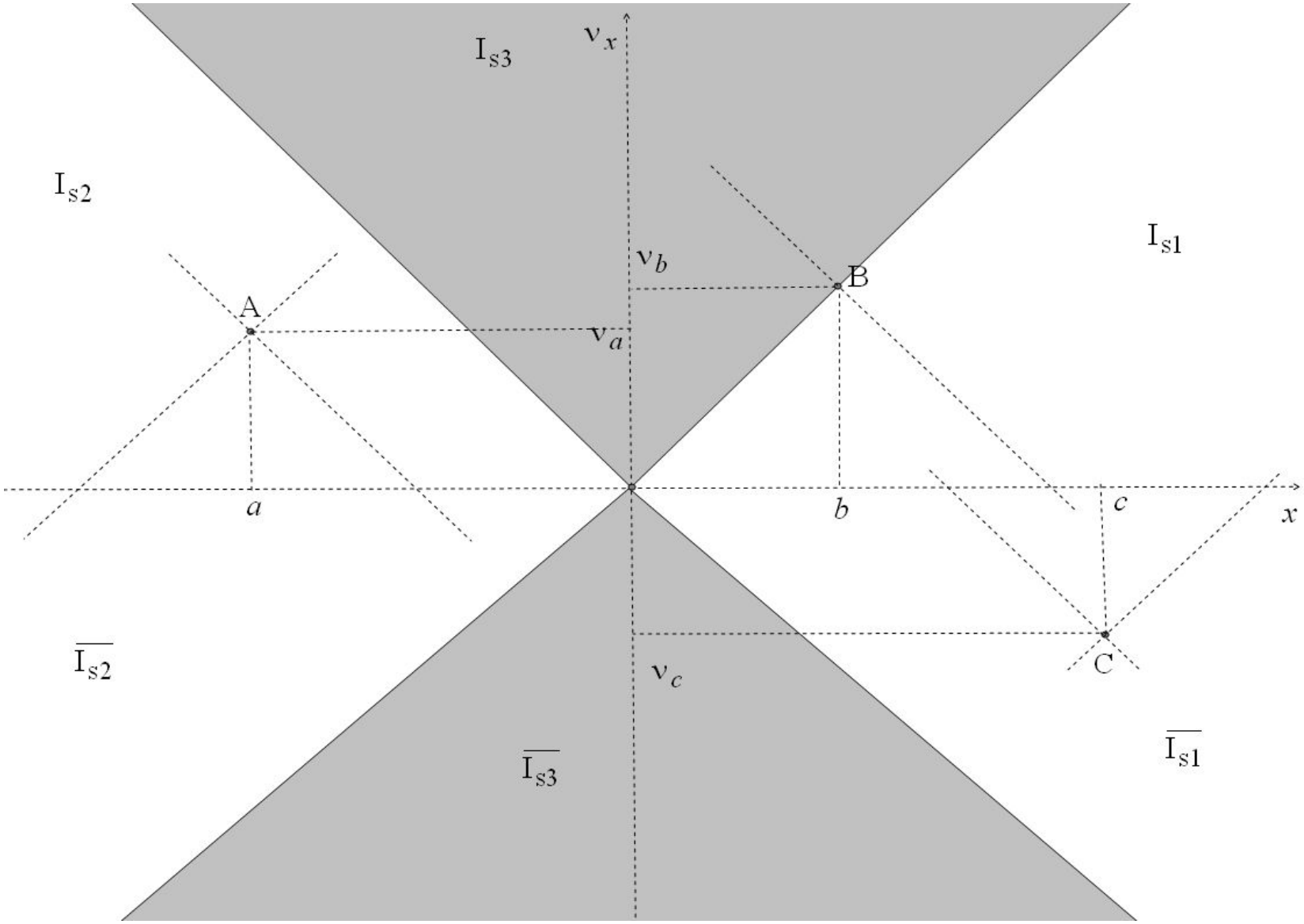
$\mathbf{I}_{s3}$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

$$\begin{aligned} x - |v_x| &\le 0, \text{ если } x \ge 0 \\ x + |v_x| &\ge 0, \text{ если } x \le 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Операция интервального умножения



Операция интервального умножения



Операция интервального умножения

$\langle A \rangle \cdot \langle B \rangle = \langle ab + v_a v_b,\ bv_a + av_b \rangle$ – операция гиперболического умножения интервалов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle, & \text{если } \langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle \overline{Y} \rangle \cdot \langle X \rangle, & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle (\text{если } |v_y|), 0 \rangle \cdot \langle X \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \end{cases} \qquad (11)$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -1, & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$

Операция интервального умножения

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle \overline{X} \rangle, & \text{если} \quad \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \overline{Y} \rangle \cdot \langle \overline{X} \rangle, & \text{если} \quad \langle X \rangle \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \text{если} \ |v_y|, 0 \rangle \cdot \langle \overline{X} \rangle, & \text{если} \quad \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \end{cases} \qquad (12)$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad v_x v_y \geq 0 \\ -1, & \text{если} \quad v_x v_y < 0 \end{cases}$$

Операция интервального умножения

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \left\langle (y + s\,|v_y|),\ 0 \right\rangle \cdot \langle X \rangle, \\ \text{если } \left\langle x, |v_x| \right\rangle, \left\langle y, |v_y| \right\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_1 \\ \left\langle (x - s\,|v_x|),\ 0 \right\rangle \cdot \overline{\langle Y \rangle}, \\ \text{если } \left\langle x, |v_x| \right\rangle, \left\langle y, |v_y| \right\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_2 \\ \left\langle (x + s\,|v_x|),\ 0 \right\rangle \cdot \langle Y \rangle, \\ \text{если } \left\langle x, |v_x| \right\rangle, \left\langle y, |v_y| \right\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_3 \\ \left\langle (y - s\,|v_y|),\ 0 \right\rangle \cdot \overline{\langle X \rangle}, \\ \text{если } \left\langle x, |v_x| \right\rangle, \left\langle y, |v_y| \right\rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_4 \end{cases} \qquad (13)$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -1, & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$

Операция интервального умножения

$$\mathbf{I}_1: \begin{cases} -y\,|v_x| + x\,|v_y| \le 0 \\ -y\,|v_x| - x\,|v_y| \le 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_2: \begin{cases} -y\,|v_x| + x\,|v_y| \le 0 \\ y\,|v_x| + x\,|v_y| \le 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_3: \begin{cases} y\,|v_x| - x\,|v_y| \le 0 \\ -y\,|v_x| - x\,|v_y| \le 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_4: \begin{cases} y\,|v_x| - x\,|v_y| \le 0 \\ y\,|v_x| + x\,|v_y| \le 0 \end{cases}$$

Операция интервального деления

$$\frac{\langle X \rangle}{\langle Y \rangle} = \left(\frac{1}{y^2 - v_y^2} \right) \cdot \langle X \rangle * \langle Y \rangle, \quad |y| \neq |v_y| \qquad (14)$$

Непрерывность интервальных операций

Теорема. Операции интервального сложения, вычитания, умножения и деления – непрерывны

Интервальные отображения

Определение. Отображение $f : E \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ $\left(E \subset \mathbf{I}_s\mathbf{R} \right)$

$$f\left(\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \ldots, \langle A_k \rangle, \langle X \rangle \right),$$

удовлетворяющее условию

$$f\left(\langle a_1, 0 \rangle, \langle a_2, 0 \rangle, \ldots, \langle a_k, 0 \rangle, \langle x, 0 \rangle \right) \in R^1,$$

называется интервальным отображением.

Определение. Интервальное отображение $f : E \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, порождаемое элементарной функцией f, называется элементарным отображением.

Интервальные отображения

$$f(x) = ax$$

порождает отображение

$$f\left(\langle X \rangle\right) = \langle A \rangle * \langle X \rangle$$

$$f(x) = ax^2 + bx, \;\; f(x) = (ax + b)x$$

порождают отображения

$$f_1\left(\langle X \rangle\right) = \langle A \rangle * \langle X \rangle^2 + \langle B \rangle * \langle X \rangle$$

$$f_2\left(\langle X \rangle\right) = \left(\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle B \rangle\right) * \langle X \rangle$$

Интервальные отображения

$$f(x) = x^2$$

порождает отображение

$$f\left(\langle X \rangle\right) = \langle X \rangle * \langle X \rangle =$$

$$= \langle X \rangle^2 = \begin{cases} \left\langle x^2 + v_x^2 + 2|x|\, v_x \right\rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2} \\ \left\langle \left(x + |v_x|\right) \cdot x + \left(x + |v_x|\right) \cdot v_x \right\rangle, & 0 \quad \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \geq \\ \left\langle \left(x - |v_x|\right) \cdot x + \left(x - |v_x|\right) \cdot v_x \right\rangle, & 0 \quad \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \leq \end{cases}$$

Интервальные отображения

$$f(x) = |x|$$

порождает отображение

$$f\left(\langle X \rangle\right) = \left|\langle X \rangle\right| = \left\langle |x|\,,\ v_x \right\rangle \ \forall\ \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$$

Список рекомендуемой литературы

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.

2. Kaucher E. Interval Analysis in the Extended Interval space IR // Comp. Suppl. – 1980. – P. 33–49.

Отношение порядка на множестве $I_s R$

$\langle X \rangle < \langle Y \rangle$, если $x < y$ или $\begin{cases} x = y \\ v_x < v_y; \end{cases}$ $\langle Y \rangle < \langle X \rangle$, если $y < x$ или $\begin{cases} y = x \\ v_y < v_x. \end{cases}$

$\langle X \rangle \le \langle A \rangle$: $x < a,\ v_x \in R^1$ или $\begin{cases} x = a \\ v_x \le v_a,\ v_x \in R^1 \end{cases}$