

Задача

Методом полиномиальной аппроксимации определены коэффициенты квадратичного полинома: $a_0=1$; $a_1=4$; $a_2=2$. Найти точку экстремума x^* .

Решение.

Задача

- Вычислить обратную матрицу Гессе, используемую в методе Ньютона для целевой функции, заданной выражением: $I(x) = (x_1^2 + 2x_2^2)$

Решение. Матрицей Гессе называют матрицу вторых частных производных целевой функции по управляемым параметрам:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial x_2} = 4x_2; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

Таким образом,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad |\Gamma| = 8; \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = C^T = Adj(\Gamma);$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{Adj(\Gamma)}{|\Gamma|}; \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Задача

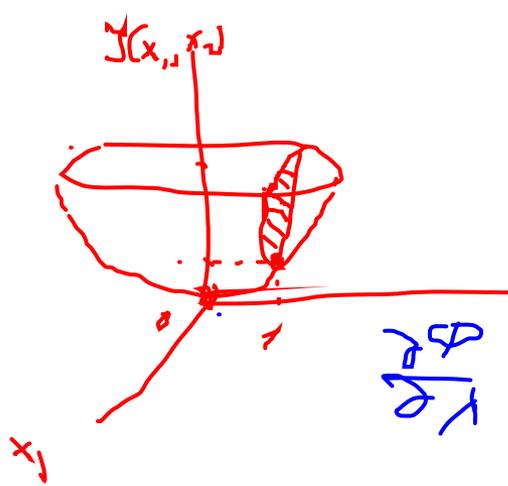
- Определить направление поиска для метода наискорейшего спуска, если целевую функцию можно аппроксимировать выражением:

$$I(x) = (x_1^2 + 2x_2^2)$$

- *Указания:* Сделать пояснительный рисунок.
- Решение. Направление поиска по методу наискорейшего спуска – противоположно направлению вектора градиента ЦФ. Определим этот вектор градиента:
- $\mathbf{grad} [I(x)] = [\partial I/\partial x_1 \quad \partial I/\partial x_2]^T$
- $\partial I/\partial x_1 = 2x_1 \quad \partial I/\partial x_2 = 4x_2$
- Норма вектора градиента: $\sqrt{(\partial I/\partial x_1)^2 + (\partial I/\partial x_2)^2} = 2 \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$
- Окончательно: $\mathbf{g} =$

Задача

- Целевая функция (ЦФ) задана в виде: $I(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, а также задано ограничение в форме равенства: $x_2 = 1$. Найти координаты точки минимума ЦФ и значение ЦФ в этой точке.
- *Указания:*
- использовать для решения метод множителей Лагранжа;
- сделать пояснительный 3D рисунок.


$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(x_2 - 1)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1 = 0$$
$$x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$
$$x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

(0, 1)

Задача

$$I(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

• Целевая функция (ЦФ) задана в виде:
а также задано ограничение в форме равенства: $x_2 = 1$. Найти координаты точки минимума ЦФ и значение ЦФ в этой точке.

• *Указания:*

- 1) использовать для решения метод множителей Лагранжа;
- 2) сделать пояснительный 3D рисунок.

Решение.

Запишем новую ЦФ Лагранжа

с учетом ограничения $\psi(x) = x_2 - 1 = 0$:

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda \cdot (x_2 - 1)$$

Необходимое условие экстремума этой ЦФ выразится в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_1} = x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_2} = x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda} = x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

Из этой системы уравнений следует:

Значение ЦФ в точке минимума $(0,1)$ равно: $I=0,5$.

Поверхность ЦФ – эллиптический параболоид

