Задача

Методом полиномиальной аппроксимации определены коэффициенты квадратичного полинома: a_0=1; a_1=4; a_2=2. Найти точку экстремума x^*.

Решение.

Задача

- Вычислить обратную матрицу Гессе, используемую в методе Ньютона для целевой функции, заданной выражением: $I(x) = (x_1^2 + 2x_2^2)$

<u>Решение.</u> *Матрицей Гессе* называют матрицу вторых частных производных целевой функции по управляемым параметрам:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \partial^2 I / \partial x_1^2 & \partial^2 I / \partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 I / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 I / \partial x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\partial I / \partial x_1 = 2x_1; \quad \partial^2 I / \partial x_1^2 = 2; \quad \partial^2 I / \partial x_1 \partial x_2 = 0; \quad \partial I / \partial x_2 = 4x_2; \quad \partial^2 I / \partial x_2^2 = 4; \quad \partial^2 I / \partial x_2 \partial x_1 = 0;$$

Таким образом,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad |\Gamma| = 8; \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = C^T = Adj(\Gamma);$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{Adj(\Gamma)}{|\Gamma|}; \quad \Gamma^{-1} = \tfrac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Задача

- Определить направление поиска для метода наискорейшего спуска, если целевую функцию можно аппроксимировать выражением:

$$I(x) = (x_1^2 + 2x_2^2)$$

- *Указания:* Сделать пояснительный рисунок.

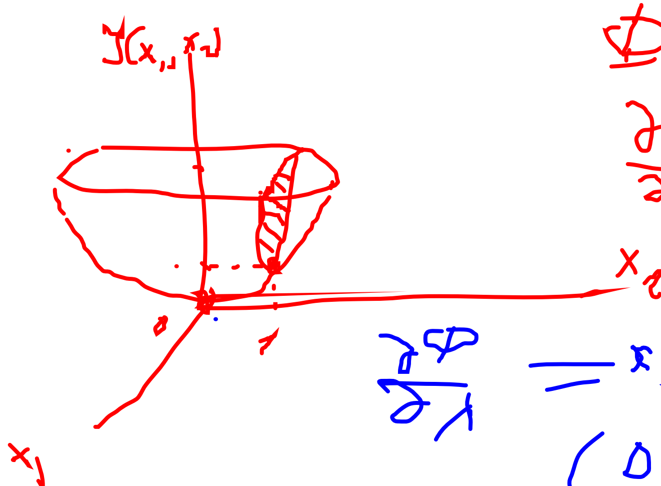
- Решение. Направление поиска по методу наискорейшего спуска – противоположно направлению вектора градиента ЦФ. Определим этот вектор градиента:
- $\boldsymbol{grad\ [I(x)] = [\partial I/\partial x_1\ \ \partial I/\partial x_2]^T}$

- $\boldsymbol{\partial I/\partial x_1 = 2x_1 \quad \partial I/\partial x_2 = 4x_2}$
- Норма вектора градиента: $\sqrt{\ } (\partial \boldsymbol{I}/\partial \boldsymbol{x_1})^2 + (\partial \boldsymbol{I}/\partial \boldsymbol{x_2})^2 = \boldsymbol{2} \sqrt{\ } \boldsymbol{x_1}^2 + 4\ \boldsymbol{x_2}^2$

- Окончательно: $\boldsymbol{g} =$

Задача

- Целевая функция (ЦФ) задана в виде: $I(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$, а также задано ограничение в форме равенства: $x_2 = 1$. Найти координаты точки минимума ЦФ и значение ЦФ в этой точке.
- *Указания:*
- использовать для решения метод множителей Лагранжа;
- сделать пояснительный 3D рисунок.



$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) + \lambda(x_2-1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = x_1 = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = x_2+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = x_2-1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

$(0, 1)$

Задача

- Целевая функция (ЦФ) задана в виде: $I(x) =, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

а также задано ограничение в форме равенства: $x_2 = 1$. Найти координаты точки минимума ЦФ и значение ЦФ в этой точке.

- *Указания:*

1) использовать для решения метод множителей Лагранжа;
2) сделать пояснительный 3D рисунок.

<u>Решение.</u>

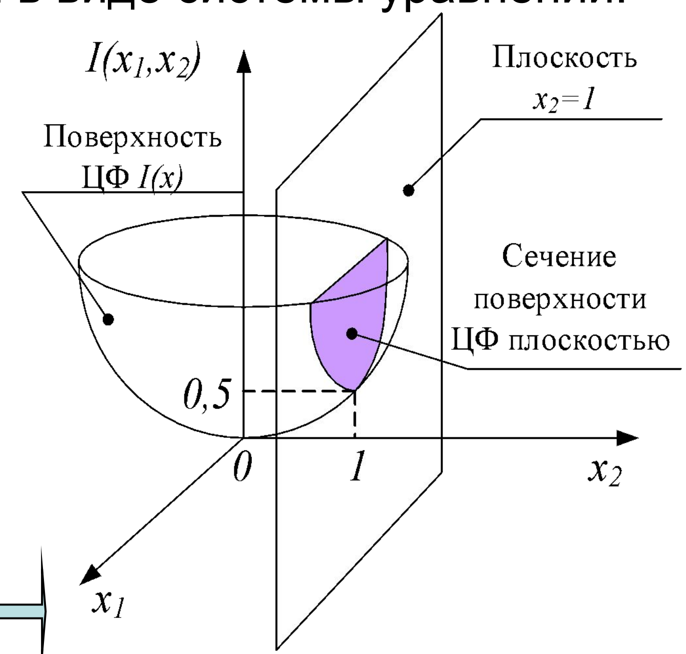
Запишем новую ЦФ Лагранжа с учетом ограничения $\psi(x)=x_2-1=0$:

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \lambda \cdot (x_2 - 1)$$

Необходимое условие экстремума этой ЦФ выразится в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial x_1} = x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial x_2} = x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \dfrac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial \lambda} = x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Из этой системы уравнений следует:



Значение ЦФ в точке минимума (0,1) равно: $I=0,5$.

Поверхность ЦФ – эллиптический параболоид

см. рис.