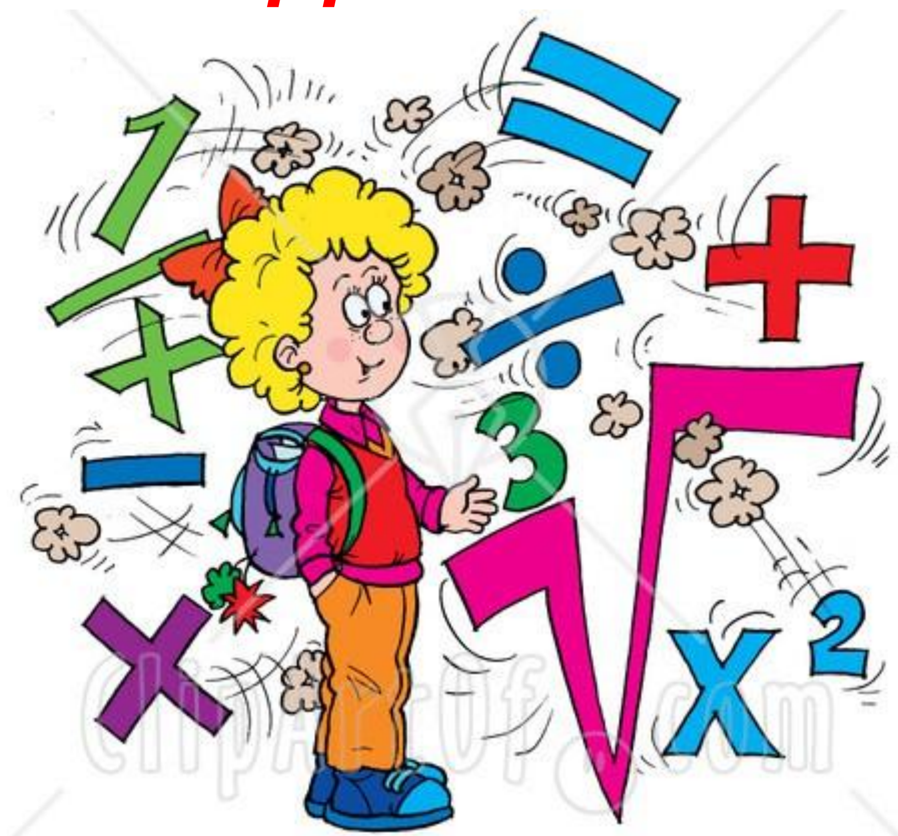
ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА



СОДЕРЖАНИЕ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Основные тригонометрические тождества

Пример 1.

Вычислить $tg\alpha$*, зная что* $\sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25};$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5},$$

так как по условию $\alpha \in$ III четверти,

а $\cos\alpha < 0$ в III четверти,

то берем $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

тогда $tg\alpha = -\frac{3}{5} \div (-\frac{4}{5}) = \frac{3}{4}$

Задача

Дано: $\cos\alpha = \dfrac{40}{41}$ $\qquad \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

IV четв.

Найти: $\sin\alpha,\ ctg\alpha$

Используем основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2\alpha + \sin^2 a = 1$$

$$\left(\frac{40}{41}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$$

$$\frac{1600}{1681} + \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1600}{1681}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{81}{1681}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{9}{41}$$

$$\sin\alpha = \left(-\frac{9}{41}\right)$$

т.к.

$\alpha -$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$ctg\alpha = \quad :$$

$$ctg\alpha = -\frac{40}{9}$$

Пример . Найдем $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найдем сначала $\cos\alpha$. Из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ получаем, что $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

Так как α является углом II четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла α, можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

Для отыскания котангенса угла α удобно воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}.$$

Итак,

$$\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha=-2\frac{2}{5}.$$

Задания открытого банка задач

10. Найдите tg t, если $\cos t = \dfrac{5\sqrt{29}}{29},\ t \in \left(\dfrac{3}{2}; 2\quad\right).$

Решение.

$$\cos t = \frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{29} = \frac{29}{29} - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

$$\sin t = -\sqrt{\frac{4}{29}} = -\frac{2}{\sqrt{29}},\ \text{где}\ t \in \left(\frac{3}{2}; 2\quad\right) \Rightarrow \sin t < 0$$

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\dfrac{2}{\sqrt{29}}}{\dfrac{5}{\sqrt{29}}} = -\frac{2}{5} = \boxed{-0{,}4}$$

<u>Использованы</u> *тождества:* $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ *и* $tg\, t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.