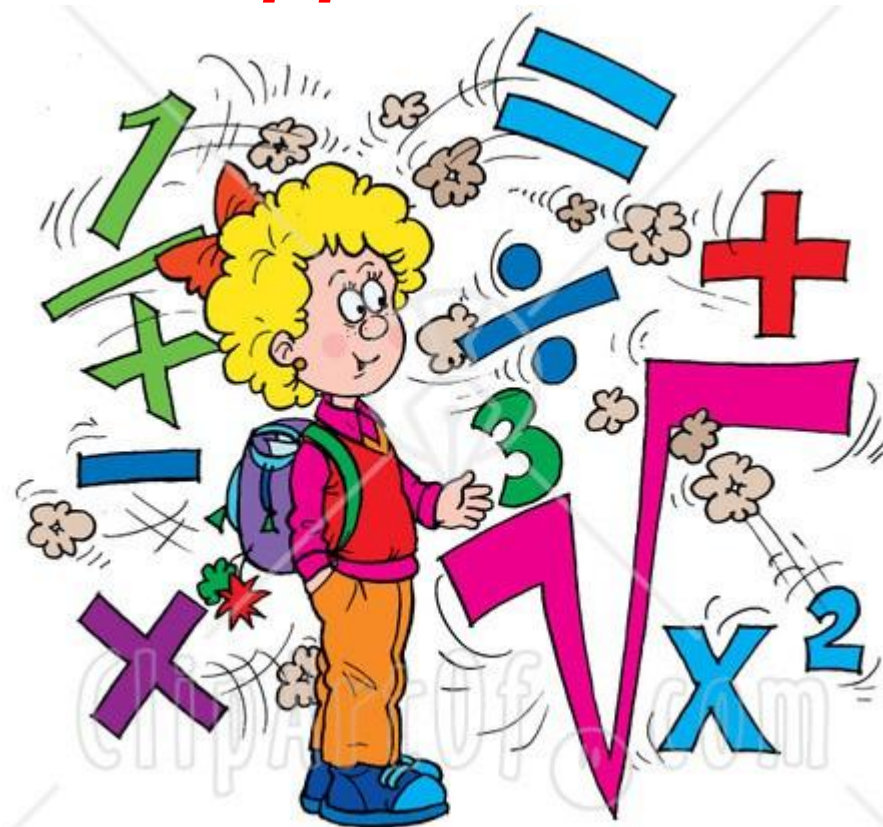


# ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА



# СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ  
ТОЖДЕСТВА

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ СИНУСОВ  
(КОСИНУСОВ)

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

ВСЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$



$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



## Основные тригонометрические тождества

Пример 1.

Вычислить  $\operatorname{tg} \alpha$ , зная что  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25};$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5},$$

так как по условию  $\alpha \in \text{III}$  четверти,  
а  $\cos \alpha < 0$  в III четверти,

$$\text{то берем } \cos \alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\text{тогда } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4}$$



**Задача**

Дано:  $\cos \alpha = \frac{40}{41}$

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$   
**IV четв.**

Найти:  $\sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$

Используем основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{40}{41}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1600}{1681} + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1600}{1681}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{81}{1681}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{9}{41}$$

$$\sin \alpha = -\frac{9}{41}$$

**Т.К.**

$\alpha$  -

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \quad :$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{40}{9}$$

**Пример** . Найдём  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если известно, что  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Найдём сначала  $\cos \alpha$ . Из формулы  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  получаем, что  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ .

Так как  $\alpha$  является углом II четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла  $\alpha$ , можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

Для отыскания котангенса угла  $\alpha$  удобно воспользоваться формулой  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Имеем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}.$$

Итак,

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -2\frac{2}{5}.$$

## Задания открытого банка задач

10. Найдите  $\operatorname{tg} t$ , если  $\cos t = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ ,  $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Решение.

$$\cos t = \frac{5\sqrt{29}}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{29} = \frac{29}{29} - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$$

$$\sin t = -\sqrt{\frac{4}{29}} = -\frac{2}{\sqrt{29}}, \text{ где } t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \Rightarrow \sin t < 0$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{5}{\sqrt{29}}} = -\frac{2}{5} = \boxed{-0,4}$$

Использованы тождества:  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  и  $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ .