ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ПОВТОРЕНИЕ

- Что такое функция?
- Что такое область определения функции? Чем является область определения функции геометрически?
- Что такое множество значений функции? Чем является множество значений функции геометрически?

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

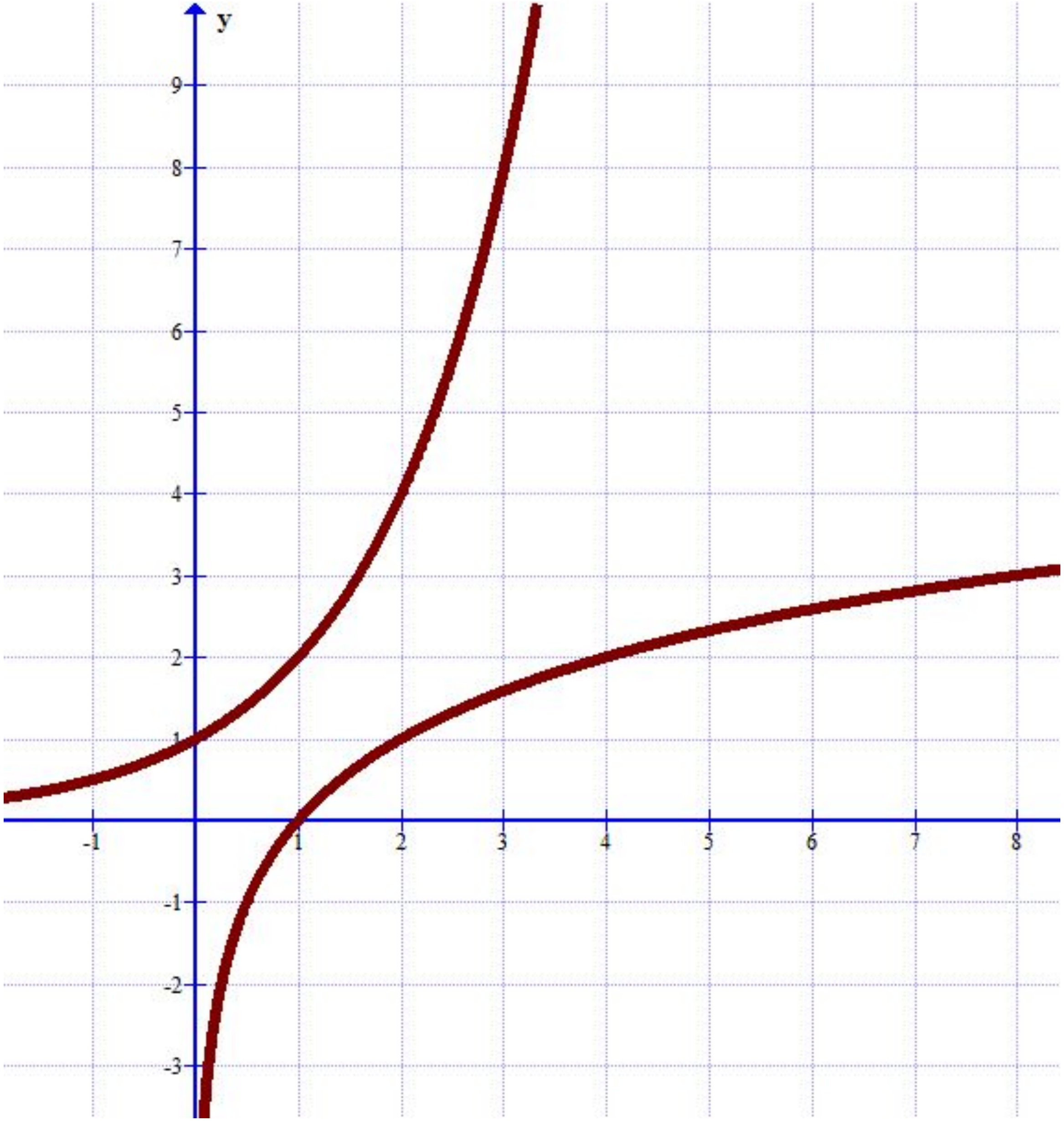
- Если каждому значению *x* из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по определенному правилу число *y*, то говорят, что на этом множестве задана функция. При этом *x* называют независимой переменной или аргументом, а *y* – зависимой переменной или функцией. Зависимость переменной *y* от переменной *x* называют функциональной зависимостью. Записывают $y=f(x)$.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

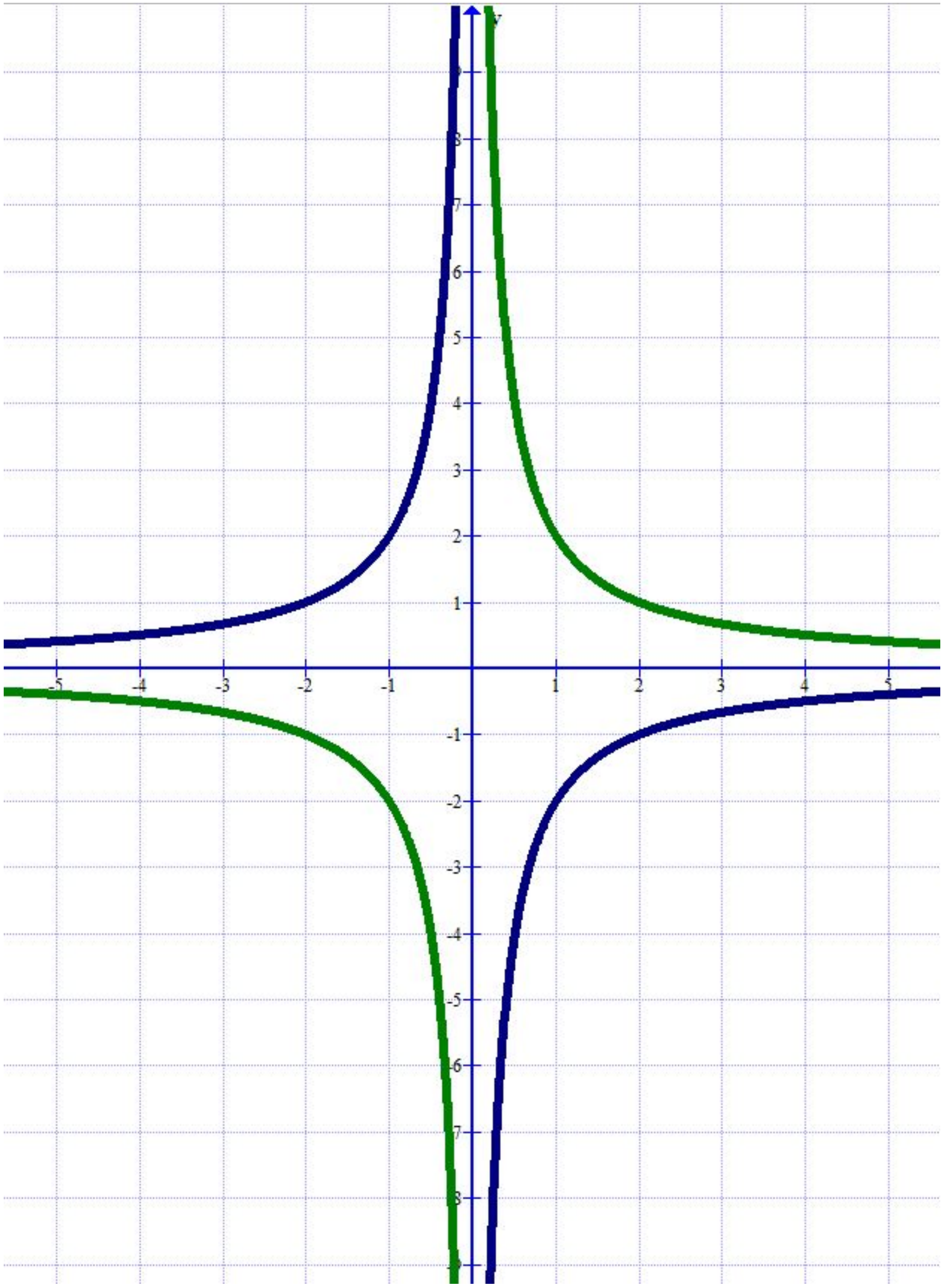
- **Областью определения функции** называют множество всех допустимых значений переменной *x*. Геометрически – это проекция графика функции на ось *Ox*.

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

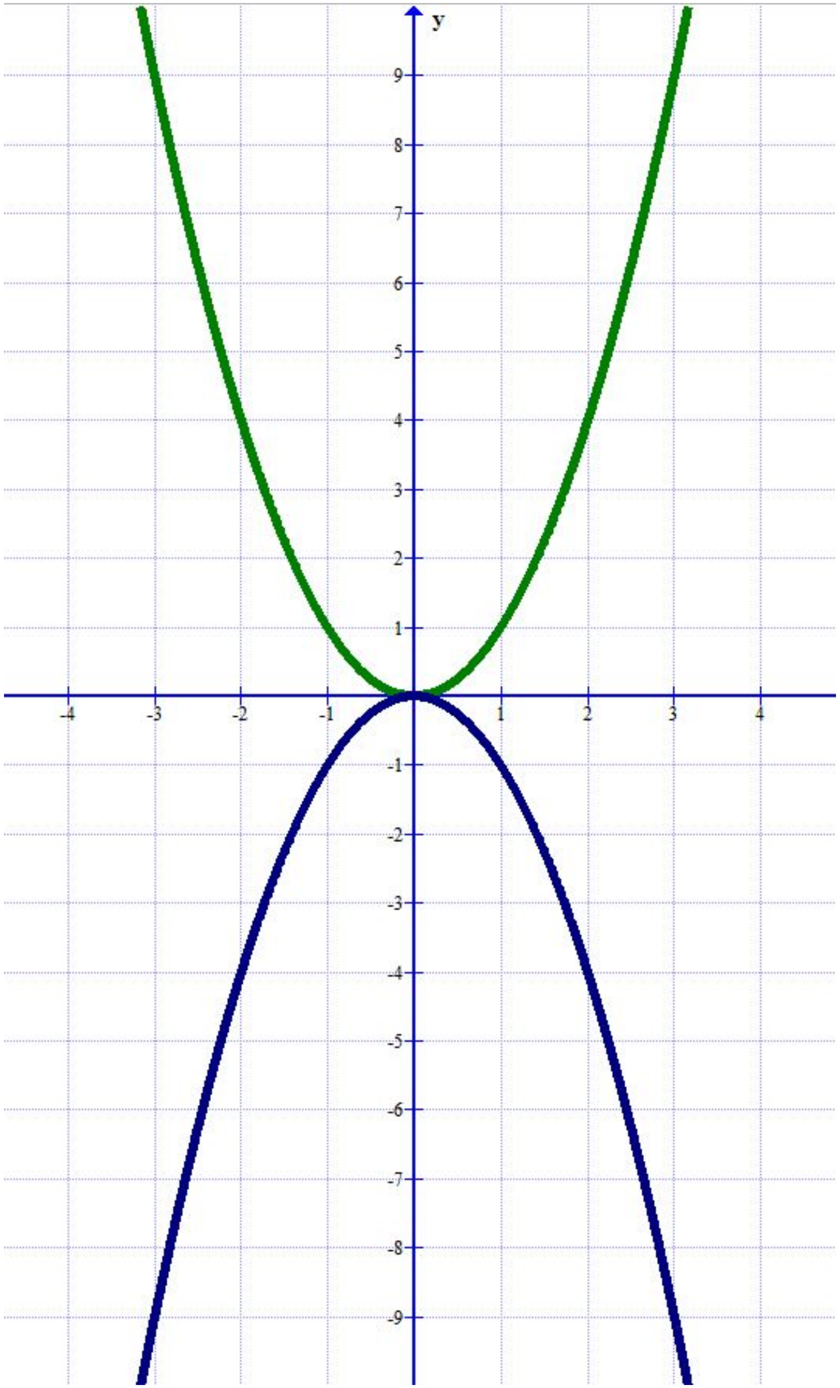
- **Множество значений функции** — множество всех значений, которые функция принимает на области определения. Геометрически – это проекция графика функции на ось *Oy*.



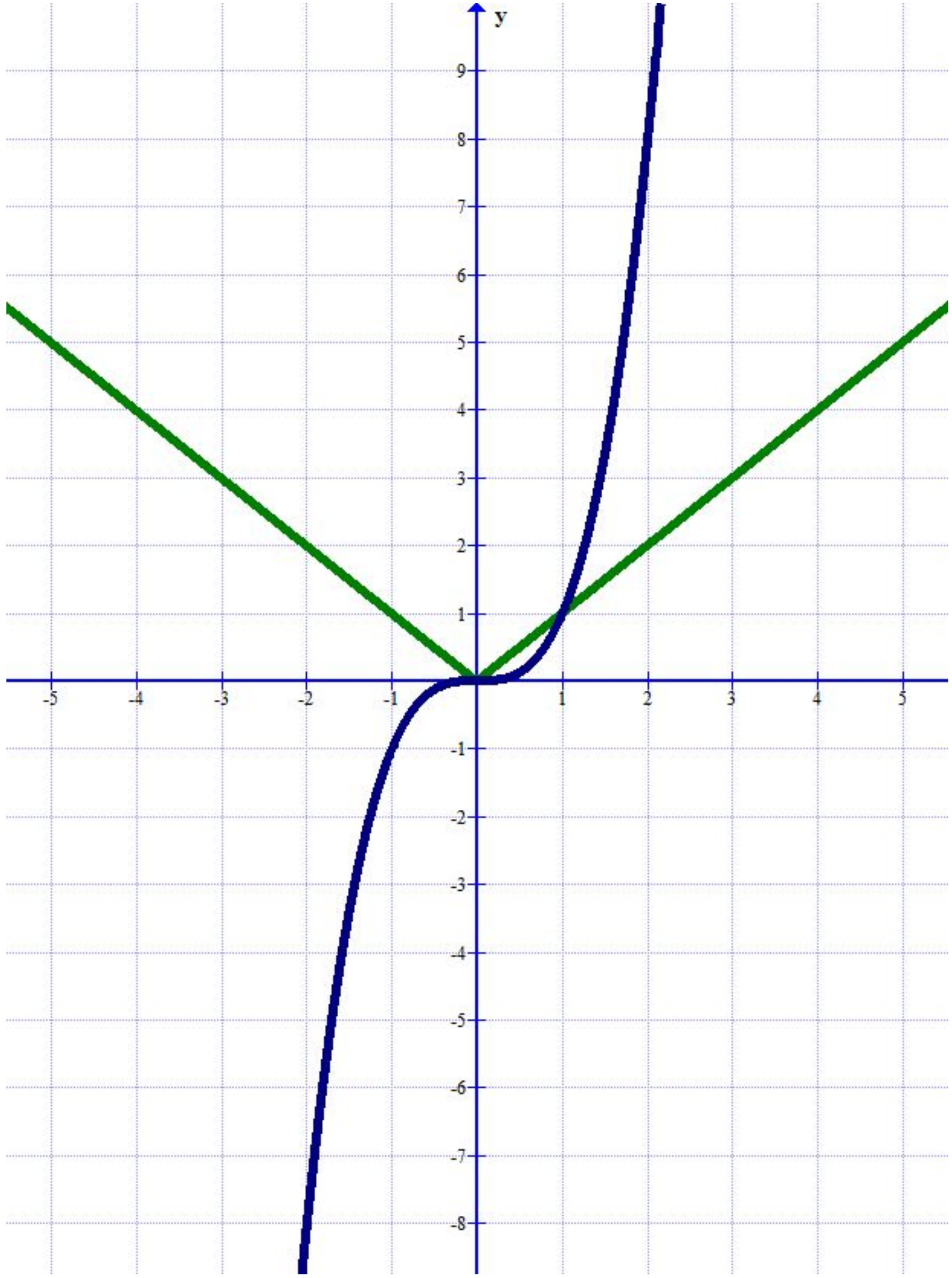
y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-1
1
2
3
4
5
6
7
8



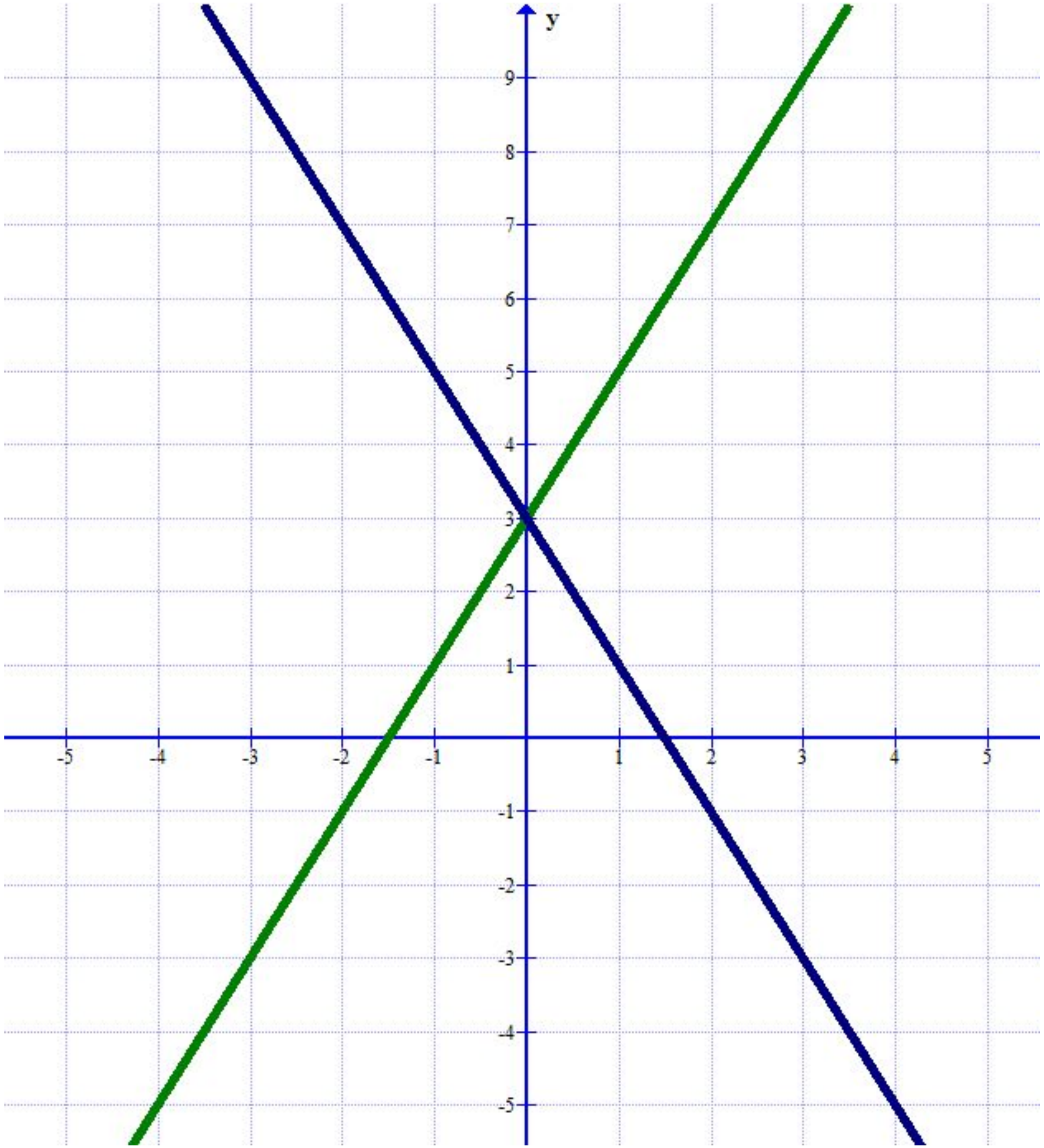
y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9



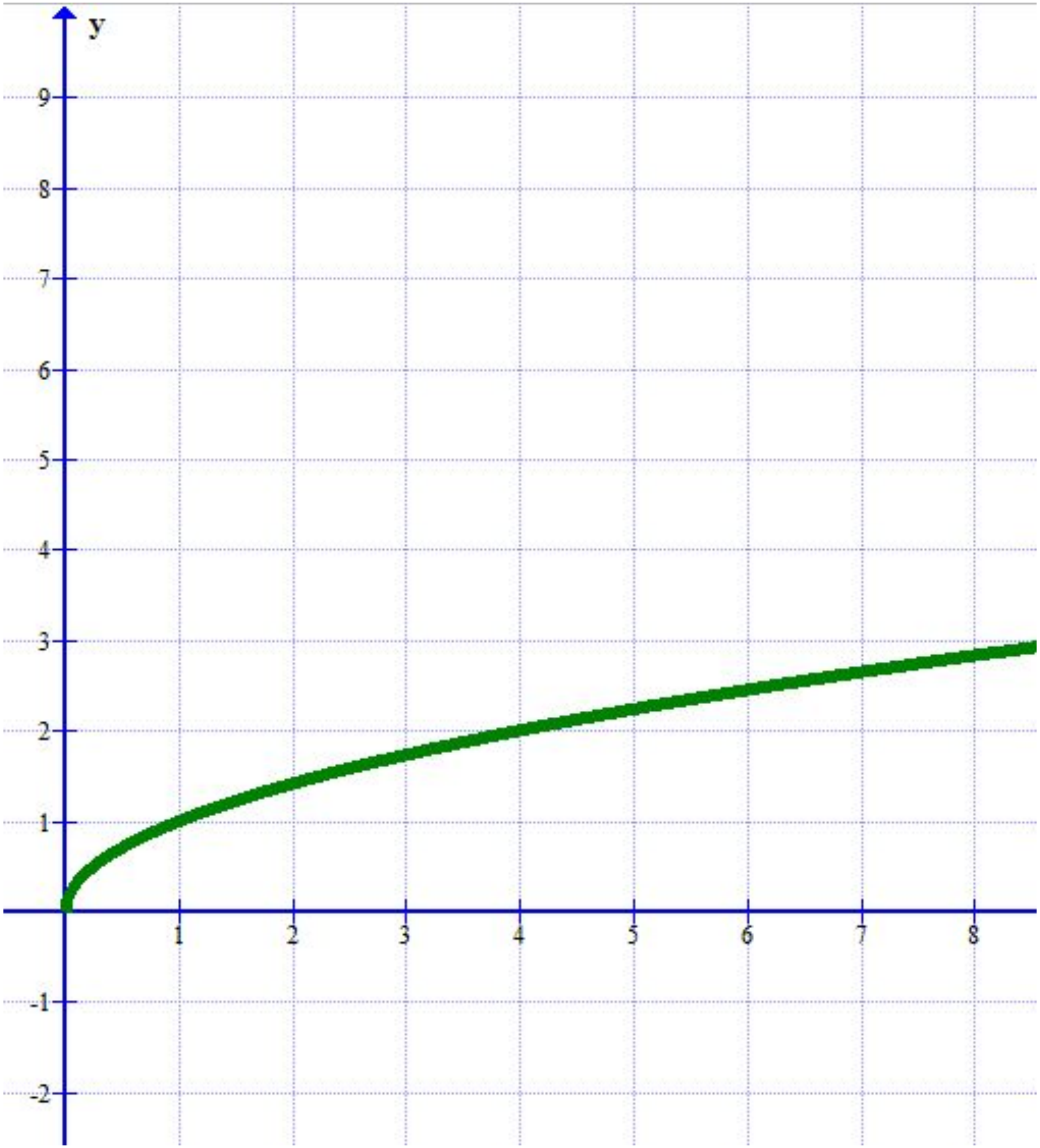
y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5



y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
8

КАК НАЙТИ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ФОРМУЛОЙ?

- Чтобы найти область определения функции $y=f(x)$, заданной формулой, нужно установить, при каких значениях x выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. выполнимы все действия в правой части формулы.

НАЙДИТЕ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ:

1) $y = \sqrt{3-2x}$; 2) $y = \sqrt[3]{3x+1}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$; 4) $y = \frac{5x}{\sqrt{x^2+6x+9}}$;

5) $y = \frac{2x-1}{x^2-5x+6}$; 6) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$;

7) $y = \sqrt{x-7} - \sqrt{x}$; 8) $y = \log_2(3x+1)$;

9) $y = \log_x(x-5)$.

ПЛАКАТ 1. Поворот точки вокруг начала координат (рис. 1)

Точка M получена из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол x радиан, где $x > 0$.

Точка M_1 получена из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол x радиан, где $x < 0$.

Если $x = x_0 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то при повороте на угол x получается та же самая точка, что и при повороте на угол x_0.

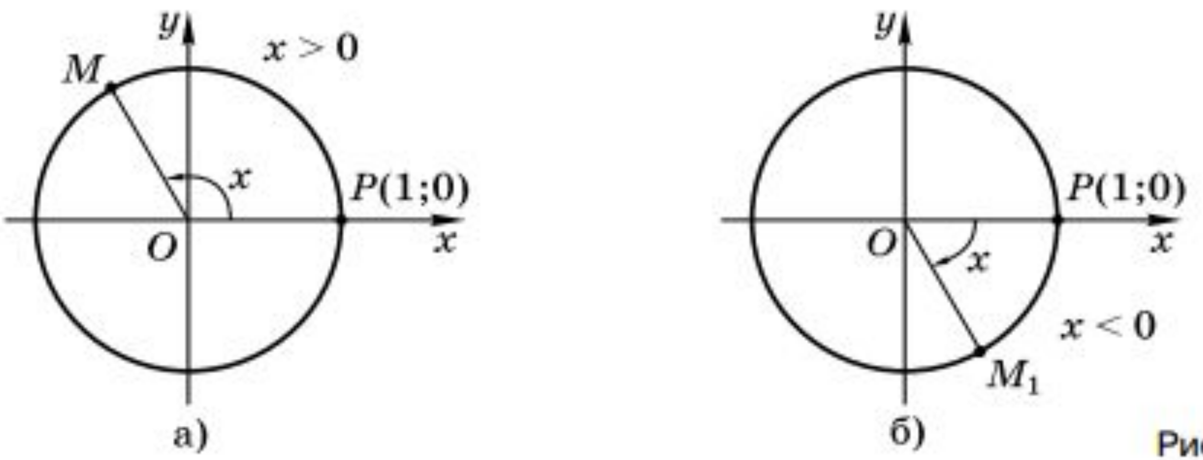
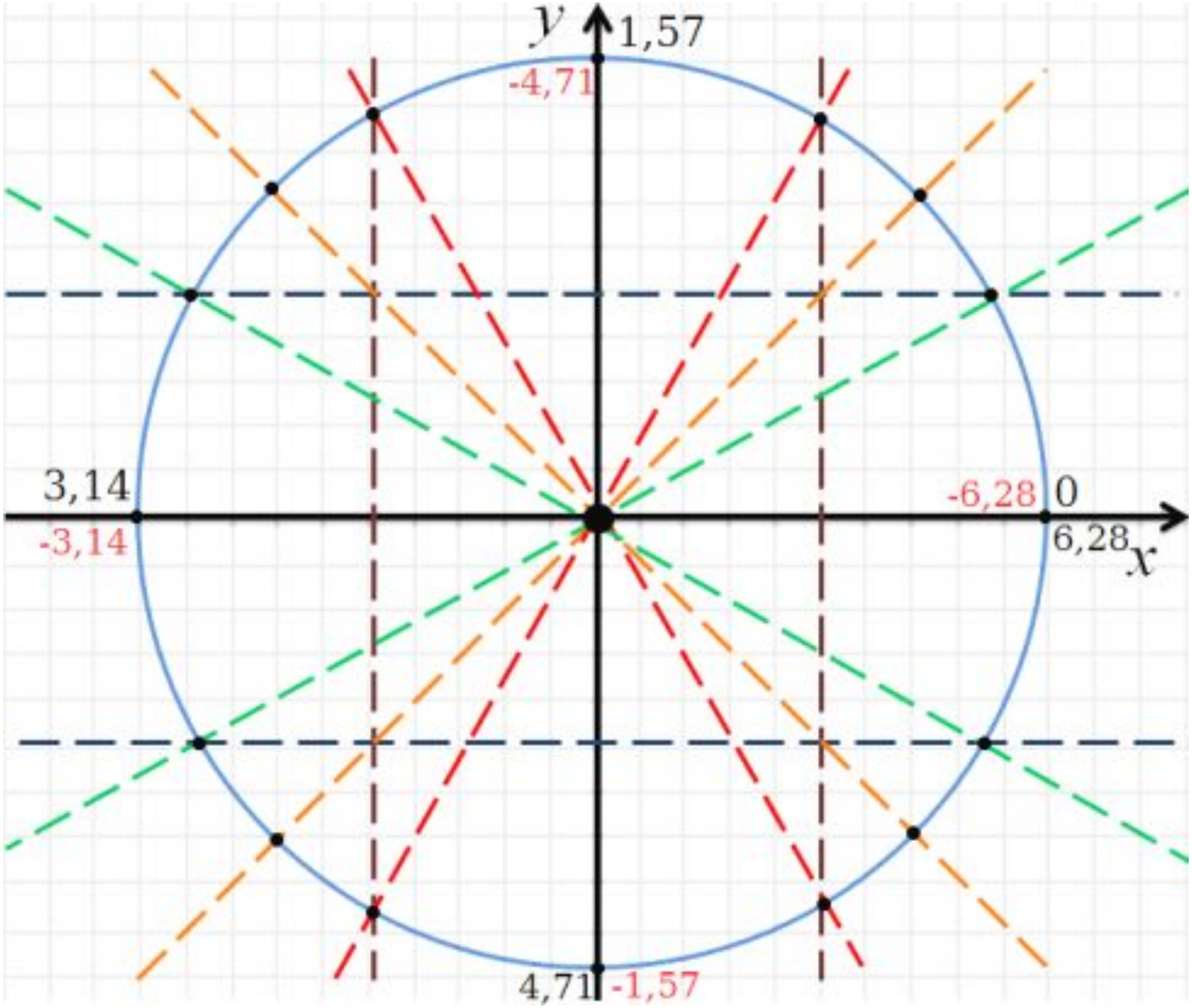
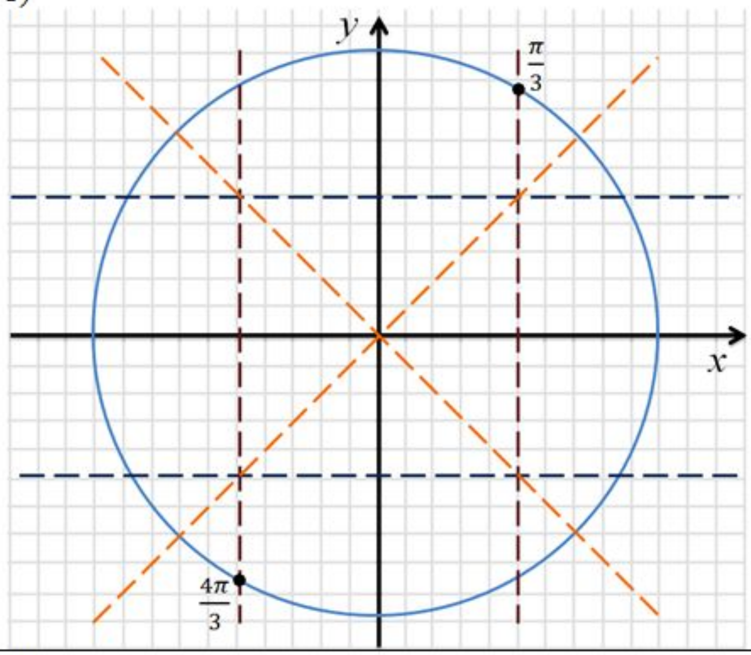


Рис. 1

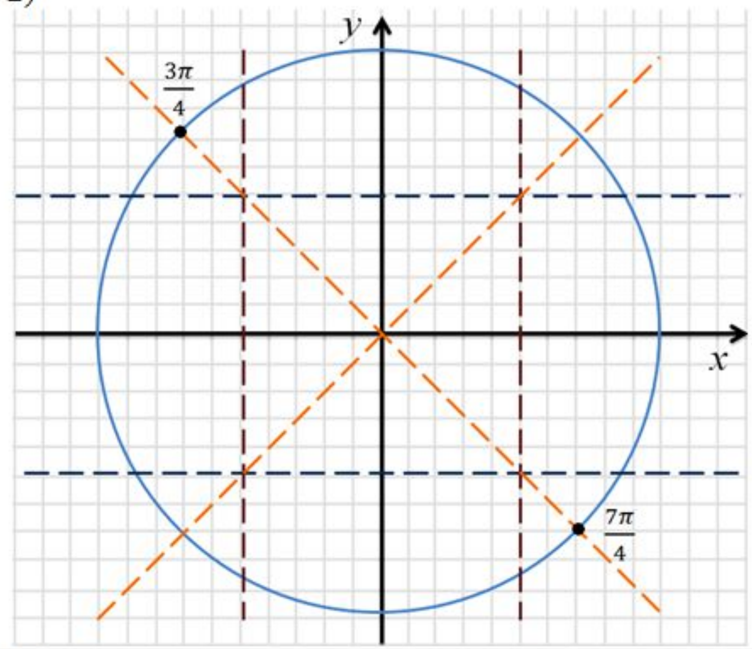


y
1,57
-4,71
3,14
-3,14
-6,28
0
6,28
x
4,71
-1,57

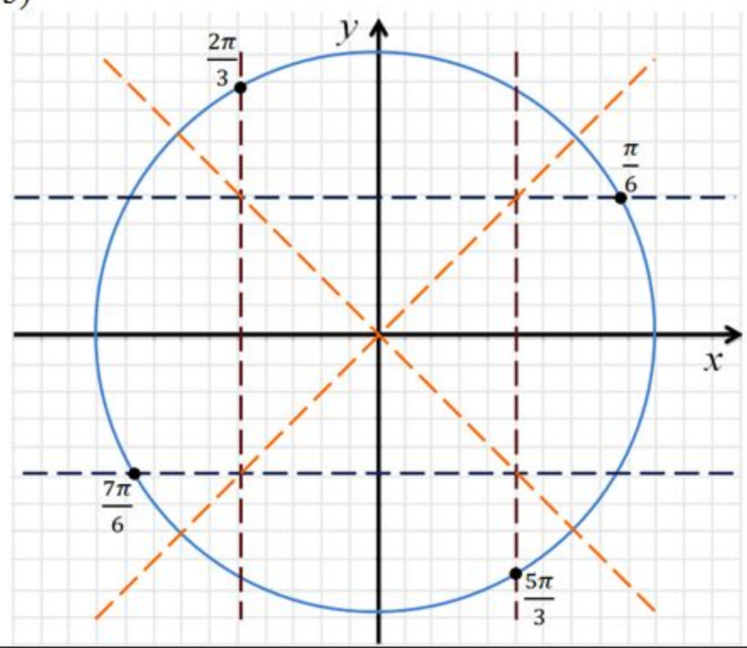
1)


y
x
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$

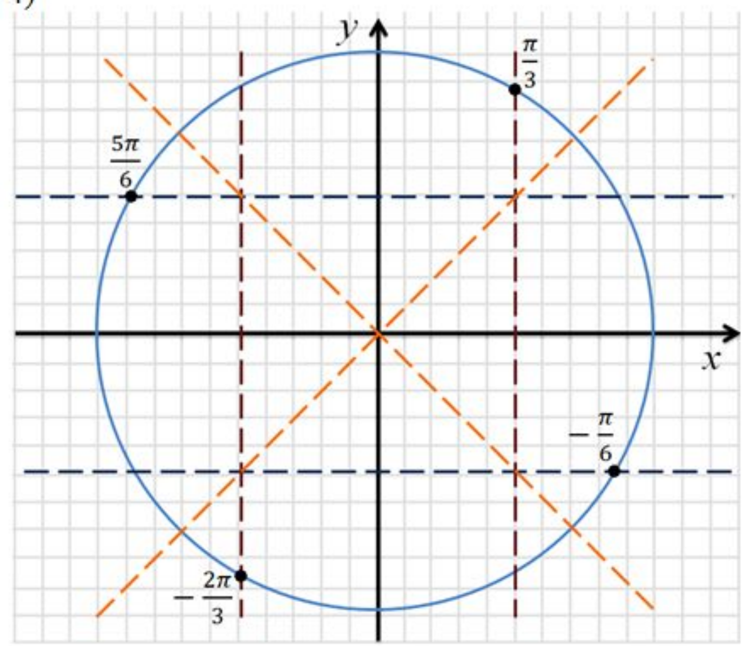
2)


y
x
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$

3)


y
x
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{3}$

4)


y
x
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{2\pi}{3}$

ПЛАКАТ 2. Определение синуса, косинуса и тангенса числа (рис. 2)

$\sin x$ — ордината точки A, $\sin x_1$ — ордината точки A_1, $\sin x_2$ — ордината точки A_2.

$\cos x$ — абсцисса точки A, $\cos x_1$ — абсцисса точки A_1, $\cos x_2$ — абсцисса точки A_2.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \operatorname{tg} x_1, \quad \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2 .$$

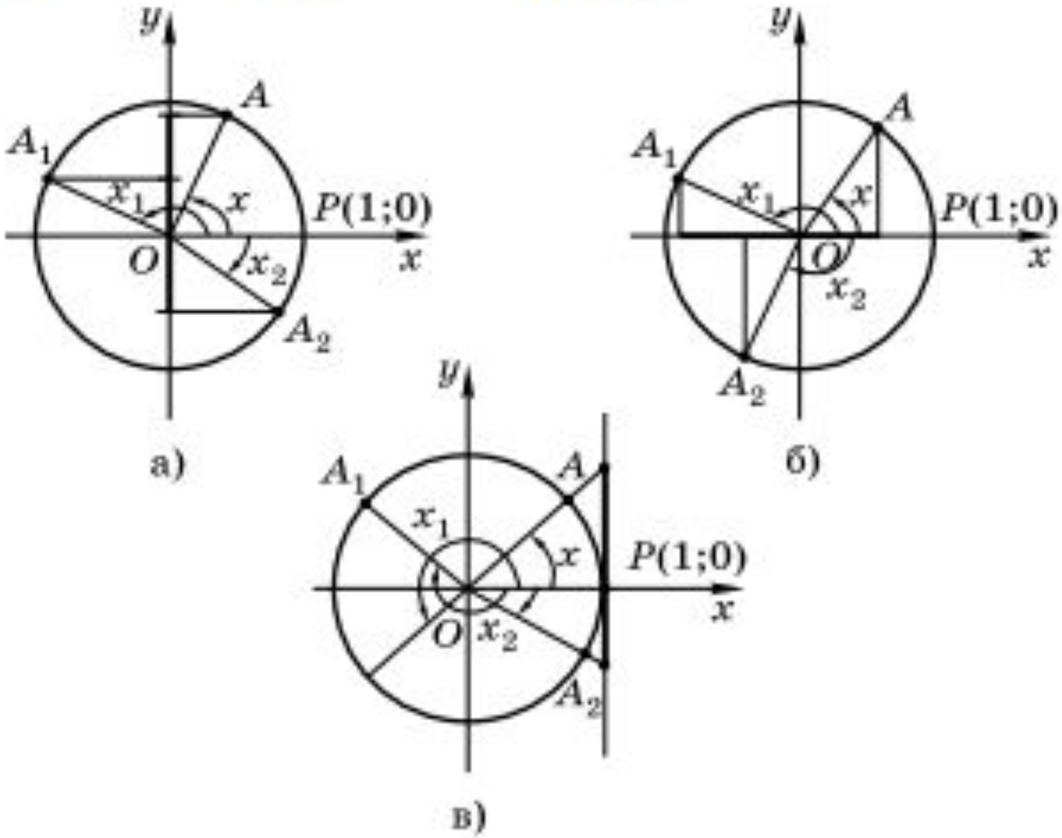
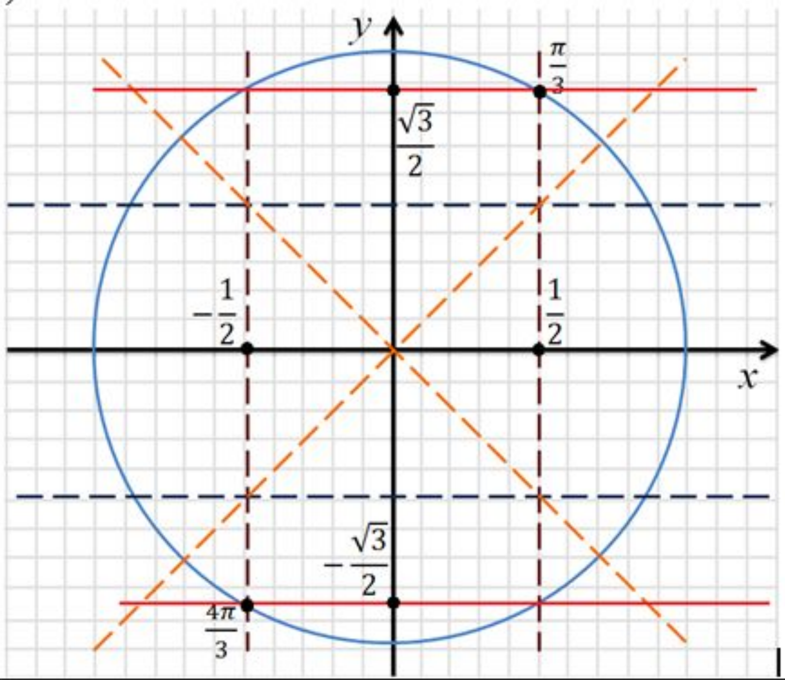


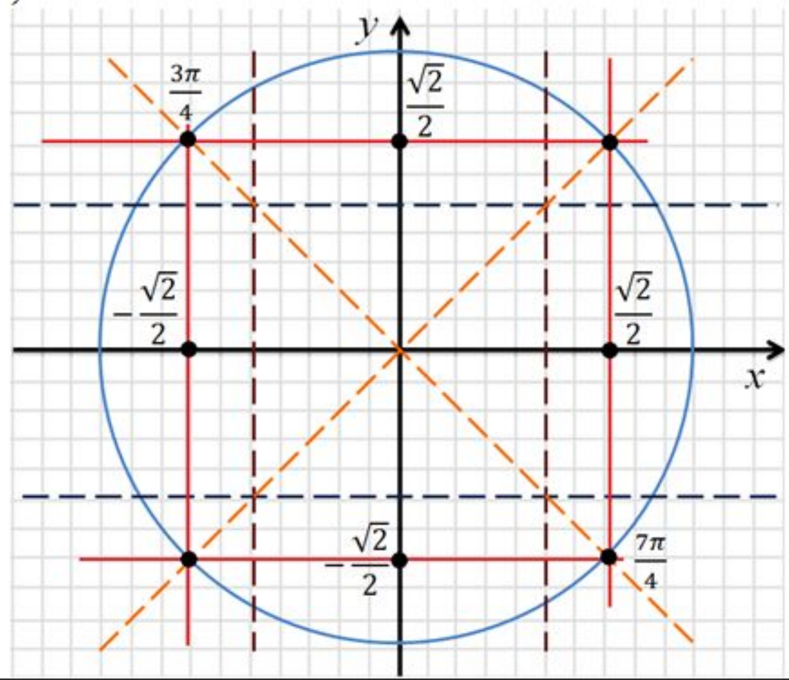
Рис. 2

1)



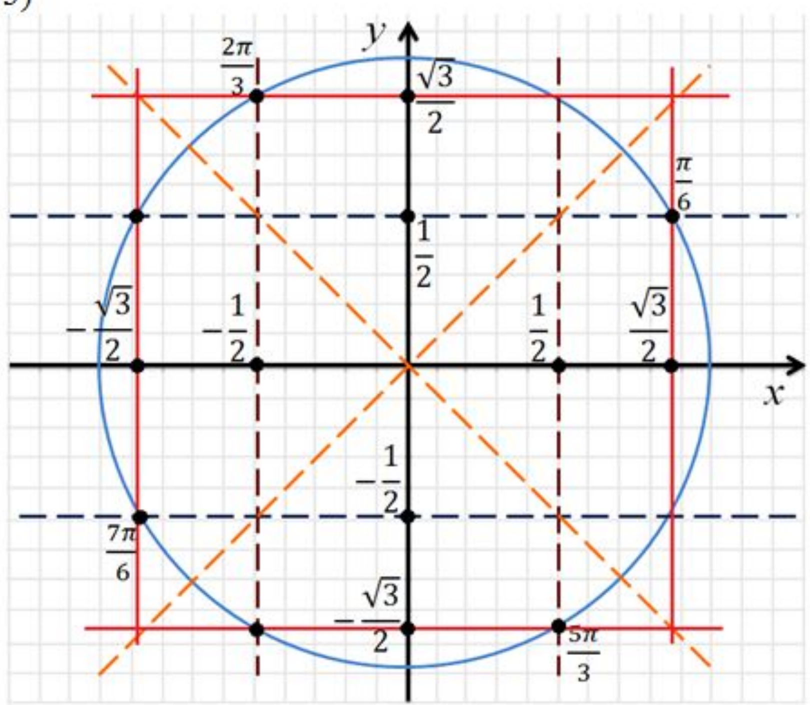
y
x
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$

2)



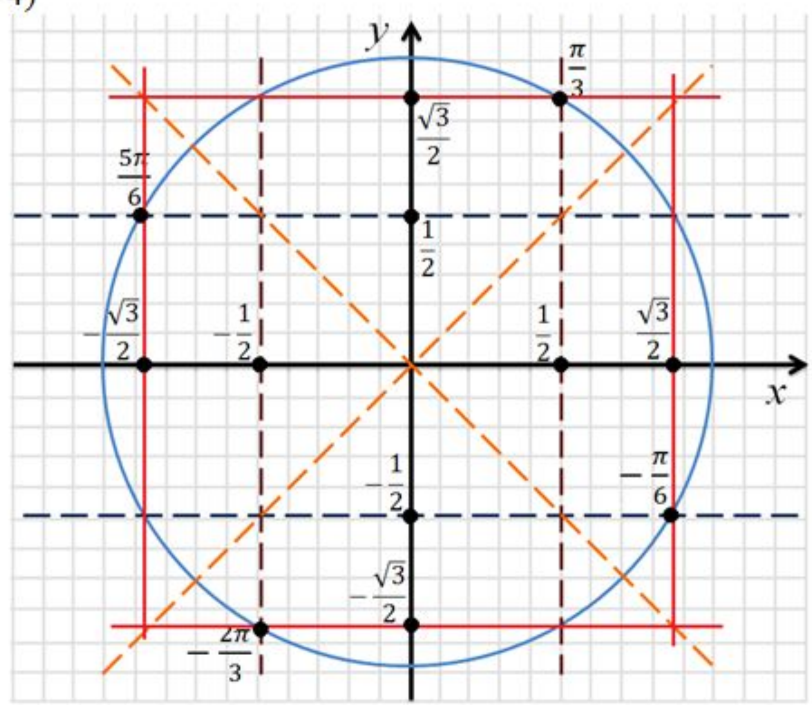
y
x
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$

3)



y
x
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$

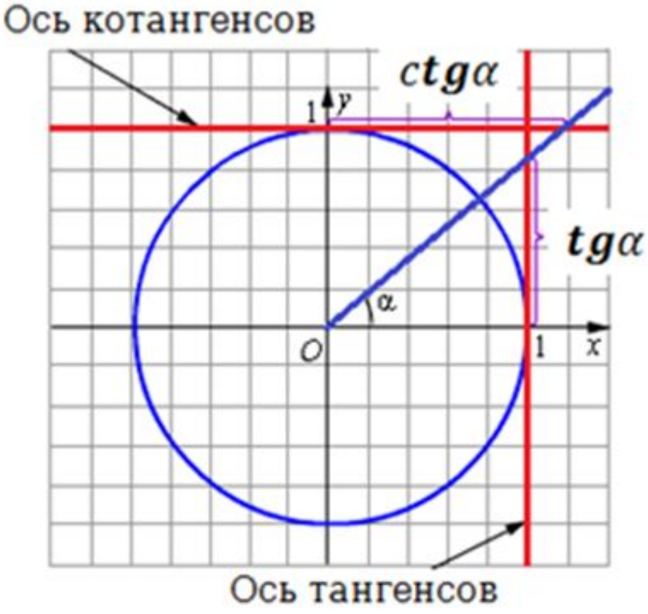
4)



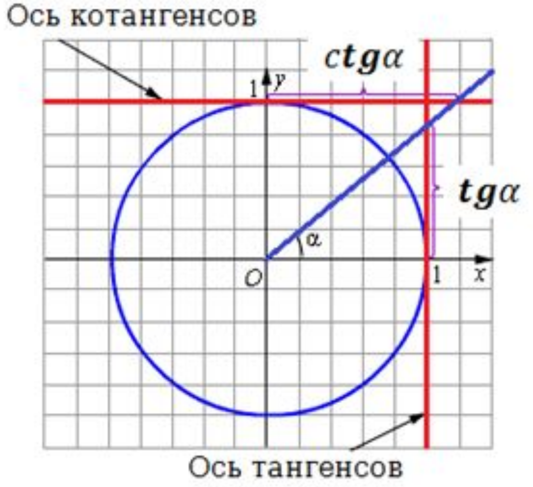
y
x
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция	Область определения	Множество значений
$y = sinx$		
$y = cosx$		
$y = tgx$		
$y = ctgx$		



СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



Функция	Область определения	Множество значений
$y = sinx$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y = cosx$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y = tgx$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	$y \in R$
$y = ctgx$	$x \neq \pi k, k \in Z$	$y \in R$

НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

I способ. Через уравнение с параметром	
1. Рассмотреть функцию как уравнение с параметром.	$\cos 2x - 2\sin^2 x = a$
2.Если необходимо, преобразовать левую часть уравнения, т. е. привести левую часть к выражению с одной тригонометрической функцией.	$\cos 2x - (1 - \cos 2x) = a$ $\cos 2x - 1 + \cos 2x = a$ $2\cos 2x - 1 = a$ $\cos 2x = \frac{a+1}{2}$
3. Выяснить, при каких значениях *a* уравнение имеет корни.	Для всех значений *a*, таких, что $a \in [-3; 1]$, это уравнение имеет корни.
4. Полученное множество значений, *a* является множеством значений функции *y*.	Множество значений данной функции – отрезок $[-3; 1]$.

II способ. Метод оценки

1. Если необходимо, привести правую часть формулы к выражению с одной тригонометрической функцией.	$y = sin^2x + 6sinx + 10$ $y = (sin^2x + 2 \cdot 3 \cdot sinx + 3^2) + 1$ $y = (sinx + 3)^2 + 1$
2. Найти множество значений внутренней основной тригонометрической функции.	$-1 \leq sinx \leq 1$
3. Найти множество значений всей функции, последовательно оценивая каждую промежуточную функцию, получаемую операцией из исходной.	$-1 + 3 \leq sinx + 3 \leq 1 + 3$ $2 \leq sinx + 3 \leq 4$ $2^2 \leq (sinx + 3)^2 \leq 4^2$ $4 \leq (sinx + 3)^2 \leq 16$ $4 + 1 \leq (sinx + 3)^2 + 1 \leq 16 + 1$ $5 \leq (sinx + 3)^2 + 1 \leq 17$
4. Записать ответ.	$y \in [5; 17]$