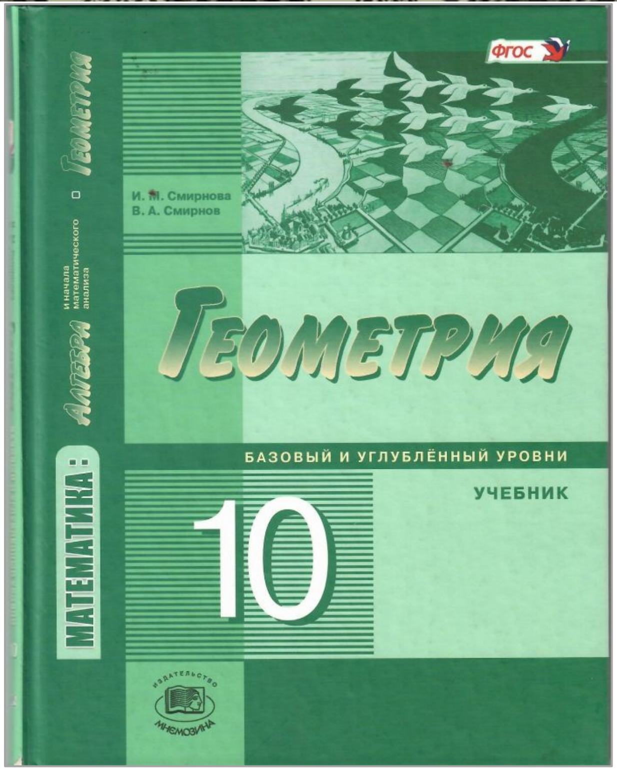
издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ
10 КЛАСС

Презентация к **§ 1-4** учебника
«Геометрия. **10** класс»
(базовый и углублённый уровни)
И.М. Смирновой и В.А. Смирнова



ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6 7-9 и 10-11 классов

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс (новые)
8 класс (новые)
9 класс (новые)

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи и пособия о преподавании геометрии в школе

Видеолекции и вебинары   Подготовка к ОГЭ   Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Учебник геометрии Л.С. Атанасяна и др.

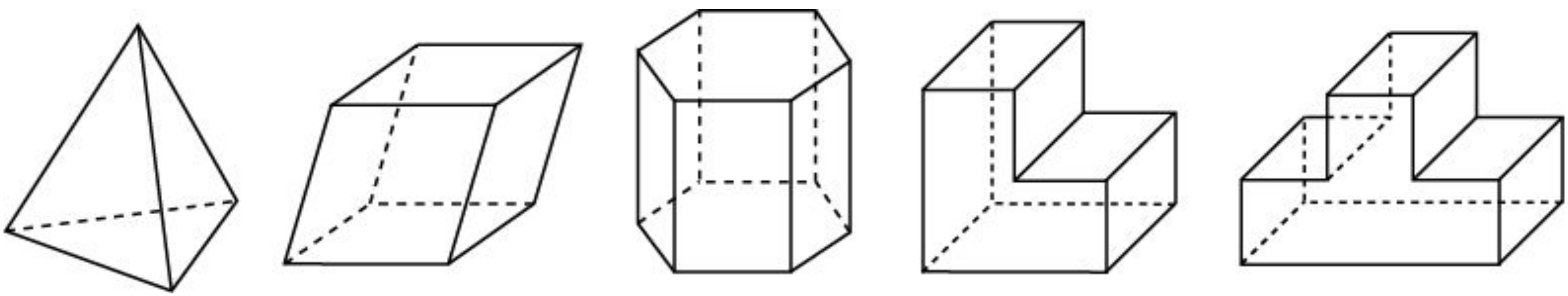
Учебник геометрии А.В. Погорелова

ОГЛАВЛЕНИЕ

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются диагоналями многогранника.

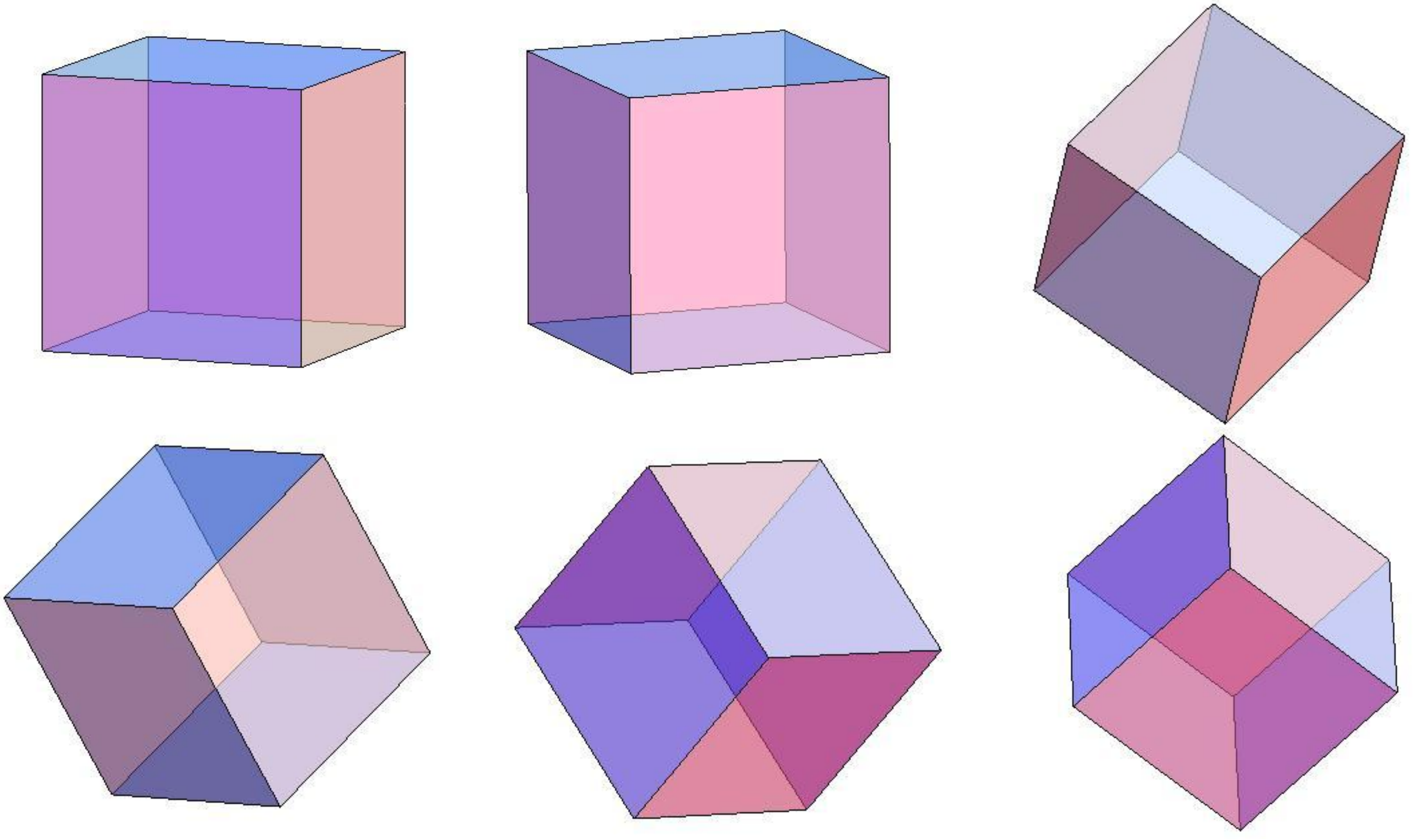
На рисунках приведены примеры многогранников



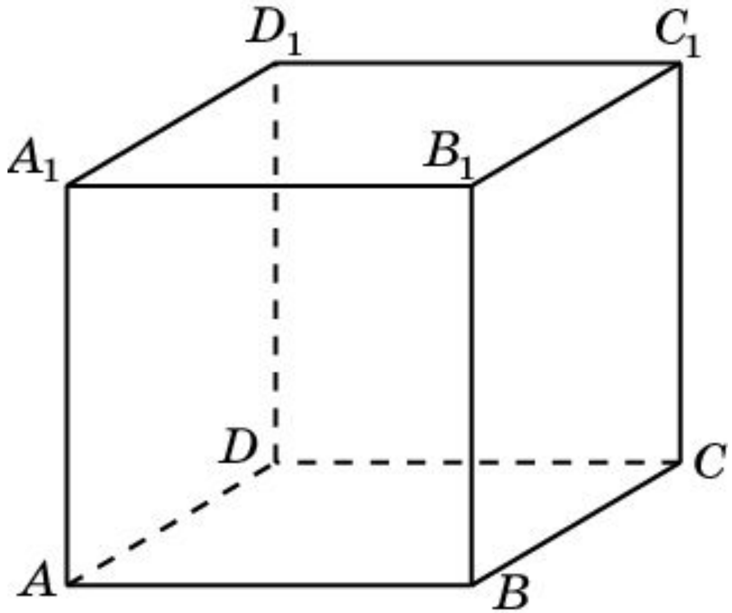
КУБ

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

На рисунке даны несколько изображений куба.

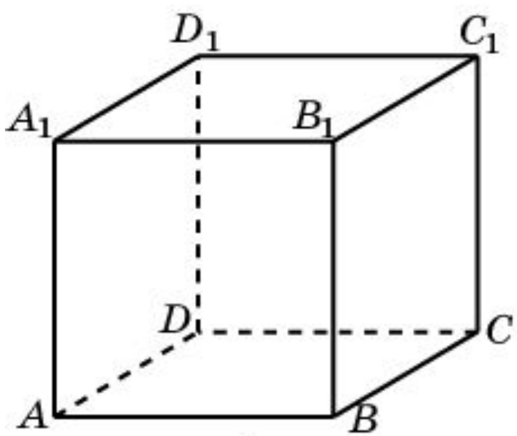


Обычно куб изображается так, как показано на рисунке. А именно, рисуется квадрат ABB_1A_1, изображающий одну из граней куба, и равный ему квадрат DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам квадрата ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих квадратов соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые ребра куба, проводятся пунктиром.

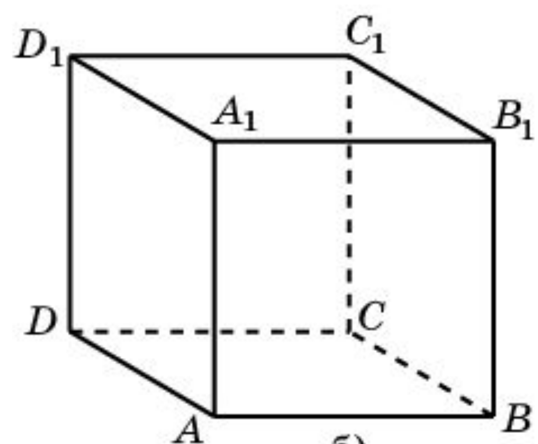


На рисунках показаны несколько изображений куба.

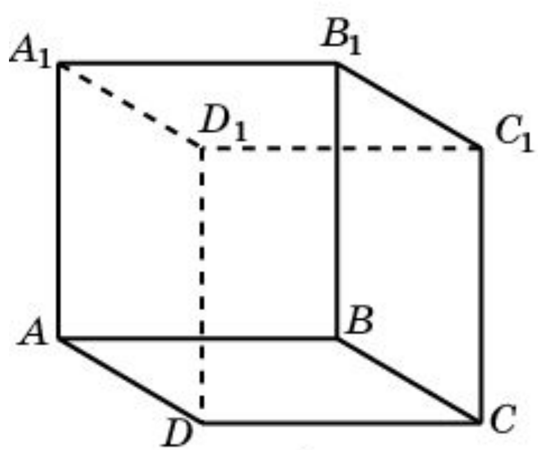
На рисунке а) мы смотрим на куб сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.



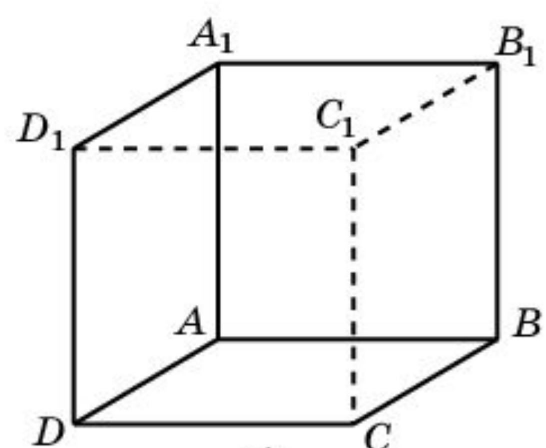
а)



б)



в)



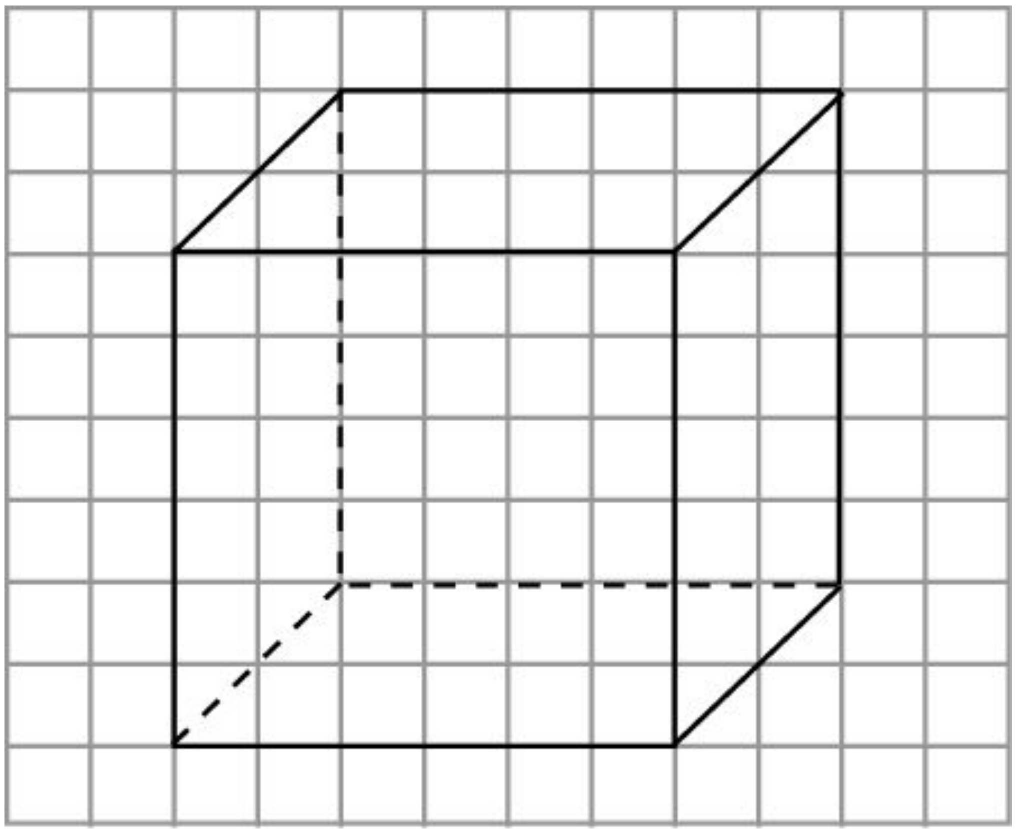
г)

Упражнения

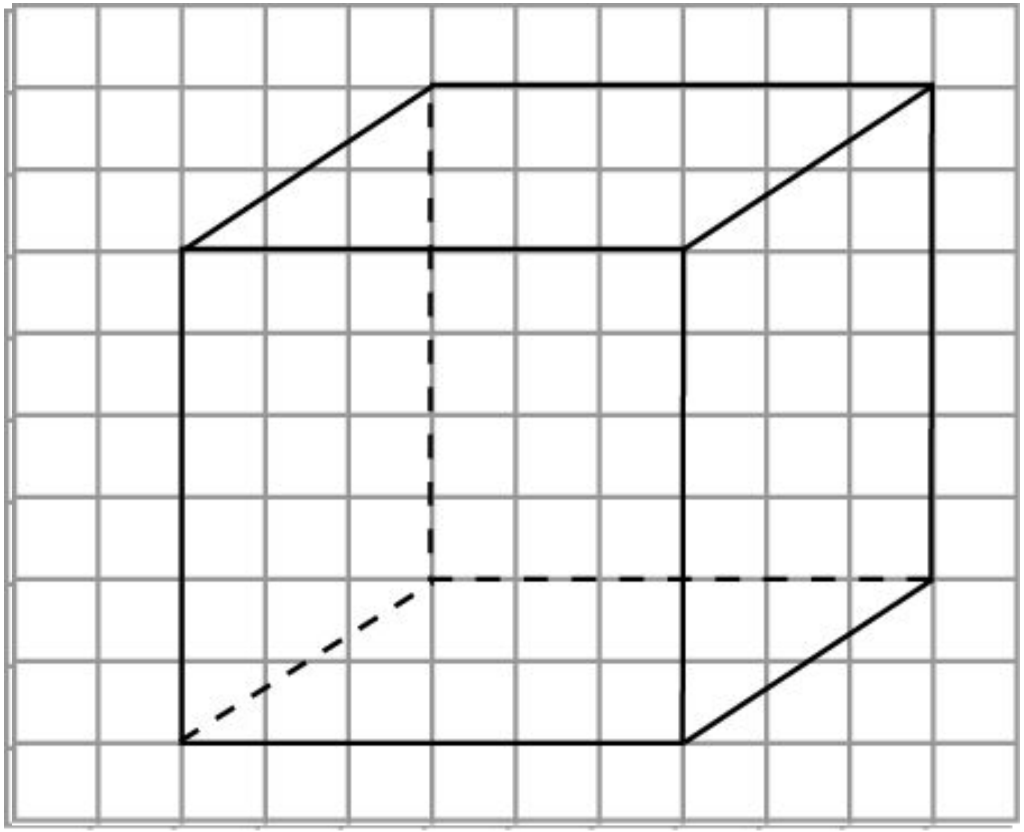
Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет куб?

Ответ: В = 8, Р = 12, Г = 6.

Изобразите куб на клетчатой бумаге, аналогично данному на рисунке.

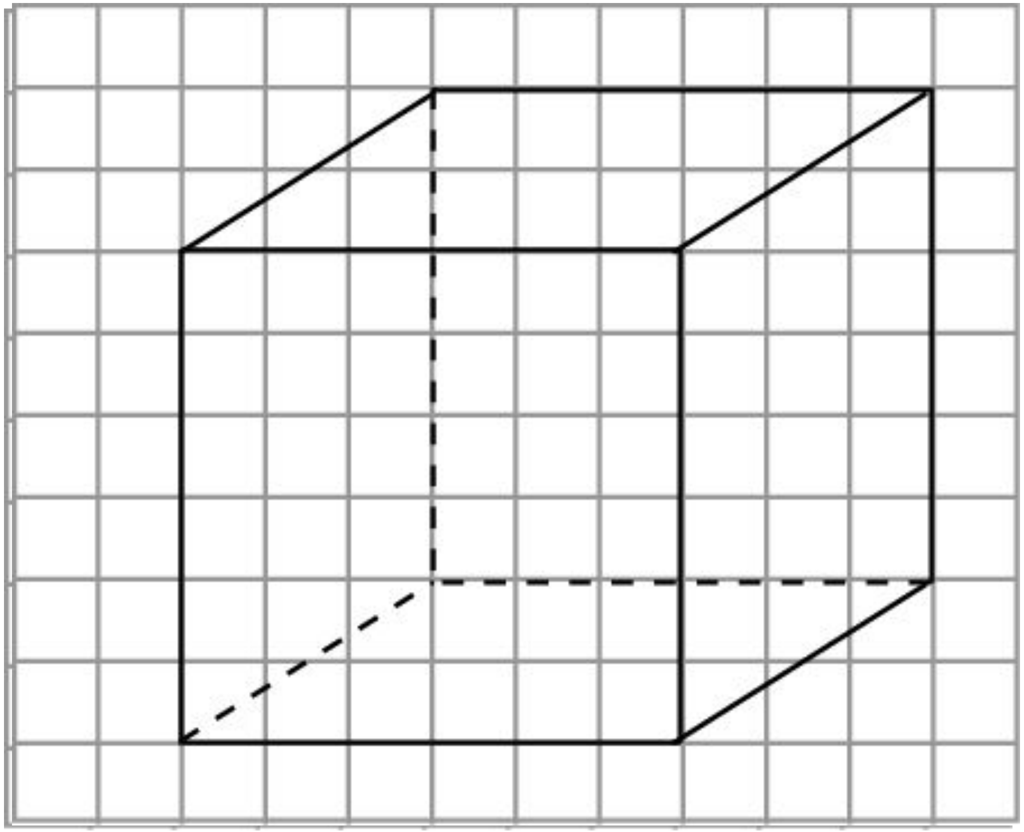


На рисунке изображены три ребра куба. Изобразите весь куб.



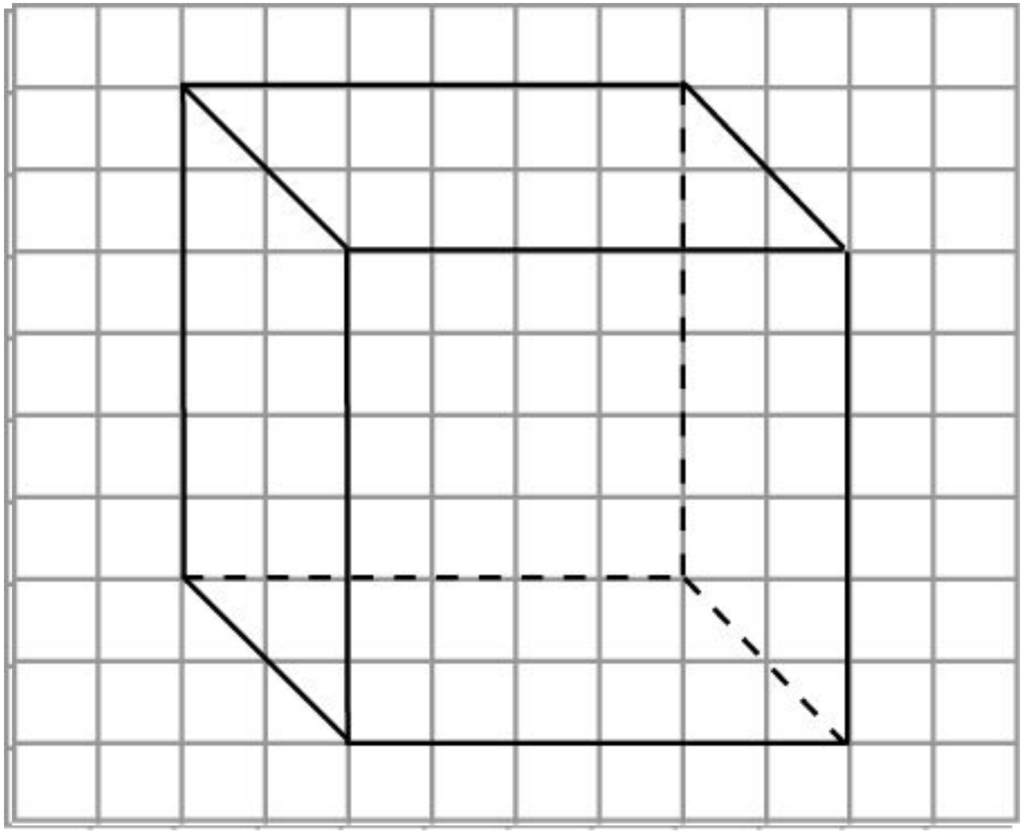
Ответ.

На рисунке изображены три ребра куба. Изобразите весь куб.



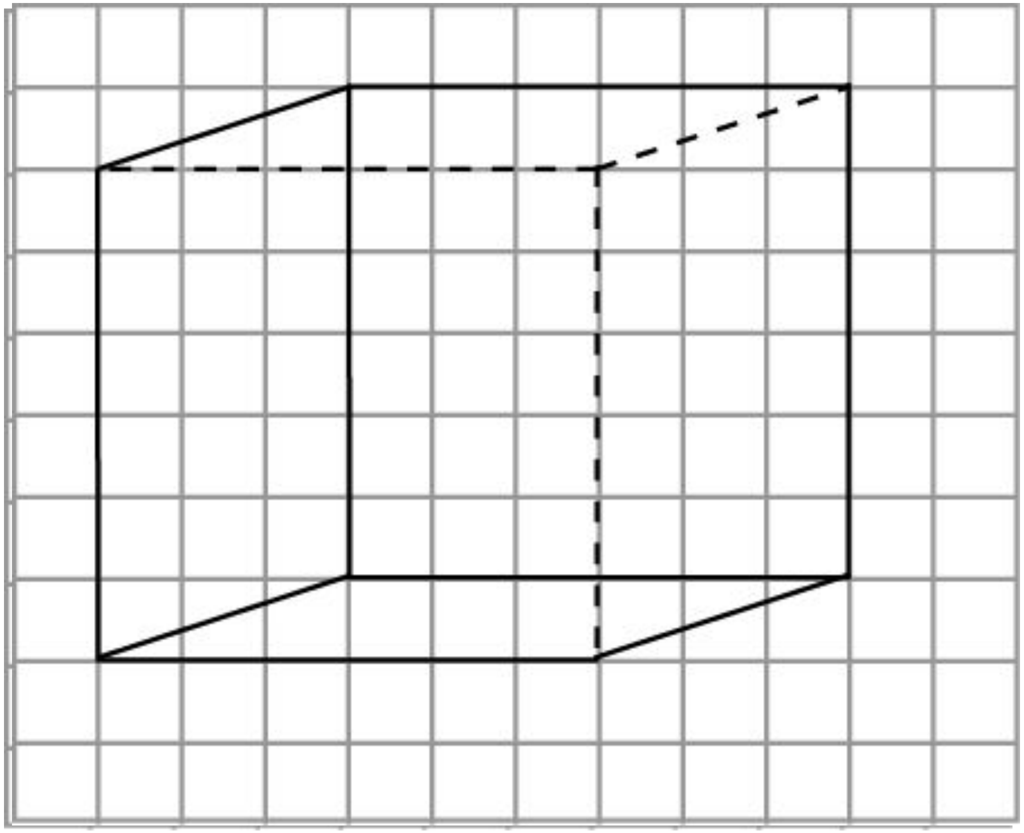
Ответ.

На рисунке изображены три ребра куба. Изобразите весь куб.



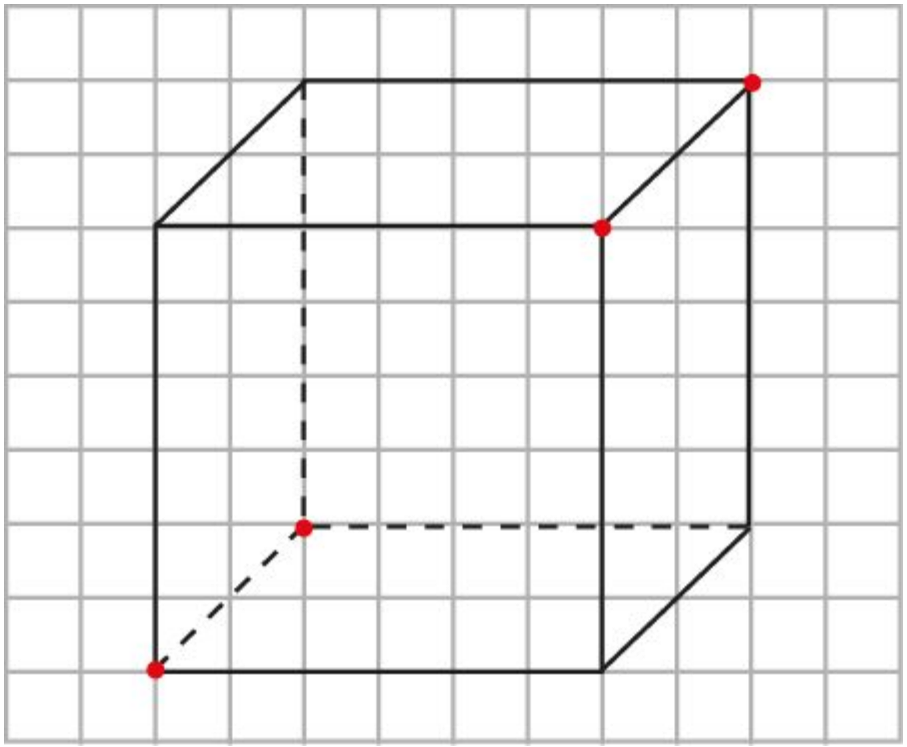
Ответ.

На рисунке изображены три ребра куба. Изобразите весь куб.



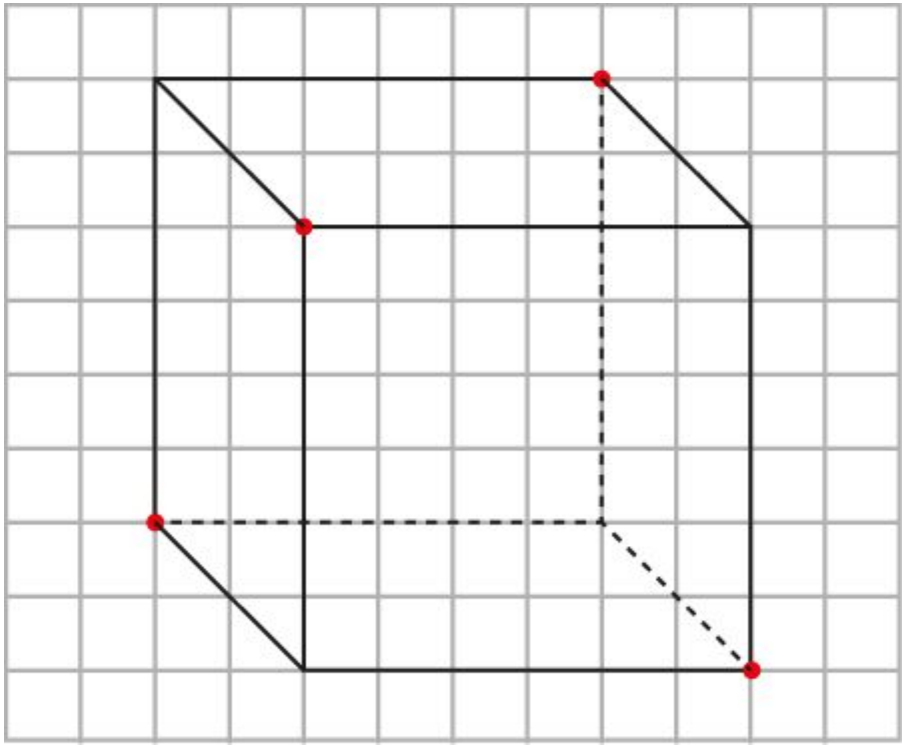
Ответ.

На рисунке изображены четыре вершины куба. Изобразите весь куб.



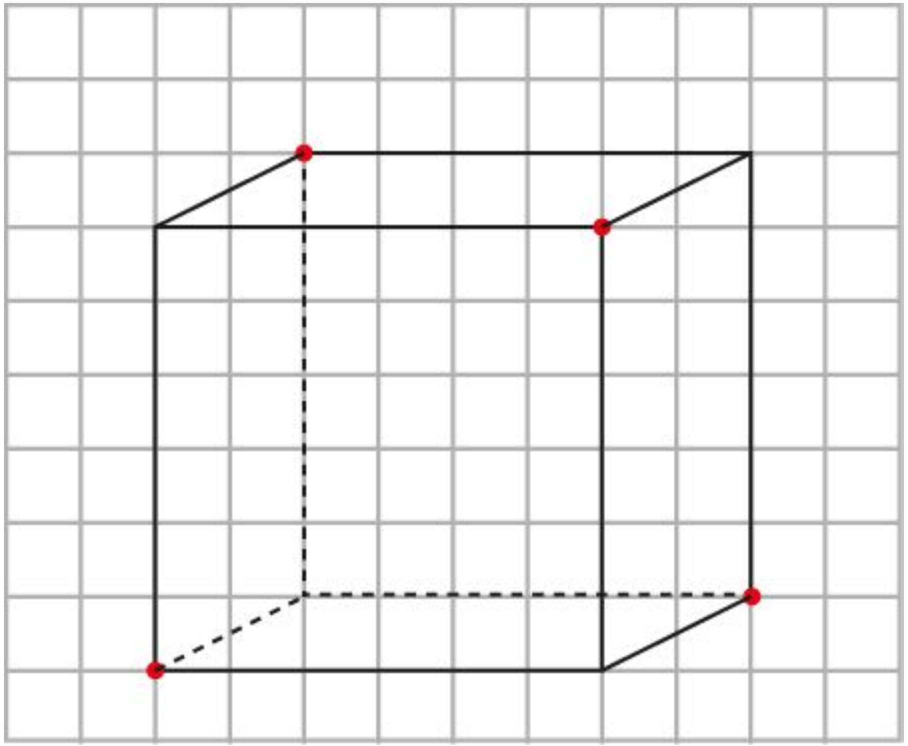
Ответ.

На рисунке изображены четыре вершины куба. Изобразите весь куб.



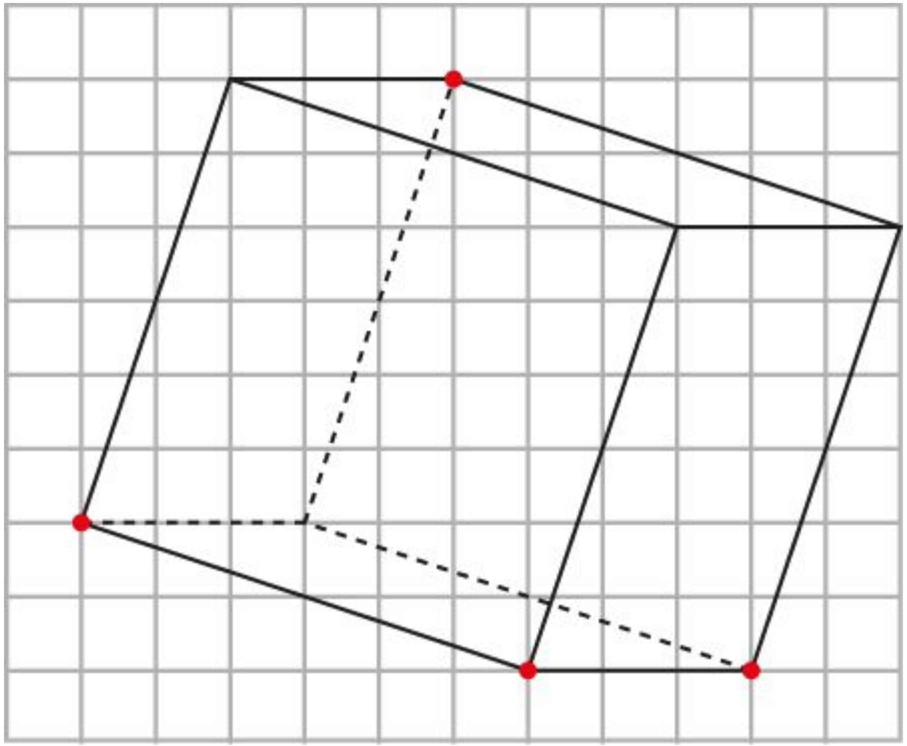
Ответ.

На рисунке изображены четыре вершины куба. Изобразите весь куб.



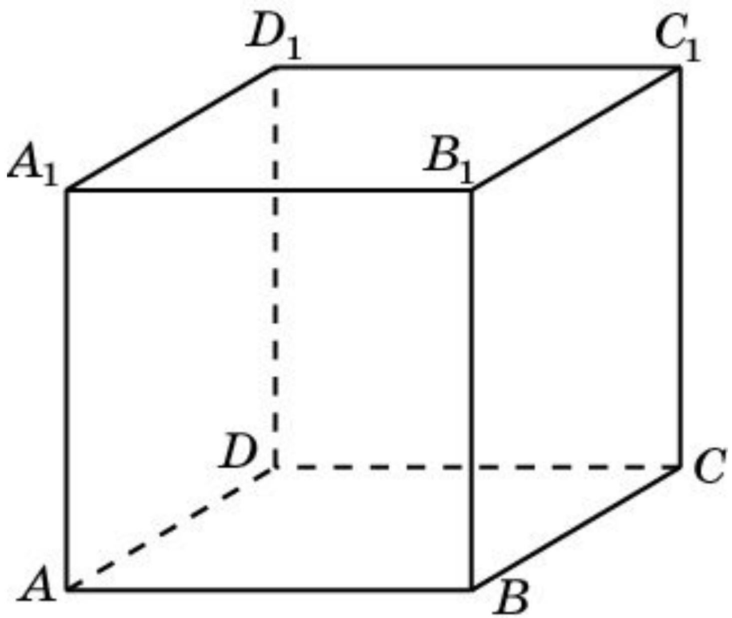
Ответ.

На рисунке изображены четыре вершины куба. Изобразите весь куб.



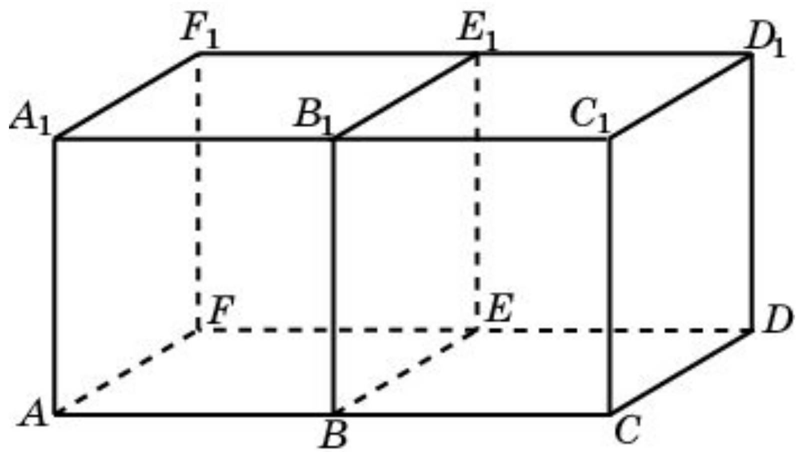
Ответ.

Сколько имеется путей длины 3 по ребрам единичного куба из вершины A в вершину C_1?



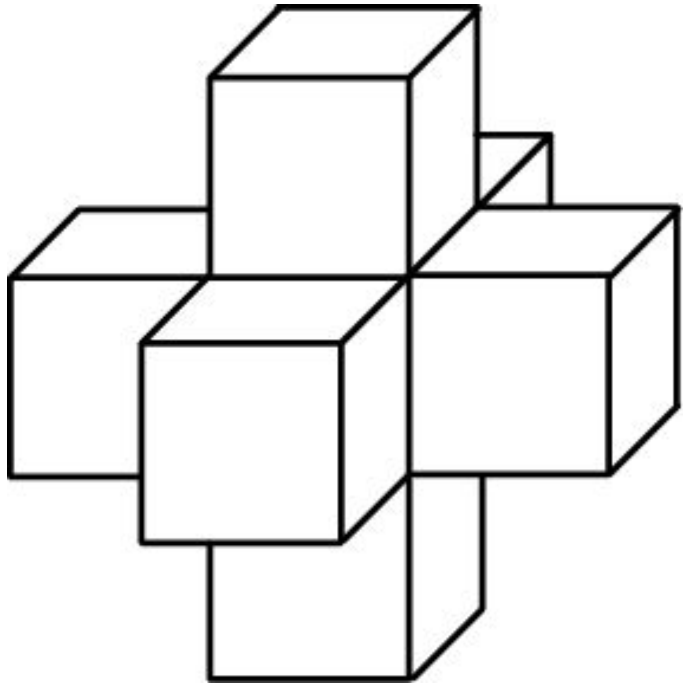
Ответ. 6.

На рисунке изображены два единичных куба. Сколько имеется путей длины 4 по ребрам этих кубов из вершины A в вершину D_1?



Ответ. 12.

Существуют ли многогранники, отличные от куба, все грани которых – квадраты?



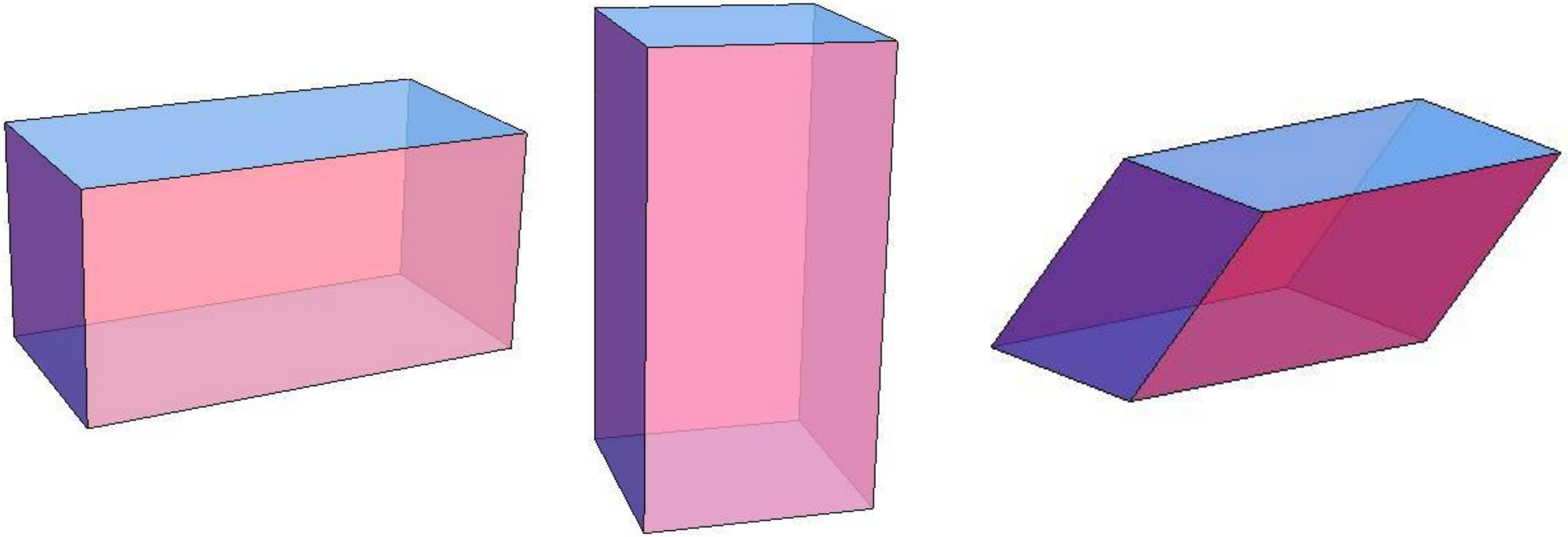
Ответ: Да, например, пространственный крест.

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

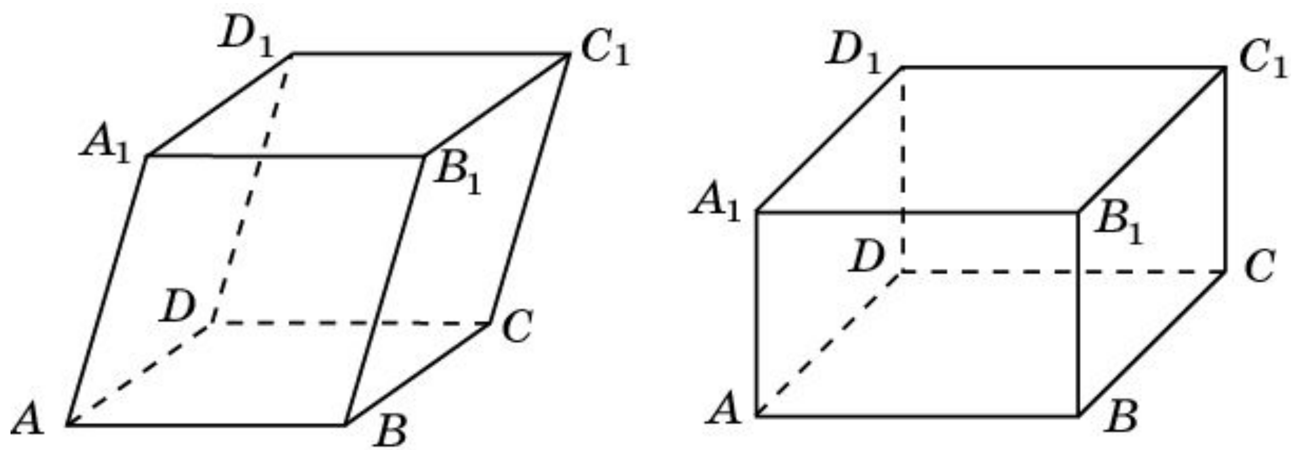
Параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.

Прямоугольным параллелепипедом называется параллелепипед, грани которого – прямоугольники.

На рисунках показаны некоторые изображения параллелепипедов.

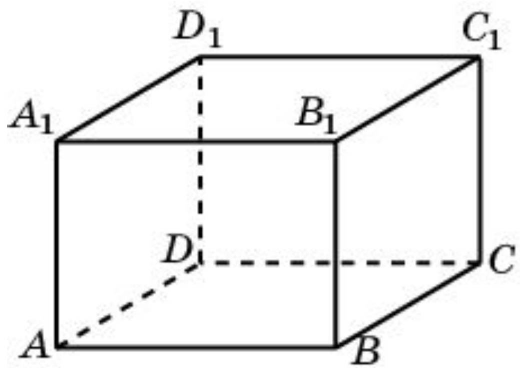


Обычно параллелепипед изображается так, как показано на рисунке. А именно, рисуется параллелограмм ABB_1A_1, изображающий одну из граней параллелепипеда, и равный ему параллелограмм DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам параллелограмма ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих параллелограммов соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые ребра куба, проводятся пунктиром. В случае прямоугольного параллелепипеда вместо параллелограммов, изображающих две грани, рисуются равные прямоугольники.

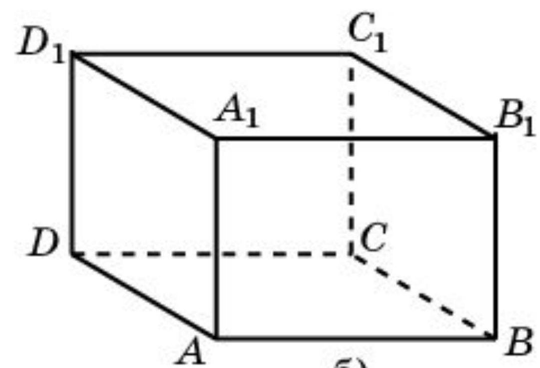


На рисунках показаны несколько изображений прямоугольного параллелепипеда.

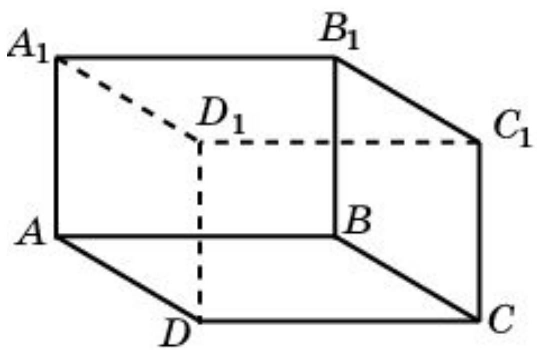
На рисунке а) мы смотрим на куб сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.



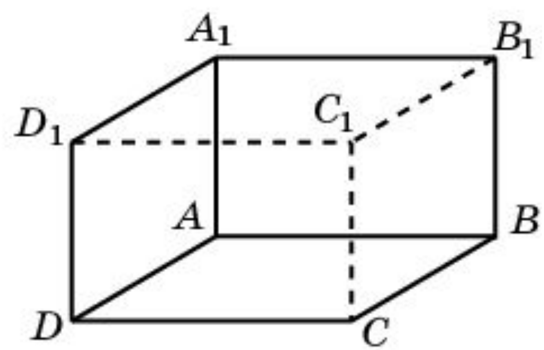
а)



б)



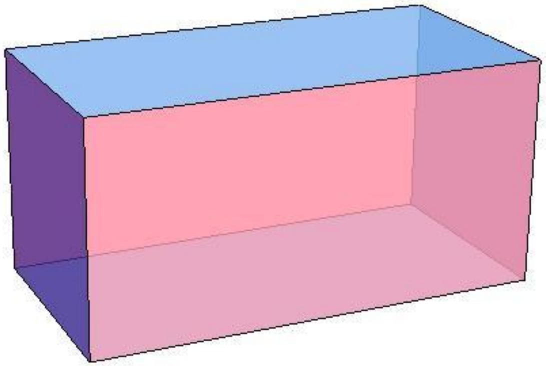
в)

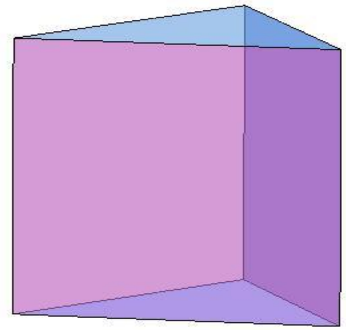


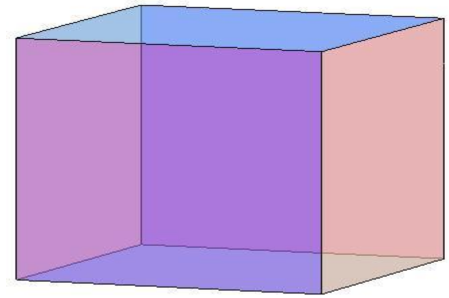
г)

Упражнения

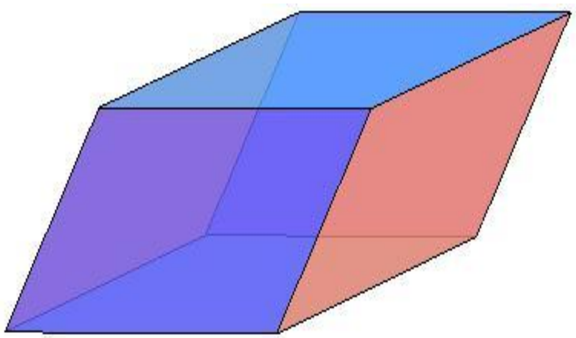
Укажите номера рисунков, на которых изображен параллелепипед?

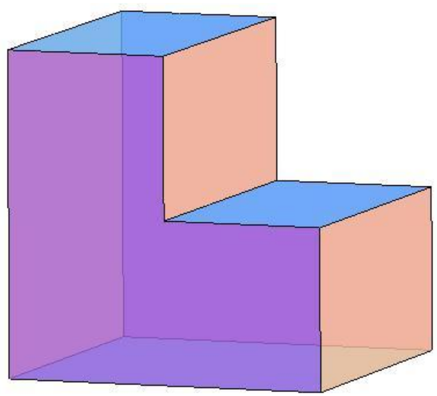


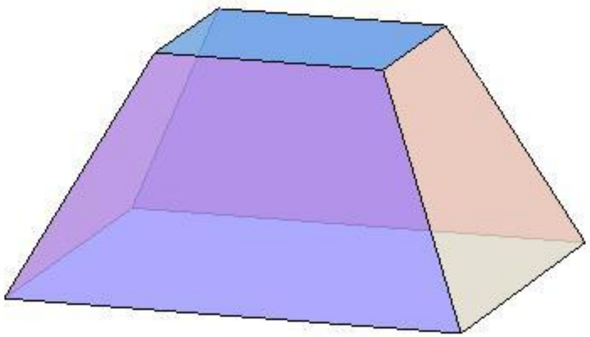




1 2 3





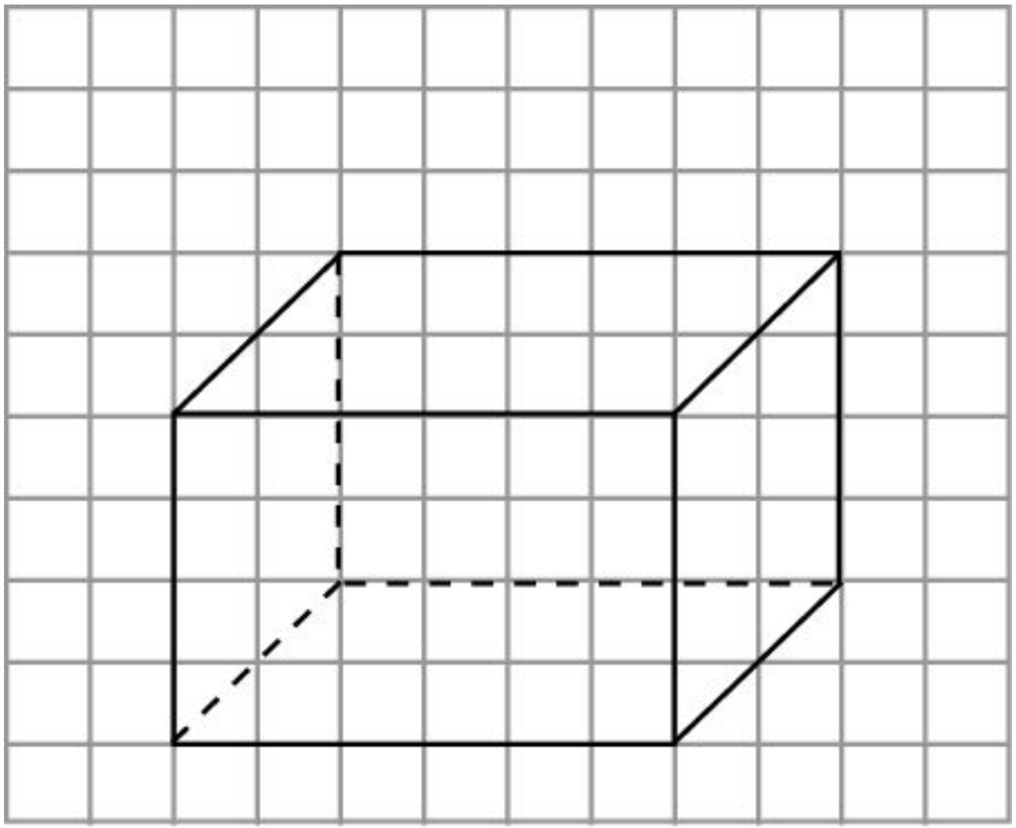


Ответ: 1, 3, 4.

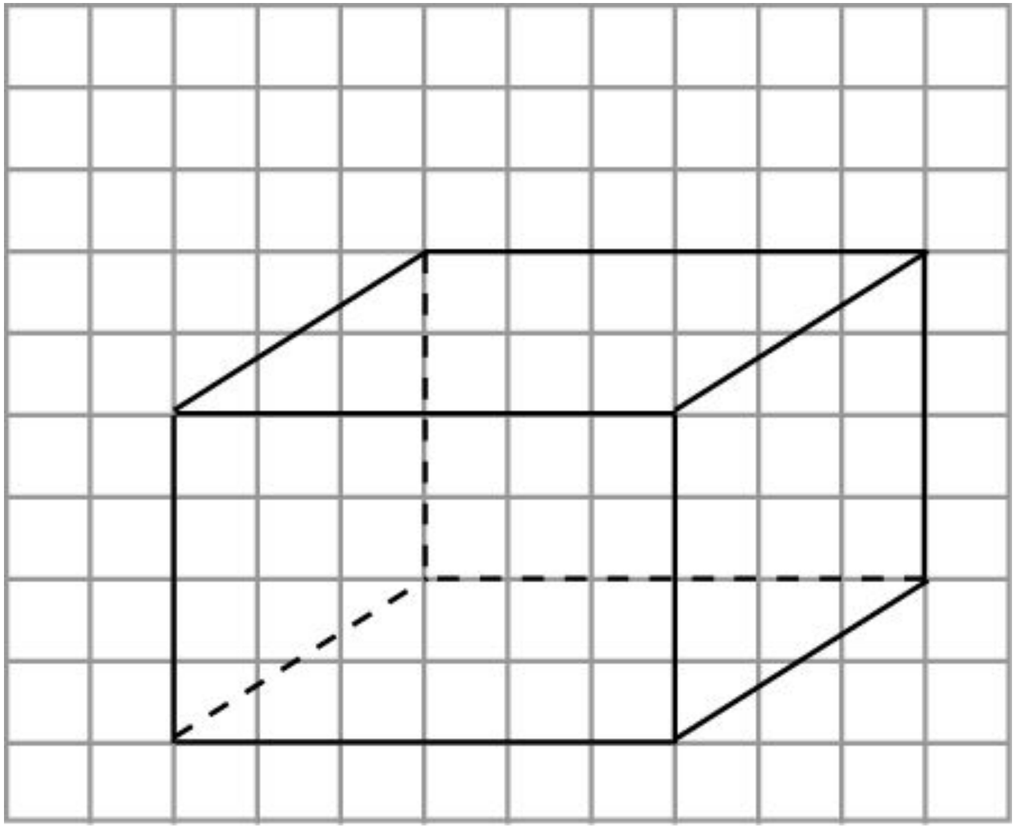
Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет параллелепипед?

Ответ: В = 8, Р = 12, Г = 6.

Изобразите прямоугольный параллелепипед на клетчатой бумаге, аналогично данному на рисунке.

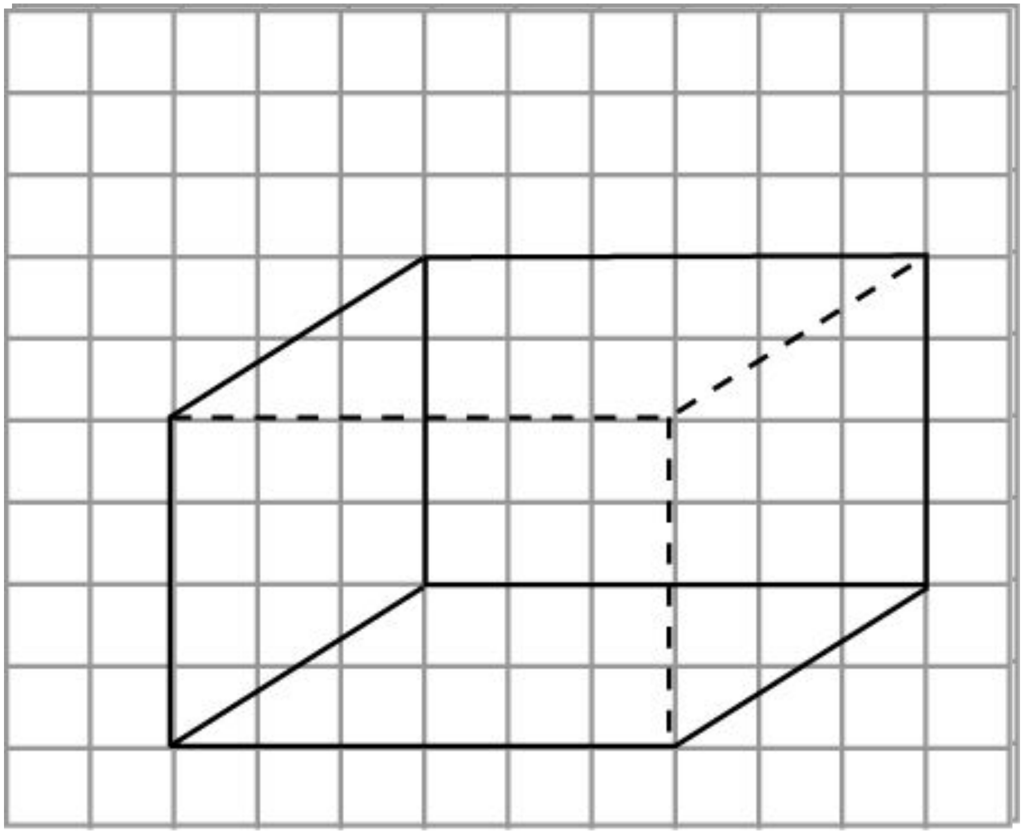


На рисунке изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда. Изобразите весь параллелепипед.



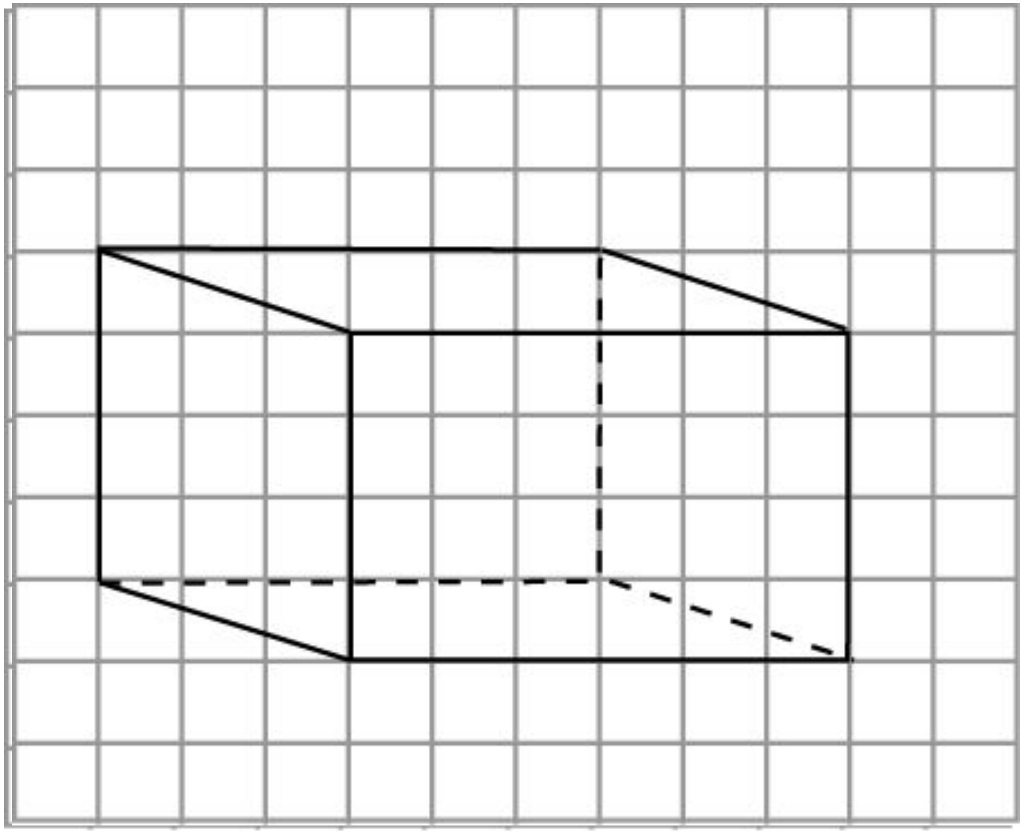
Ответ.

На рисунке изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда. Изобразите весь параллелепипед.



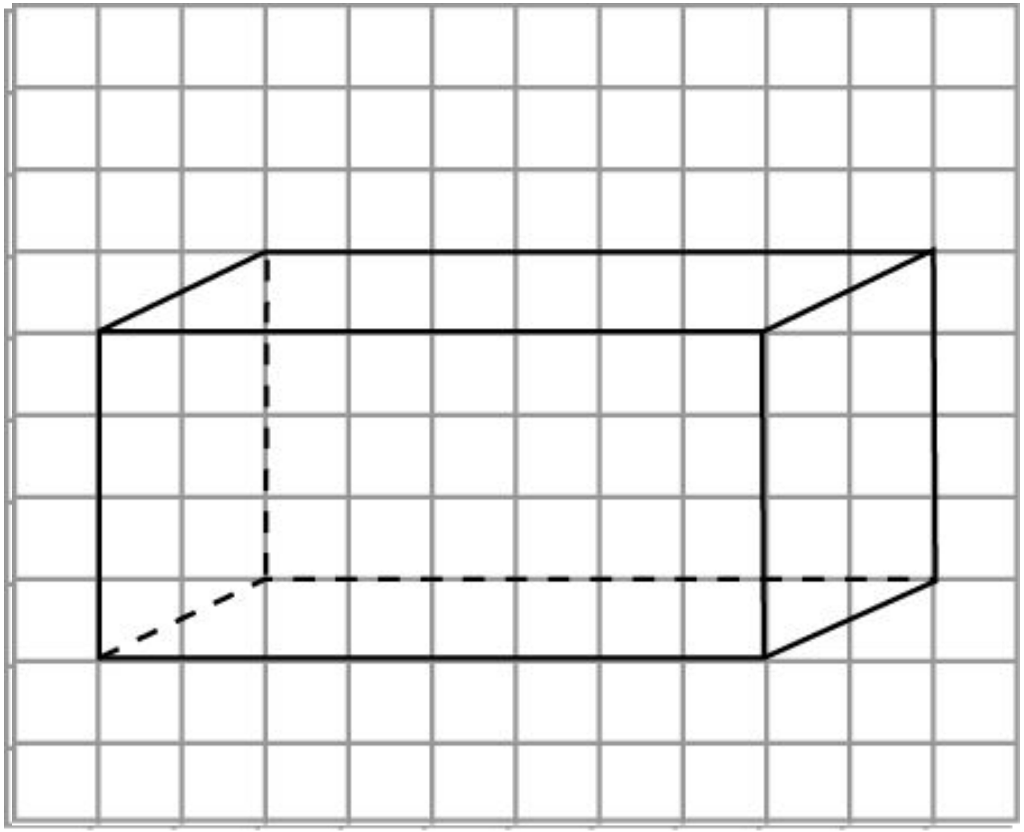
Ответ.

На рисунке изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда. Изобразите весь параллелепипед.



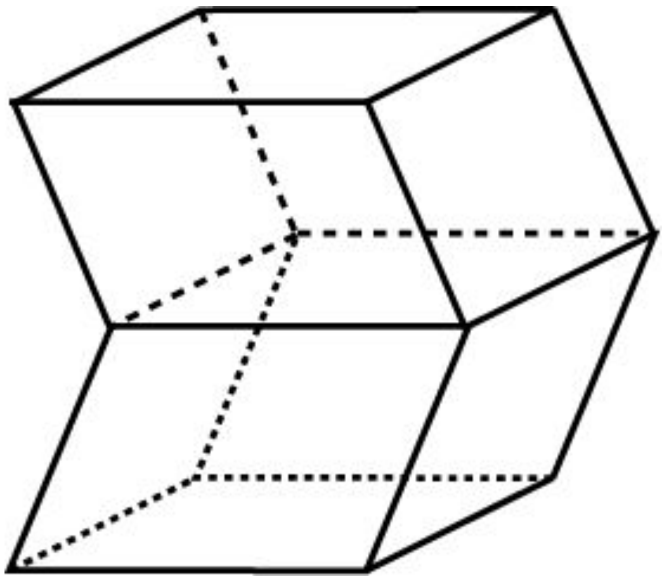
Ответ.

На рисунке изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда. Изобразите весь параллелепипед.



Ответ.

Существуют ли многогранники, отличные от параллелепипеда, все грани которых – параллелограммы?



Ответ: Да.

Определение призмы в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

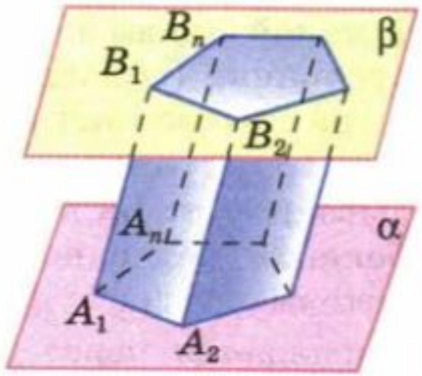
30 Призма

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью (п. 11).

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой** (см. рис. 76).



Призма. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани

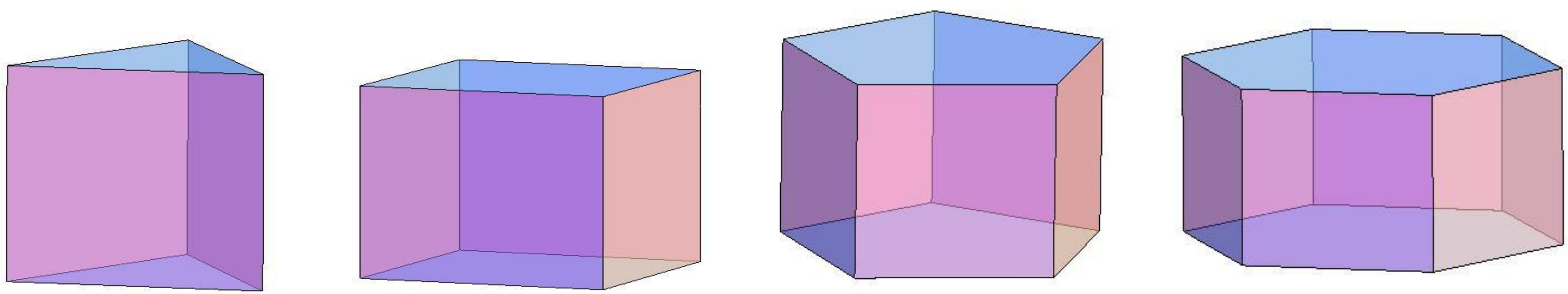
Рис. 76

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае — **наклонной**. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Определение призмы в нашем учебнике

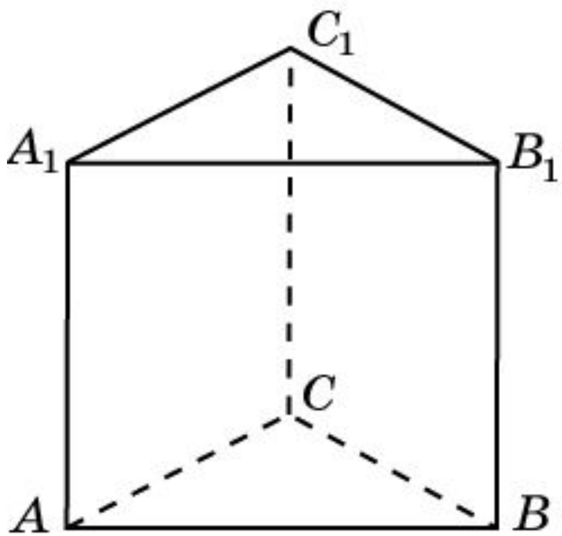
Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых боковыми гранями призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются боковыми ребрами призмы.

Призма называется *n*-угольной, если ее основаниями являются *n*-угольники.



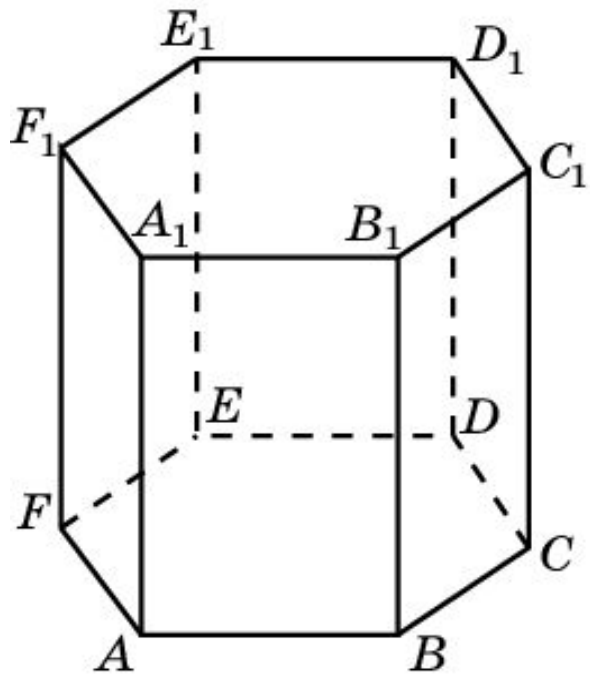
На рисунке изображены треугольная, четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная призмы.

Призма называется прямой, если её боковые грани – прямоугольники.



На рисунке изображена прямая треугольная призма, ABB_1A_1 – прямоугольник.

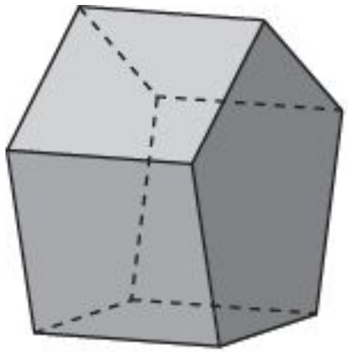
Прямая призма называется правильной, если её основания – правильные многоугольники.



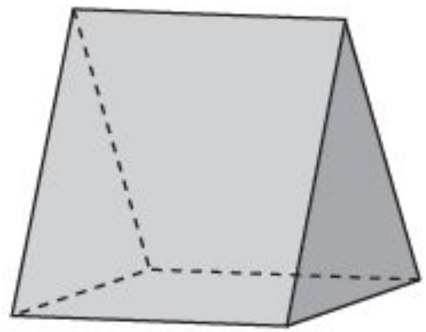
На рисунке изображена правильная шестиугольная призма. Ее основания изображаются шестиугольниками, противоположные стороны которых равны и параллельны. Боковые грани ABB_1A_1 и DEE_1D_1 изображаются прямоугольниками.

Упражнения

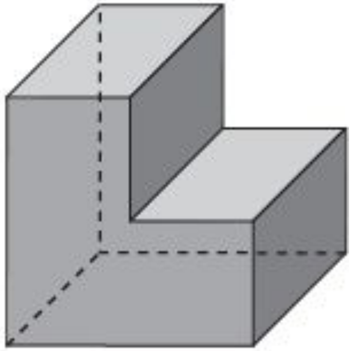
На рисунках укажите призмы.



а)

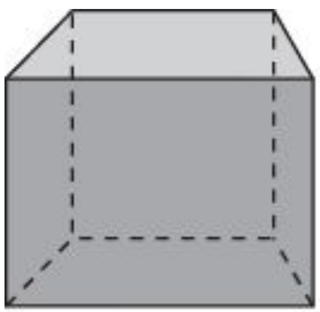


б)

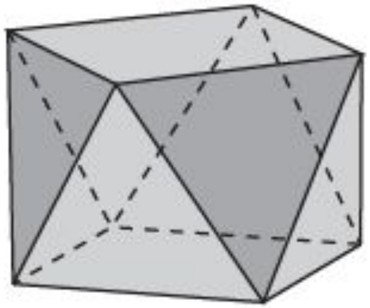


в)

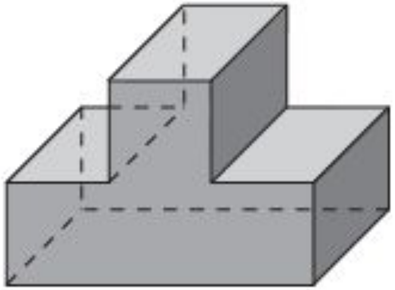
Рис. 3.9



а)



б)



в)

Рис. 3.10

Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет n-угольная призма?

Ответ: В = 2n, Р = 3n, Г = n + 2.

Существует ли призма, которая имеет:

а) 4 ребра? Ответ: Нет.

б) 6 рёбер? Ответ: Нет.

в) 12 рёбер? Ответ: Да.

г) 21 ребро? Ответ: Да.

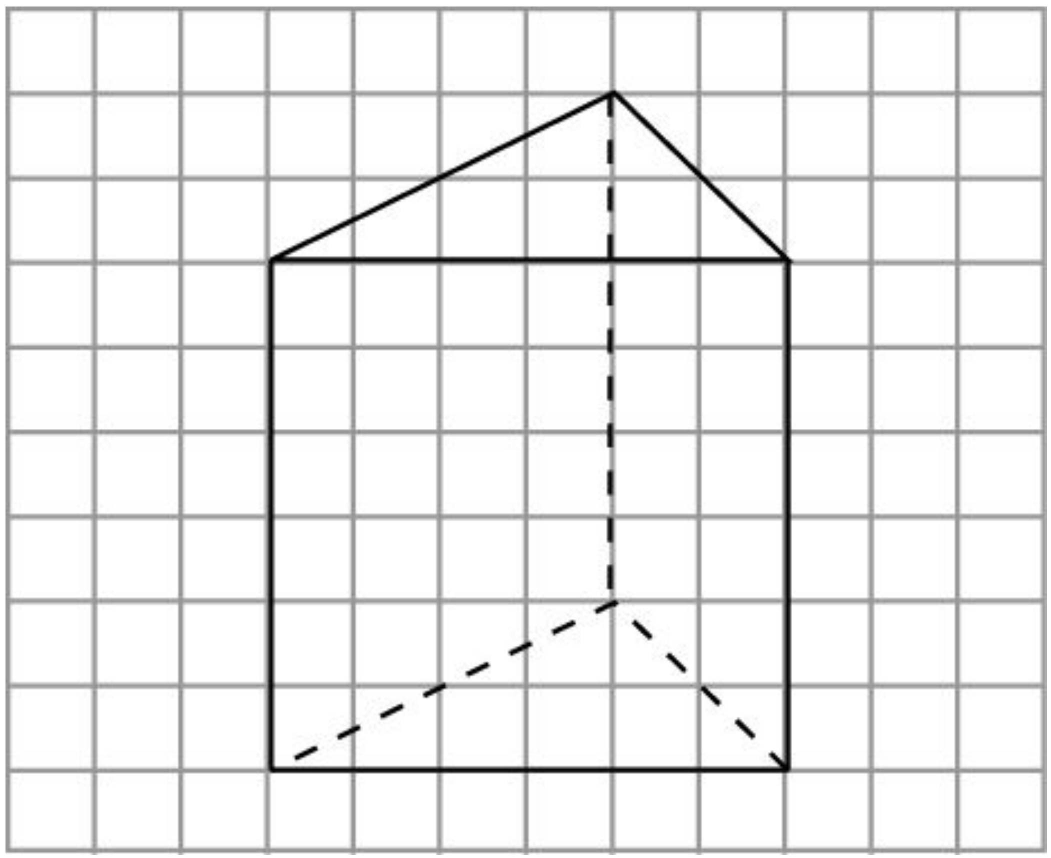
Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет:

а) 18 рёбер? Ответ: Шестиугольник.

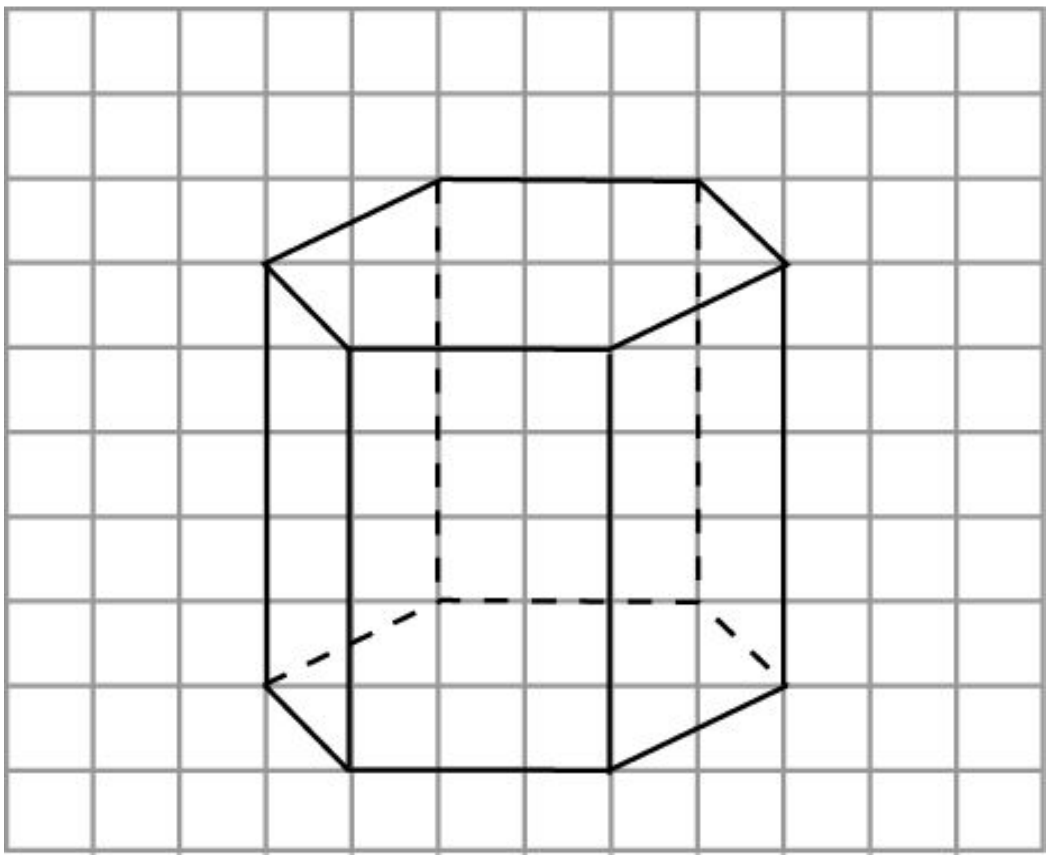
б) 24 вершины? Ответ: Двенадцатиугольник.

в) 36 граней? Ответ: Тридцатичетырёхугольник.

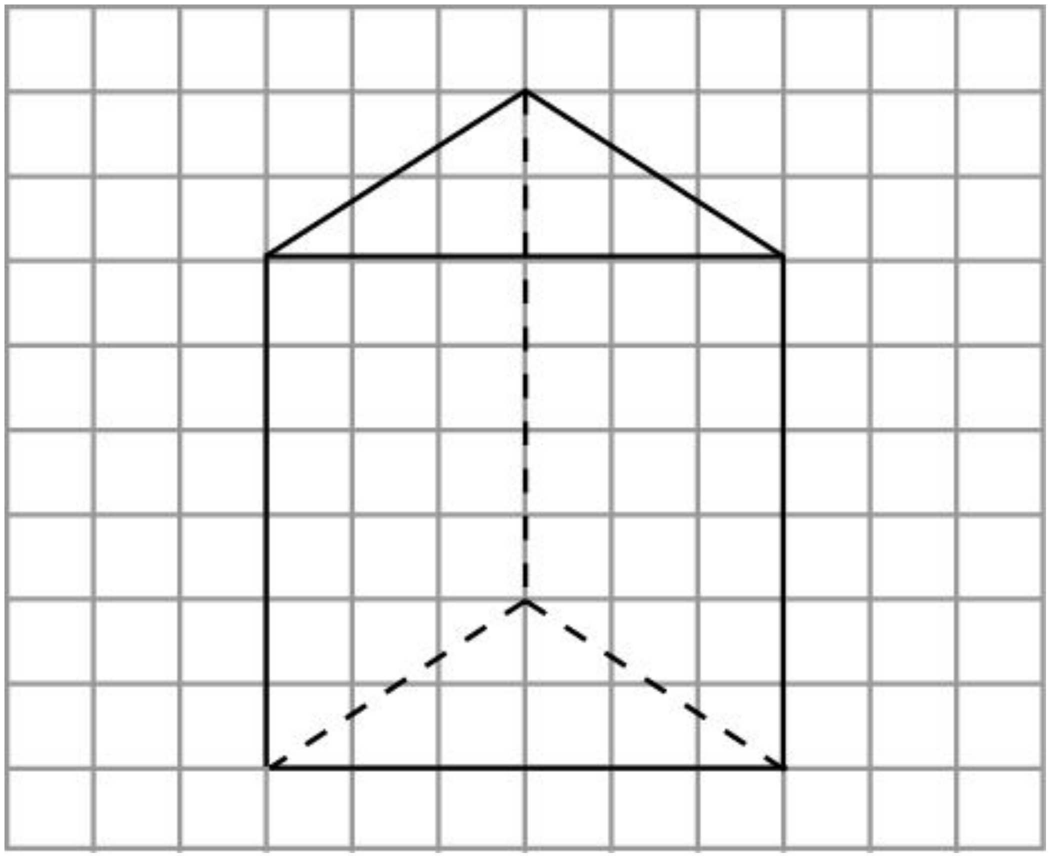
Изобразите треугольную призму на клетчатой бумаге, аналогично данной на рисунке.



Изобразите правильную шестиугольную призму на клетчатой бумаге, аналогично данной на рисунке.

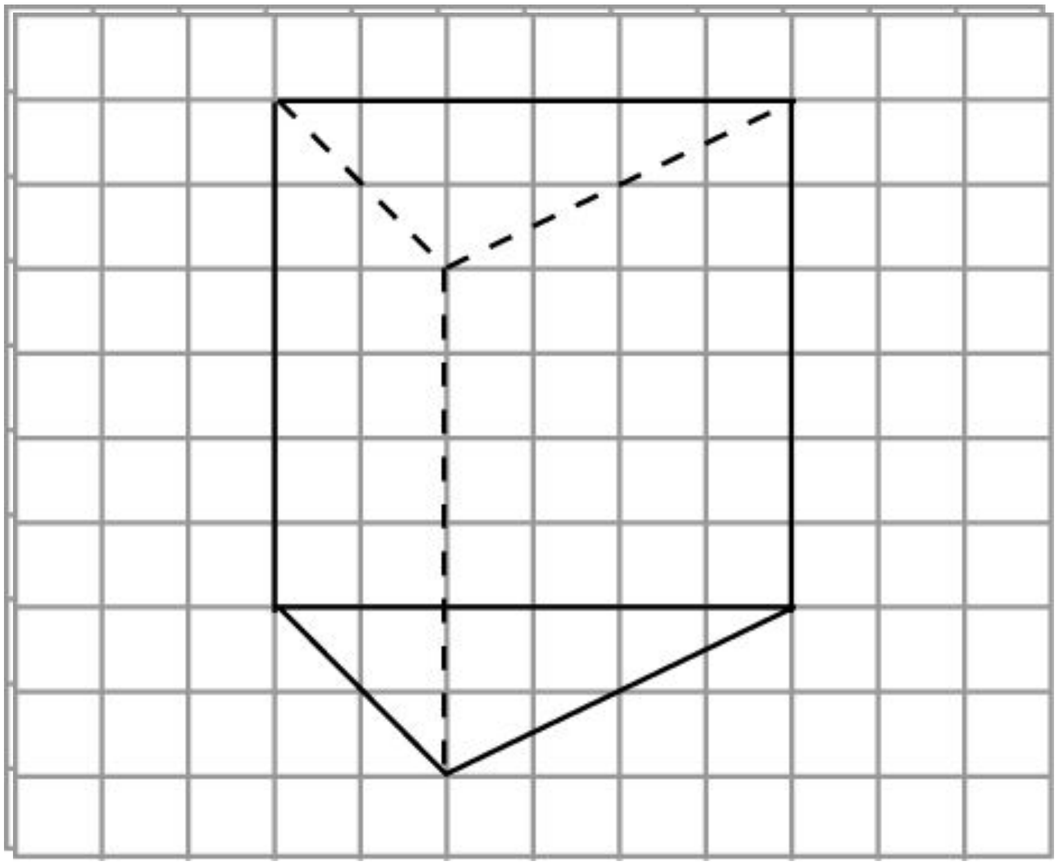


На рисунке изображены три ребра треугольной призмы. Изобразите всю призму.



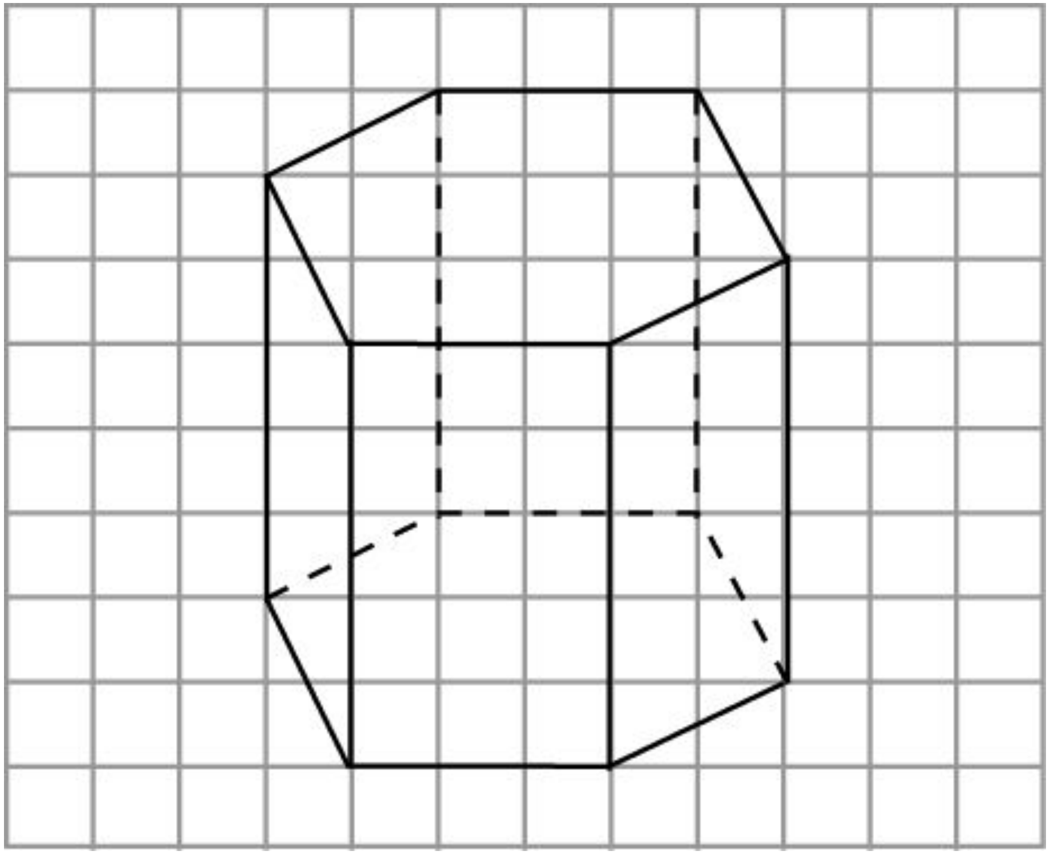
Ответ.

На рисунке изображены три ребра треугольной призмы. Изобразите всю призму.



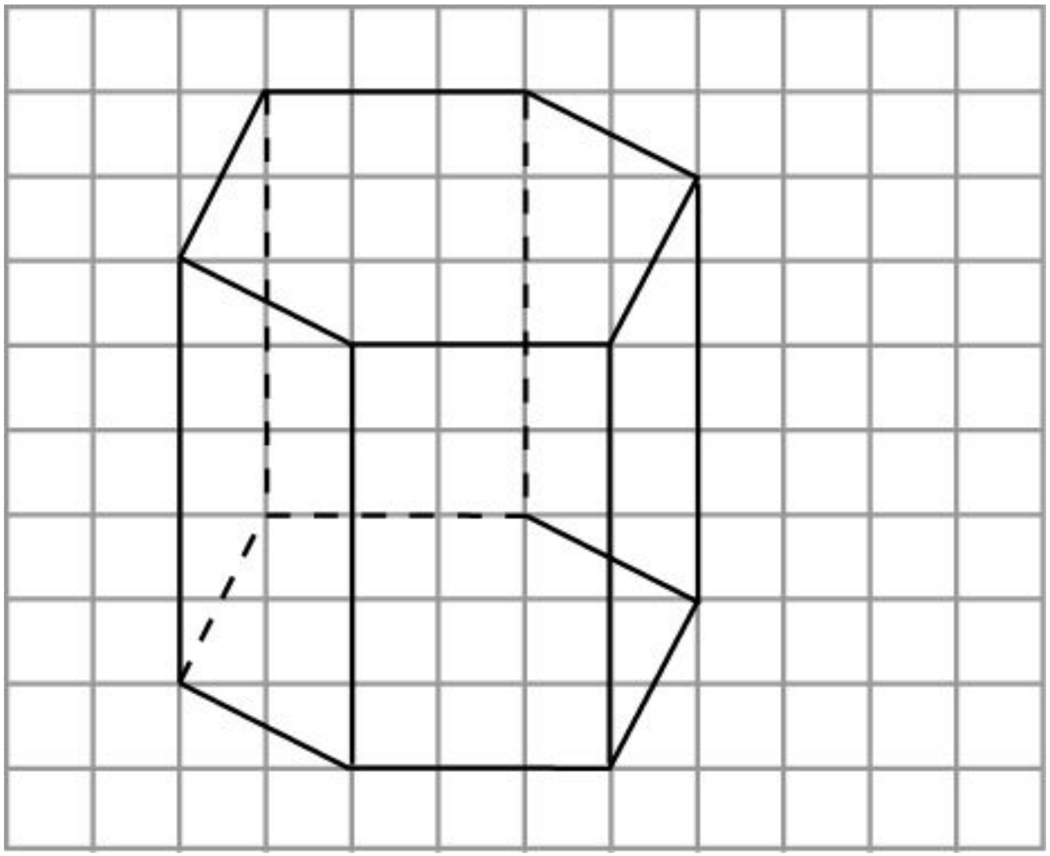
Ответ.

На рисунке изображены четыре ребра шестиугольной призмы. Изобразите всю призму.



Ответ.

На рисунке изображены четыре ребра шестиугольной призмы. Изобразите всю призму.

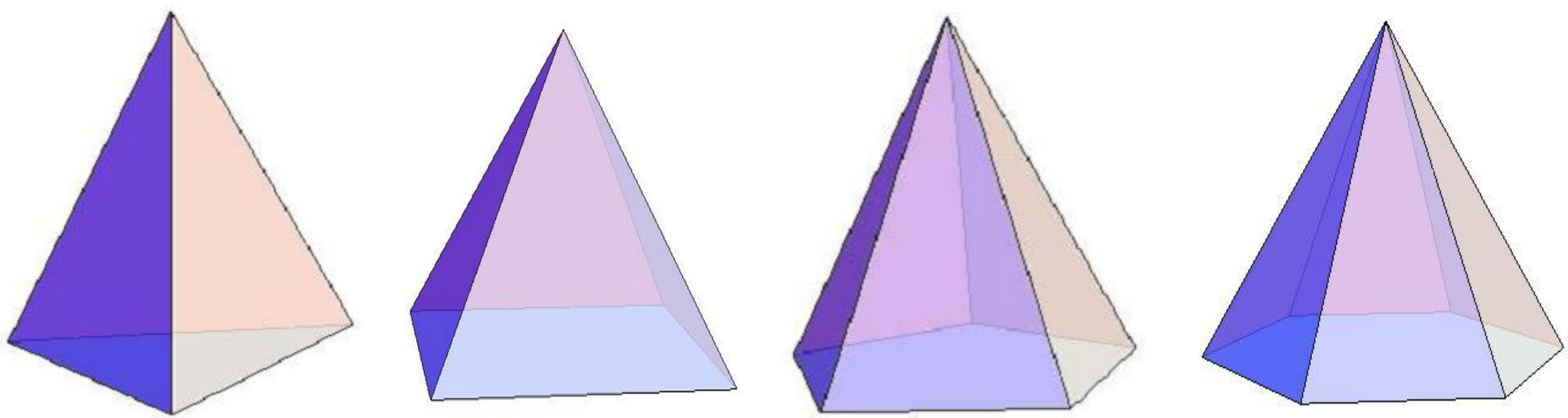


Ответ.

ПИРАМИДА

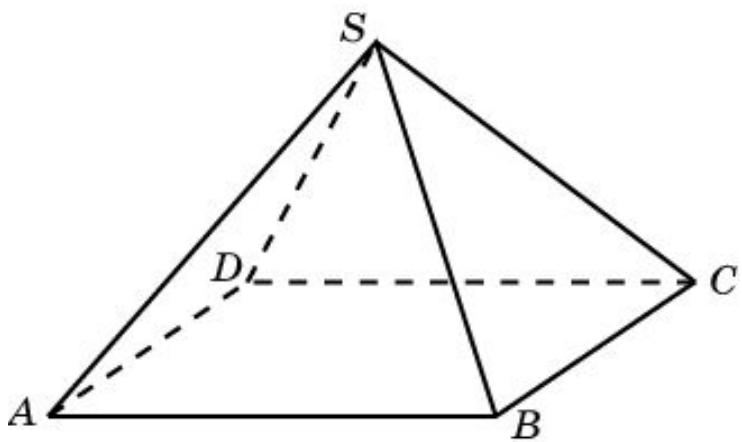
Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды. Стороны боковых граней, не лежащие в основании, называются боковыми ребрами пирамиды. Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды

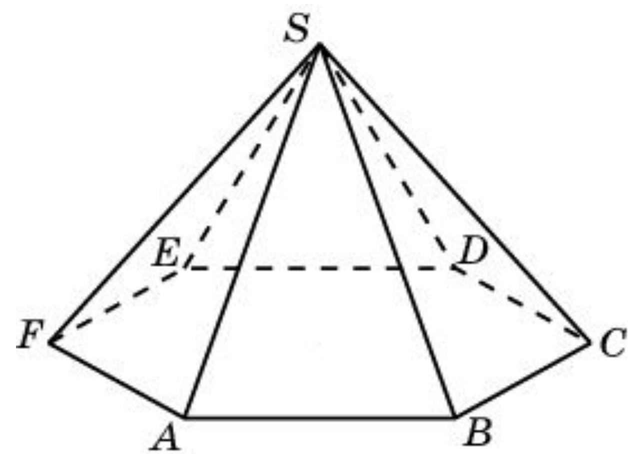
Пирамида называется *n*-угольной, если ее основанием является *n*-угольник.



На рисунке изображенsы треугольная, четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная пирамиды.

Пирамида называется правильной, если её основание – правильный многоугольник и все боковые ребра равны.

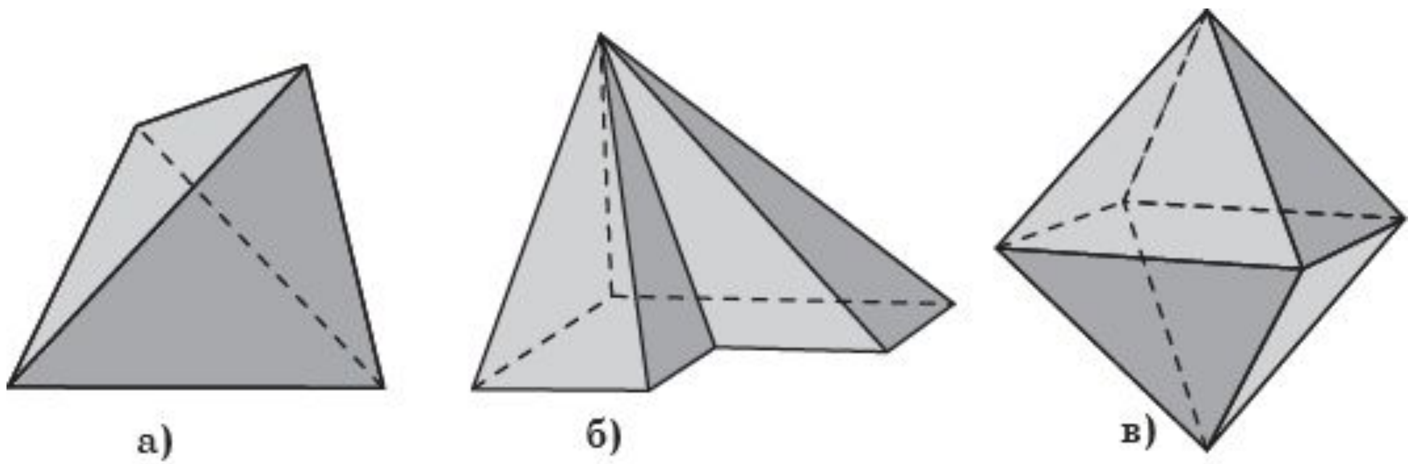




На рисунках изображены правильная четырехугольная и правильная шестиугольная пирамиды. Их основания изображаются соответственно параллелограммом и шестиугольником, противоположные стороны которого равны и параллельны.

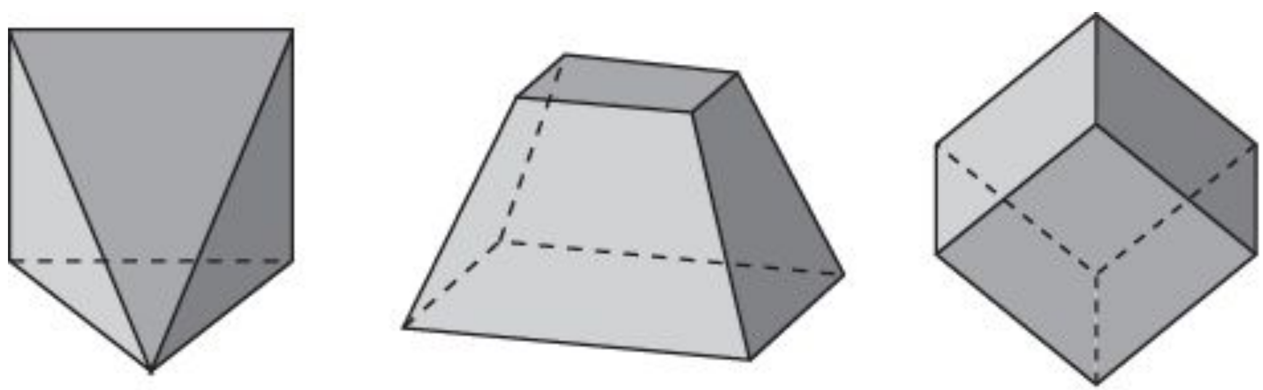
Упражнения

На рисунках укажите пирамиды.



а) б) в)

Рис. 3.11



а) б) в)

Рис. 3.12

Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет n-угольная пирамида?

Ответ: В = n + 1, Р = $2n$, Г = n + 1.

Существует ли пирамида, которая имеет:

а) 10 ребер? Ответ: Да.

б) 6 рёбер? Ответ: Да.

в) 24 ребра? Ответ: Да.

г) 33 ребра? Ответ: Нет.

Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет:

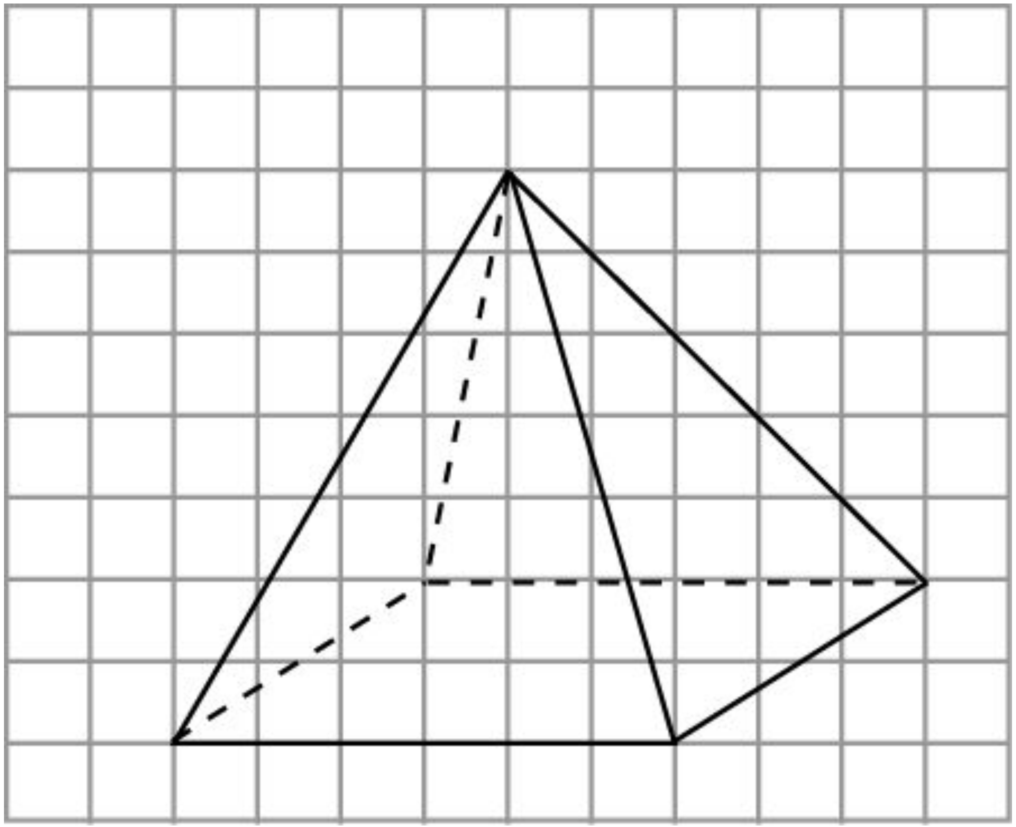
а) 8 рёбер? Ответ: 4-угольник.

б) 22 вершины? Ответ: 21-угольник.

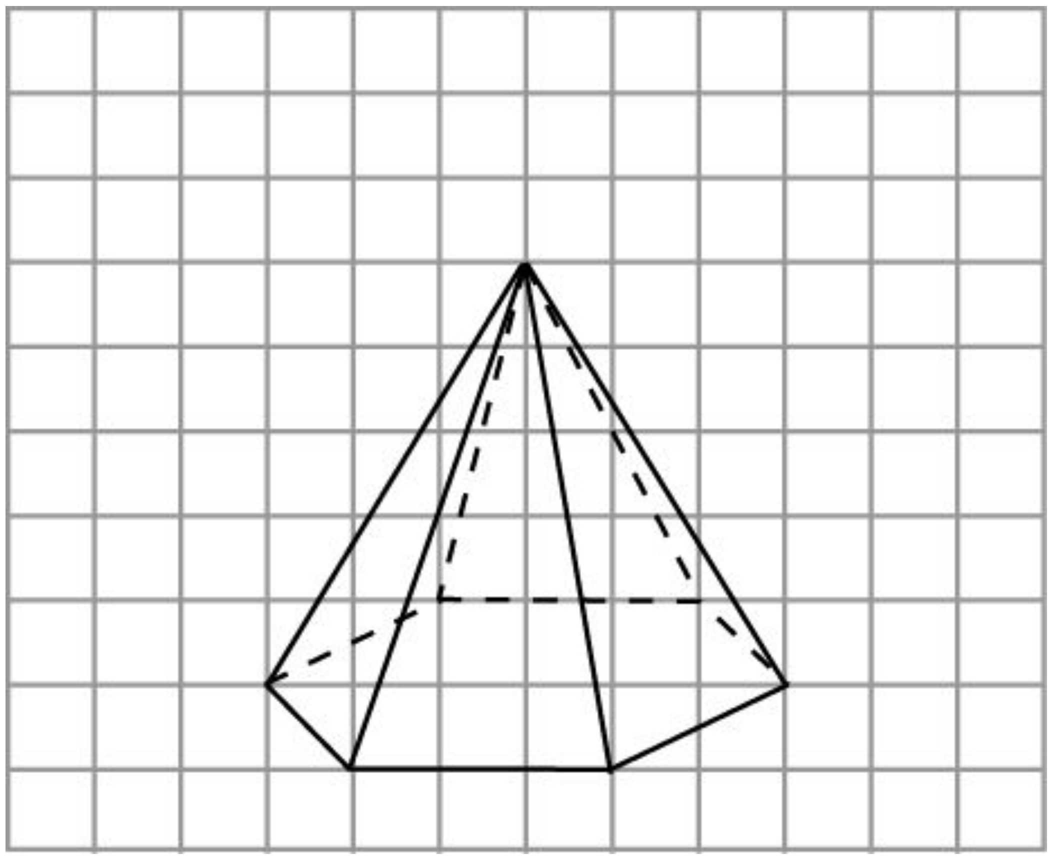
в) 60 граней? Ответ: 59-угольник.

Упражнения

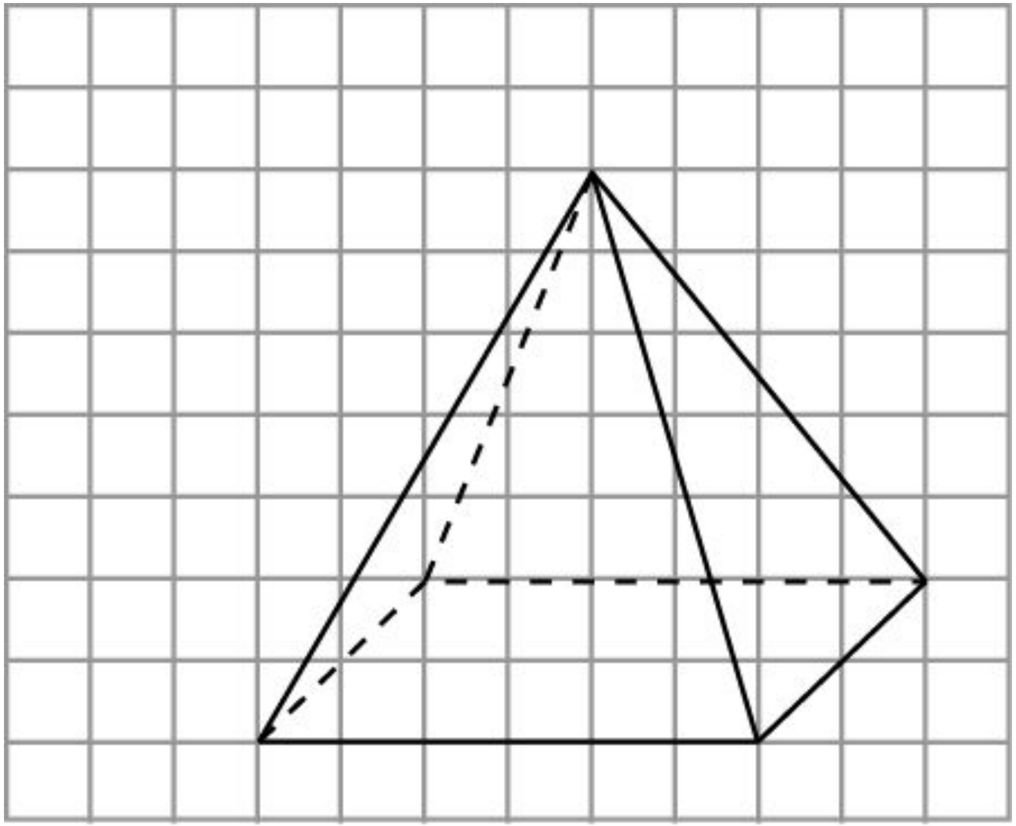
Изобразите правильную четырехугольную пирамиду на клетчатой бумаге, аналогично данной на рисунке.



Изобразите правильную шестиугольную пирамиду на клетчатой бумаге, аналогично данной на рисунке.

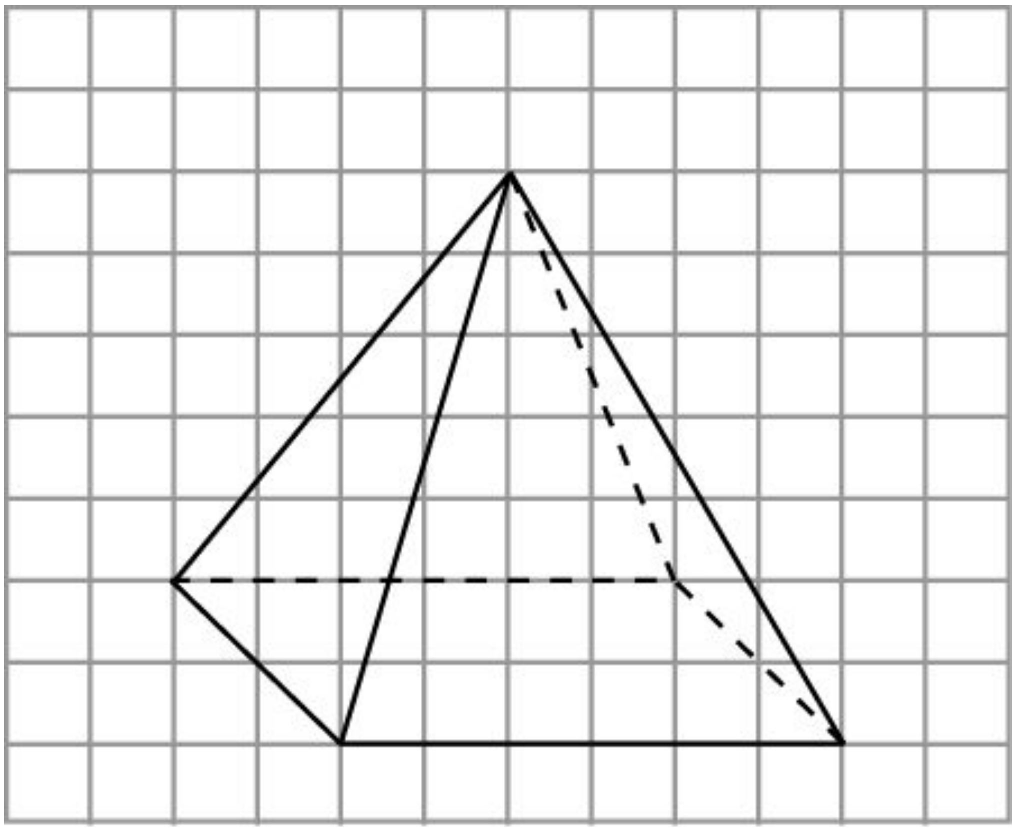


На рисунке изображены три ребра четырехугольной пирамиды. Изобразите всю пирамиду.



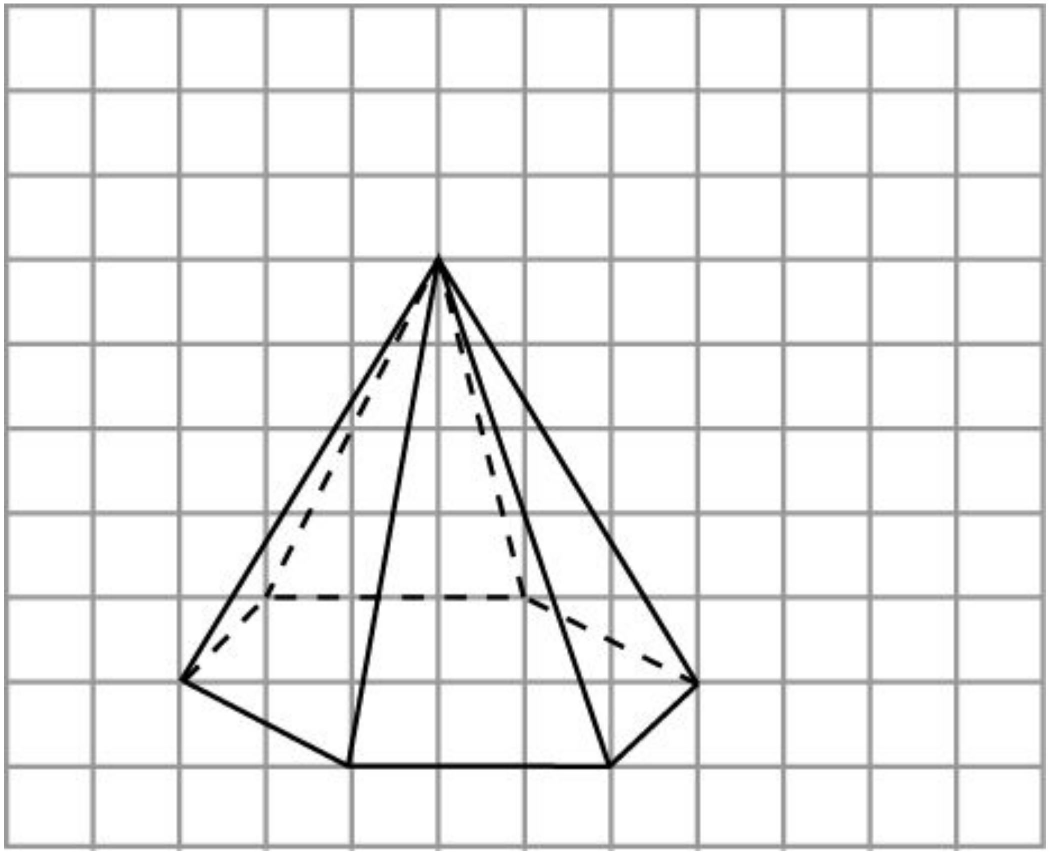
Ответ.

На рисунке изображены три ребра четырехугольной пирамиды. Изобразите всю пирамиду.



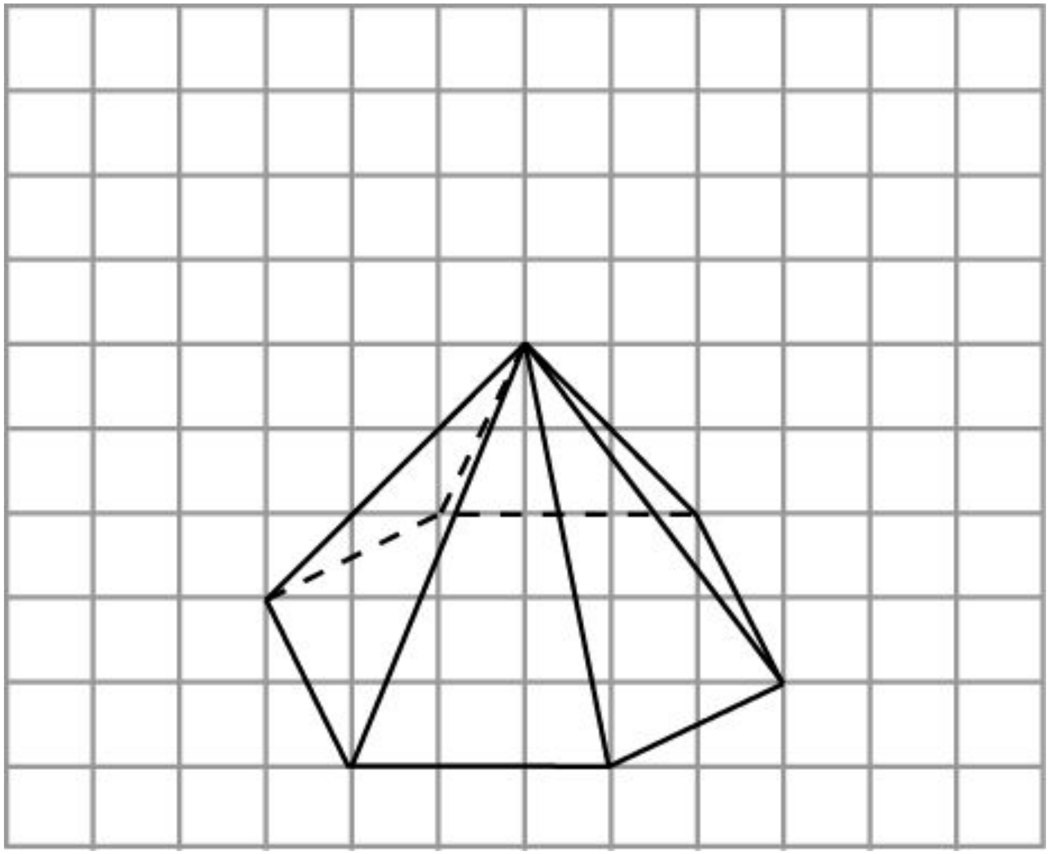
Ответ.

На рисунке изображены четыре ребра шестиугольной пирамиды. Изобразите всю пирамиду.



Ответ.

На рисунке изображены четыре ребра шестиугольной пирамиды. Изобразите всю пирамиду.



Ответ.

У многогранника шесть вершин и в каждой из них сходится четыре ребра. Сколько у него рёбер?

Ответ: $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$

У многогранника двенадцать граней и все они пятиугольные. Сколько у него рёбер?

Ответ: $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30.$

Существуют ли многогранник, у которого:

а) 5 ребер? Нет.

б) 6 ребер? Да, тетраэдр.

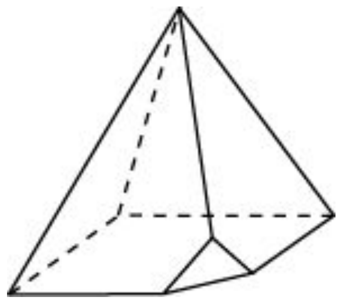
в) 7 ребер? Нет.

г) 8 ребер? Да, четырехугольная пирамида.

д) 9 ребер? Да, треугольная призма.

е) 10 ребер? Да, пятиугольная пирамида.

ж)* 11 ребер? Да, пример такого многогранника изображен на рисунке.



* Докажите, что у любого многогранника сумма чисел сторон всех его граней является чётным числом. Выведите из этого, что у любого многогранника число граней с нечётным числом сторон чётно.

Решение. У любого многогранника каждое ребро является стороной двух граней. Следовательно, сумма чисел сторон всех его граней является чётным числом.

Предположим, что число граней с нечётным числом сторон нечётно. Тогда сумма чисел сторон этих граней будет нечётна. Так как сумма чисел сторон граней ч чётным числом сторон чётна, то общая сумма чисел сторон всех его граней была бы нечётным числом. Что противоречит доказанному.

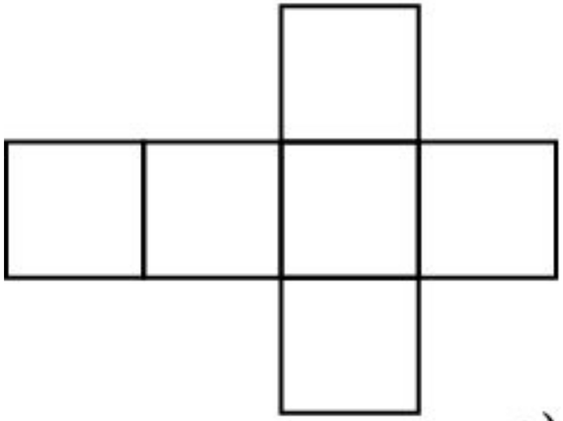
* Докажите, что у любого многогранника сумма чисел рёбер, выходящих из всех его вершин, является чётным числом. Выведите из этого, что число вершин, в которых сходится нечётное число ребер, чётно.

Решение. У любого многогранника каждое ребро имеет две вершины. Следовательно, сумма чисел рёбер, выходящих из всех его вершин является чётным числом.

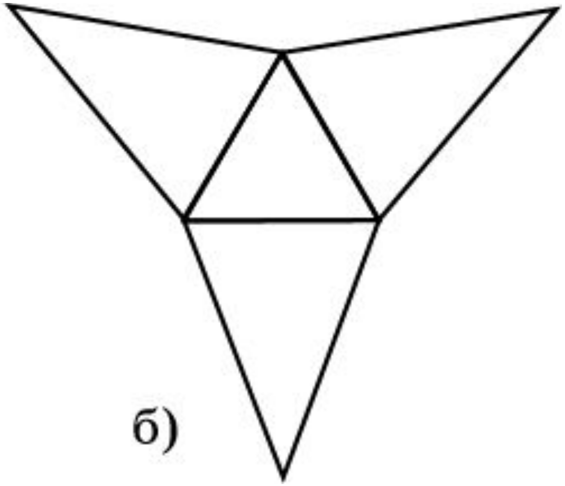
Предположим, что число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, нечётно. Тогда сумма чисел рёбер, выходящих из этих вершин, будет нечётна. Так как сумма чисел рёбер, выходящих из вершин, в которых сходится чётное число рёбер, чётна, то общая сумма чисел рёбер, выходящих из всех вершин, была бы нечётным числом. Что противоречит доказанному.

Развёртки многогранников

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется развerткой многогранника. Например, на рисунке изображены развертки куба и треугольной пирамиды.



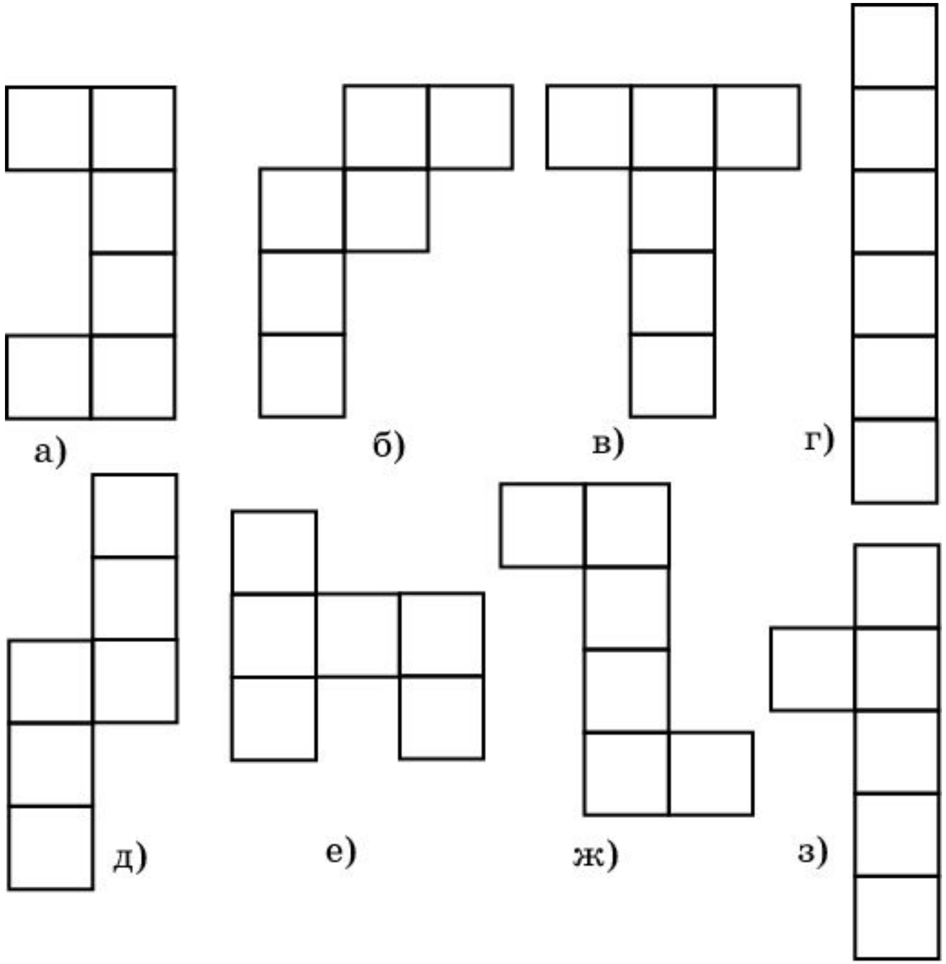
а)



б)

Упражнение 1

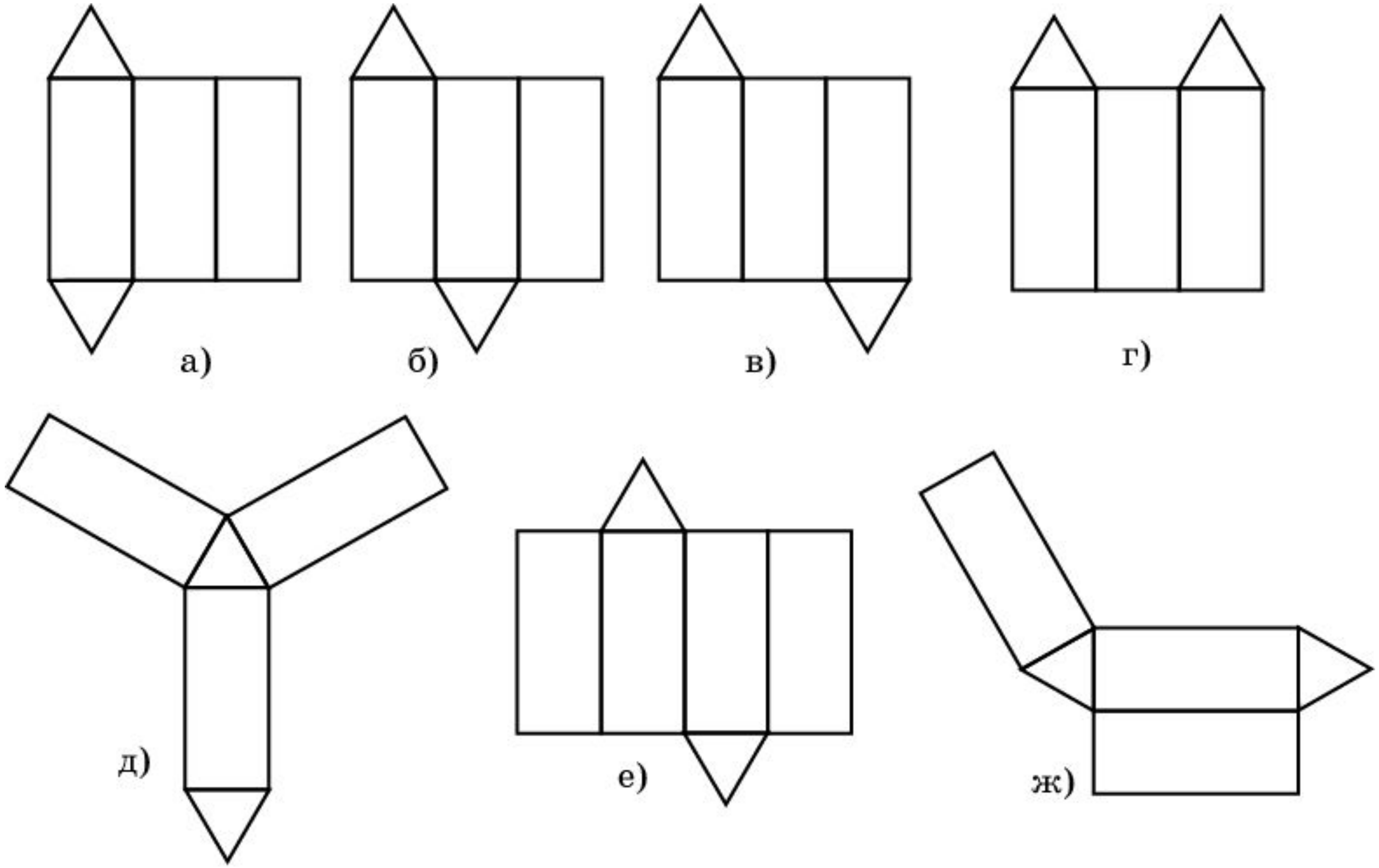
Укажите развертки куба.



Ответ. в), д), ж).

Упражнение 2

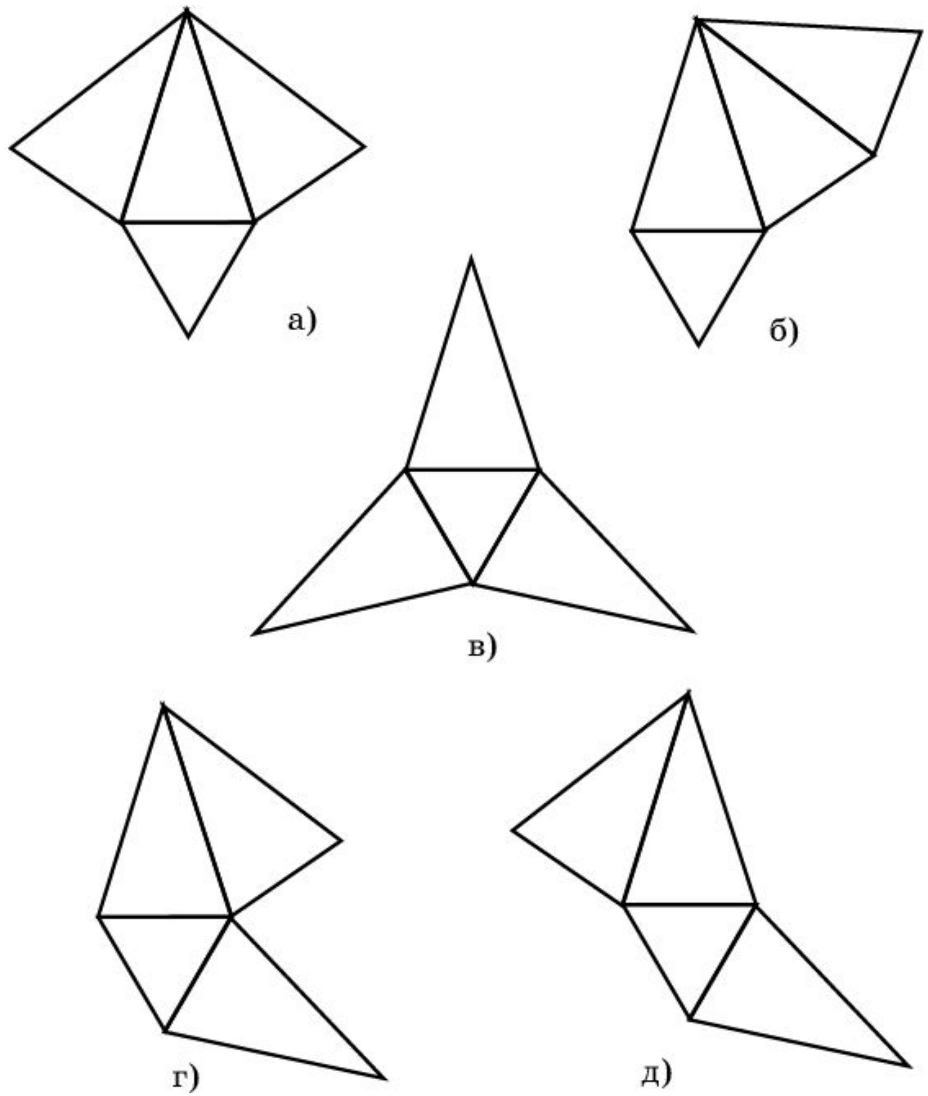
Укажите развертки треугольной призмы.



Ответ. а), б), в), д), ж).

Упражнение 3

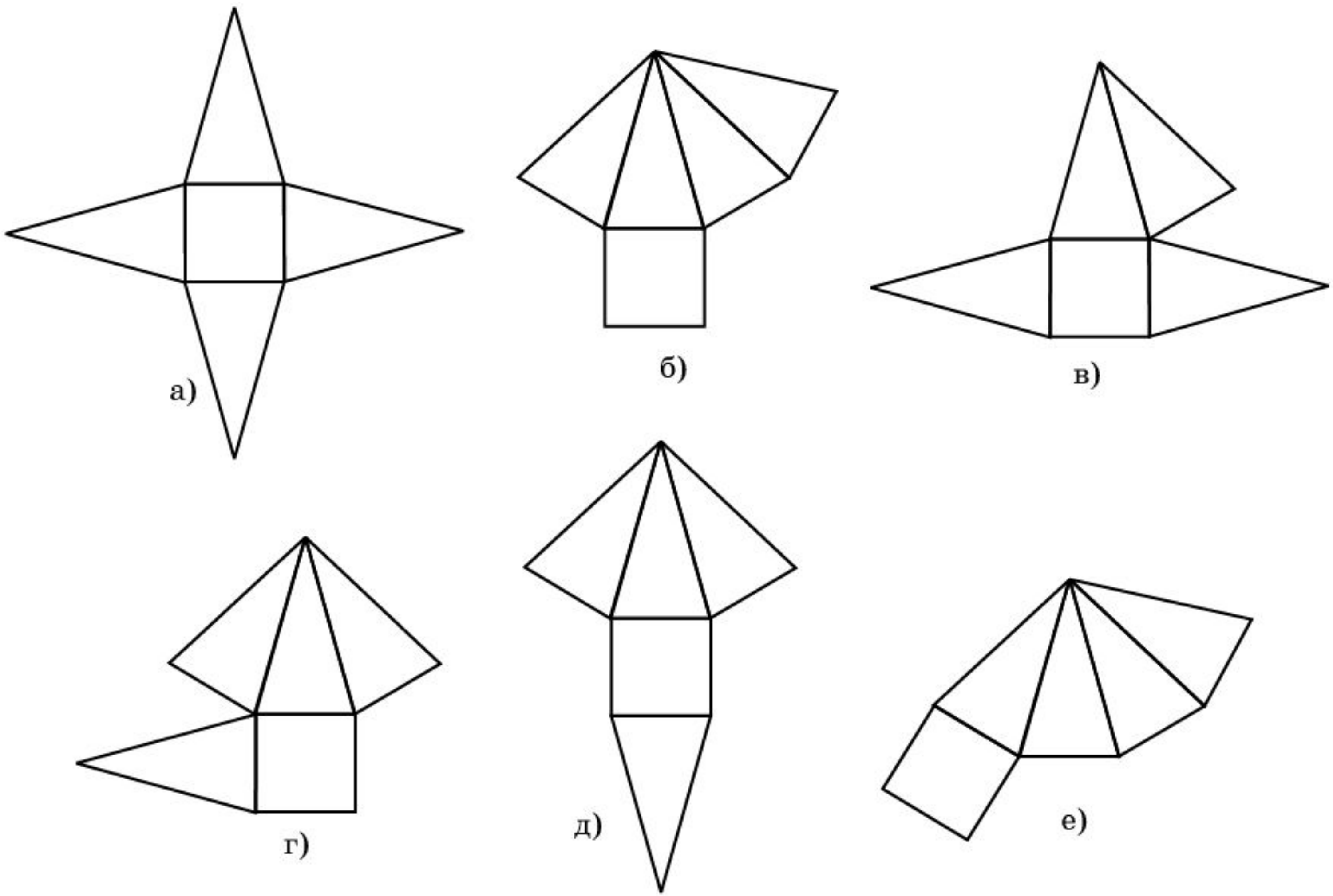
Укажите развертки треугольной пирамиды.



Ответ. а), б), в), д).

Упражнение 4

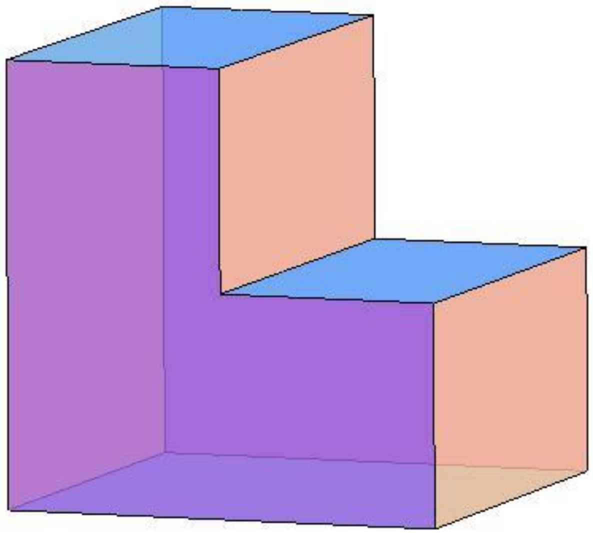
Укажите развертки четырехугольной пирамиды.

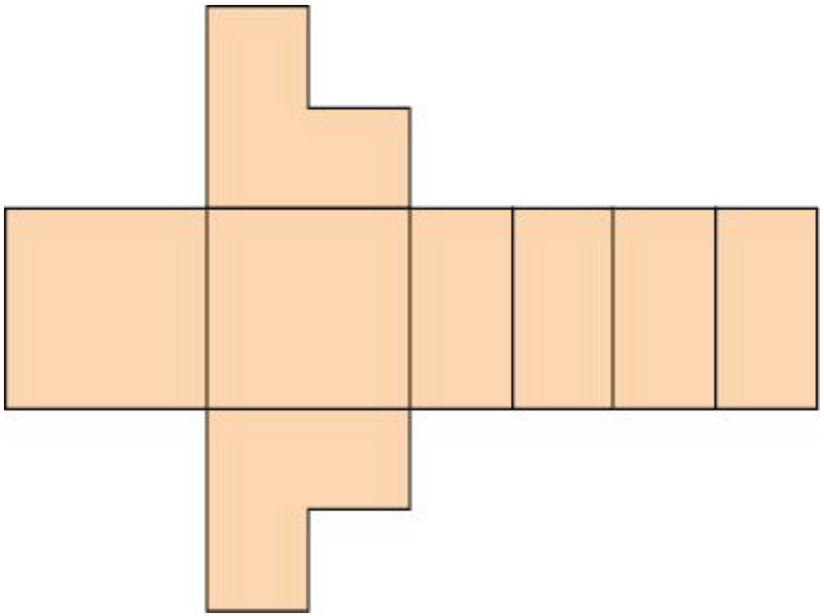


Ответ. а), б), д), е).

Упражнение 5

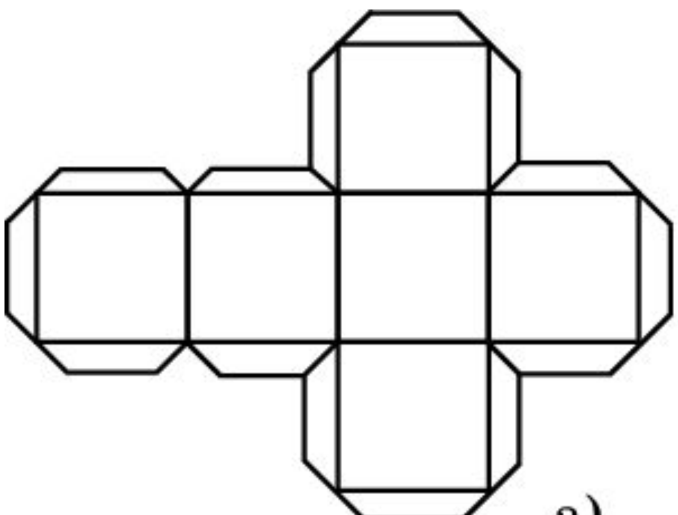
Нарисуйте какую-нибудь развертку многогранника, изображенного на рисунке.



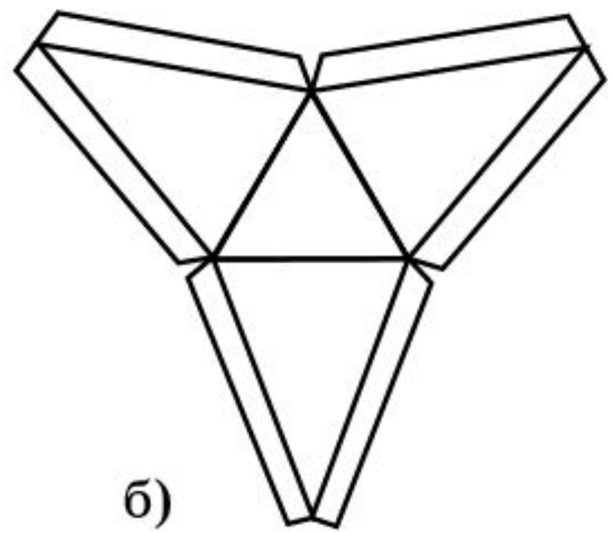


Ответ.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка.



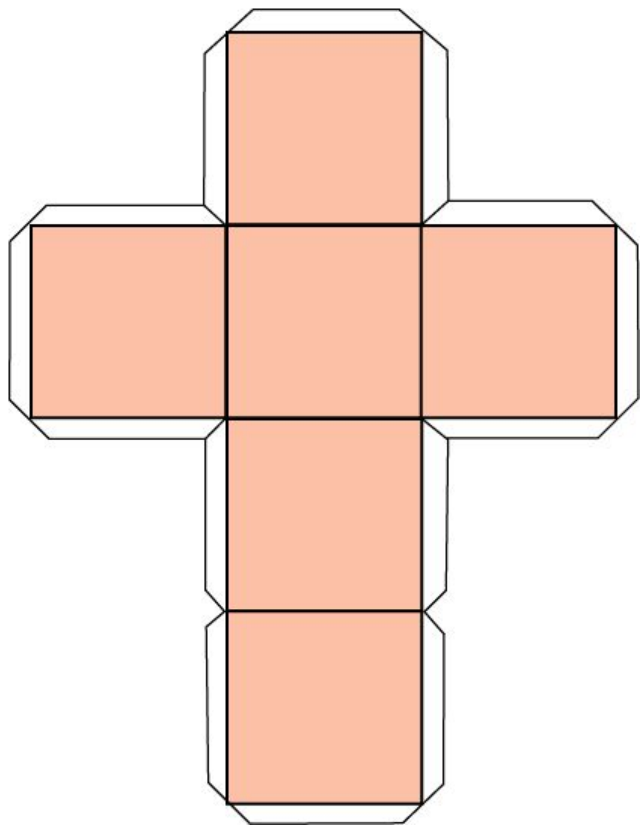
а)



б)

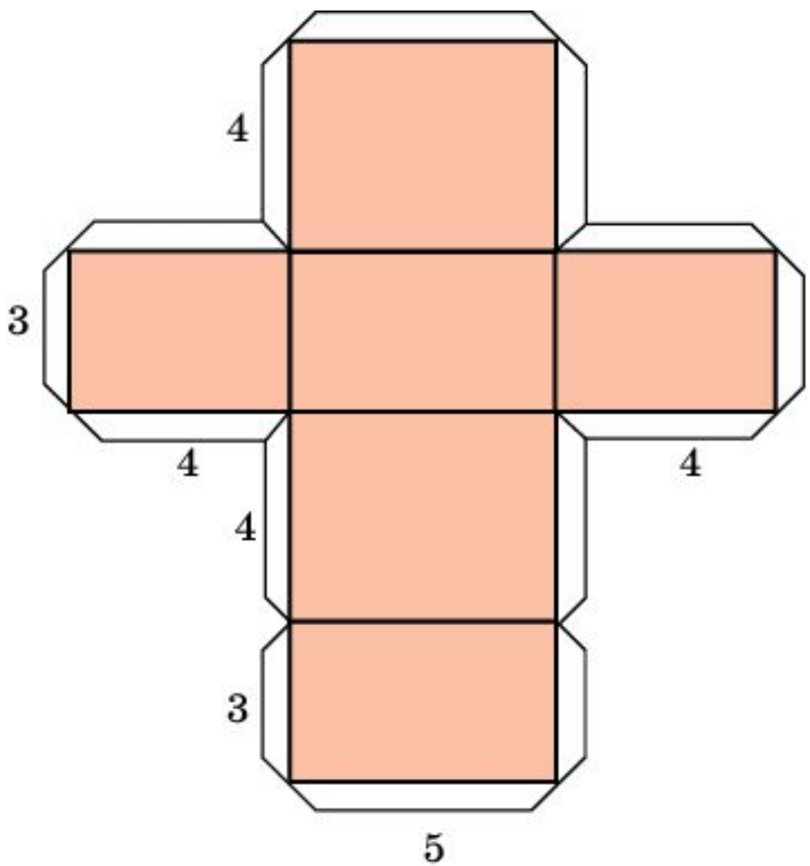
КУБ

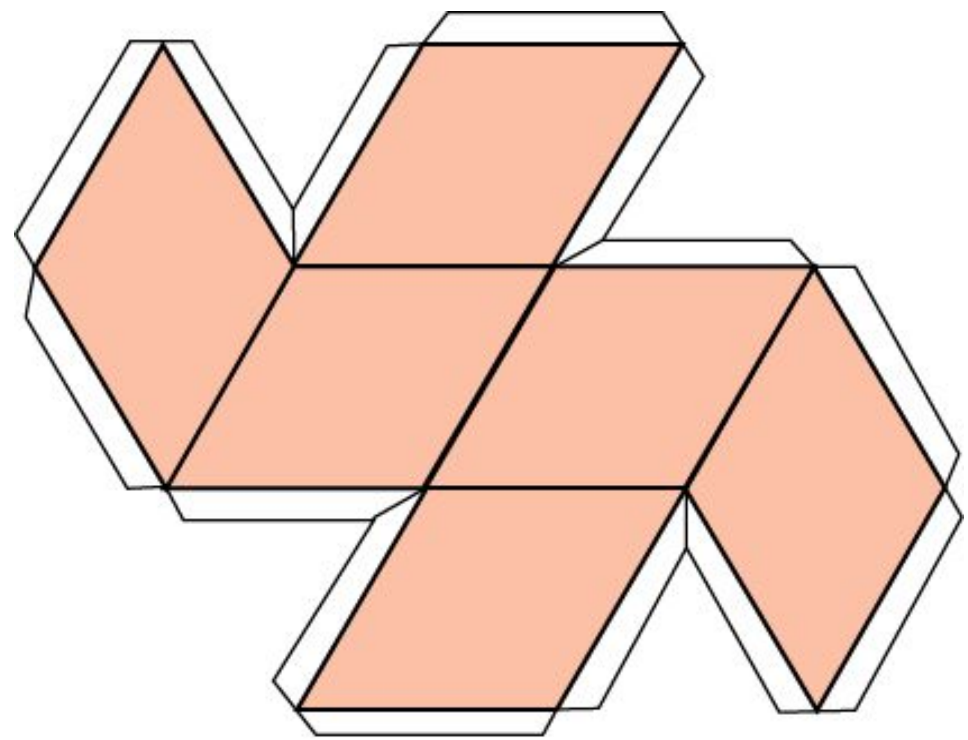
Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке показаны развертка куба с клапанами.



ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

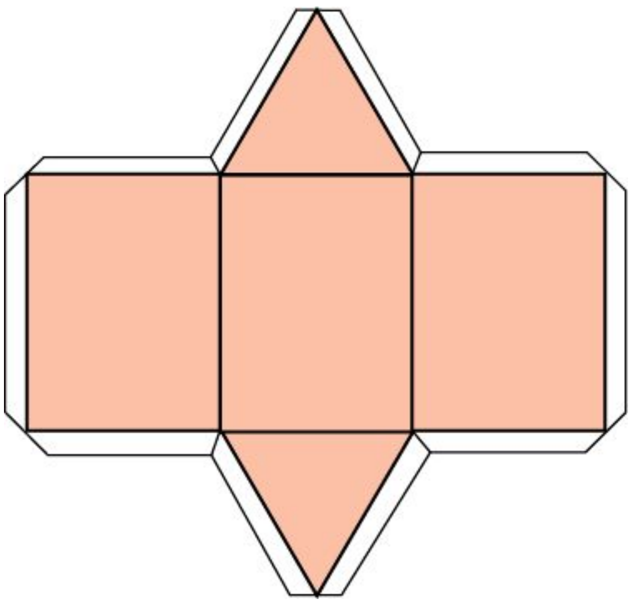
На рисунке показаны развертки с клапанами прямоугольного параллелепипеда ребрами 3, 4, 5 и наклонного параллелепипеда, гранями которого являются ромбы с острыми углами 60°.

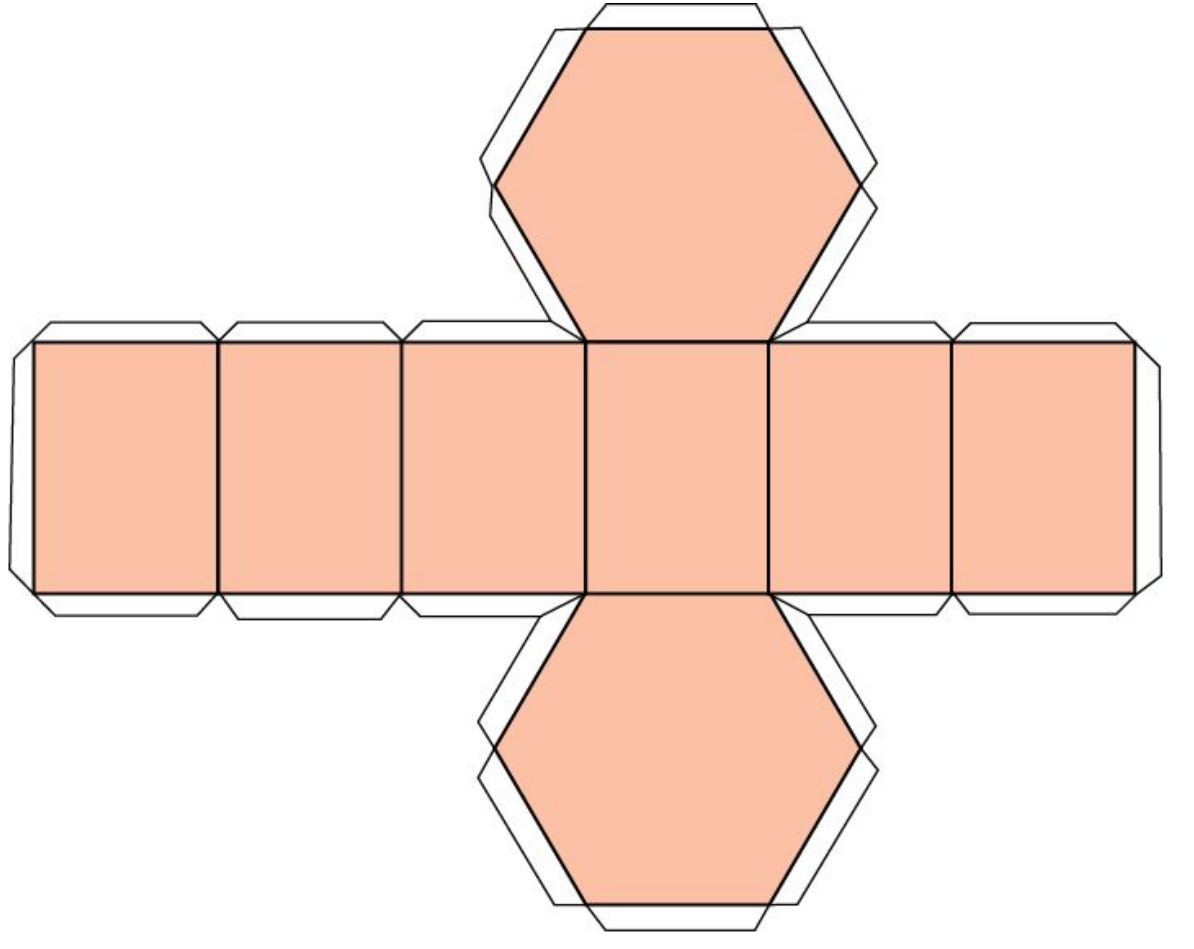




ПРИЗМА

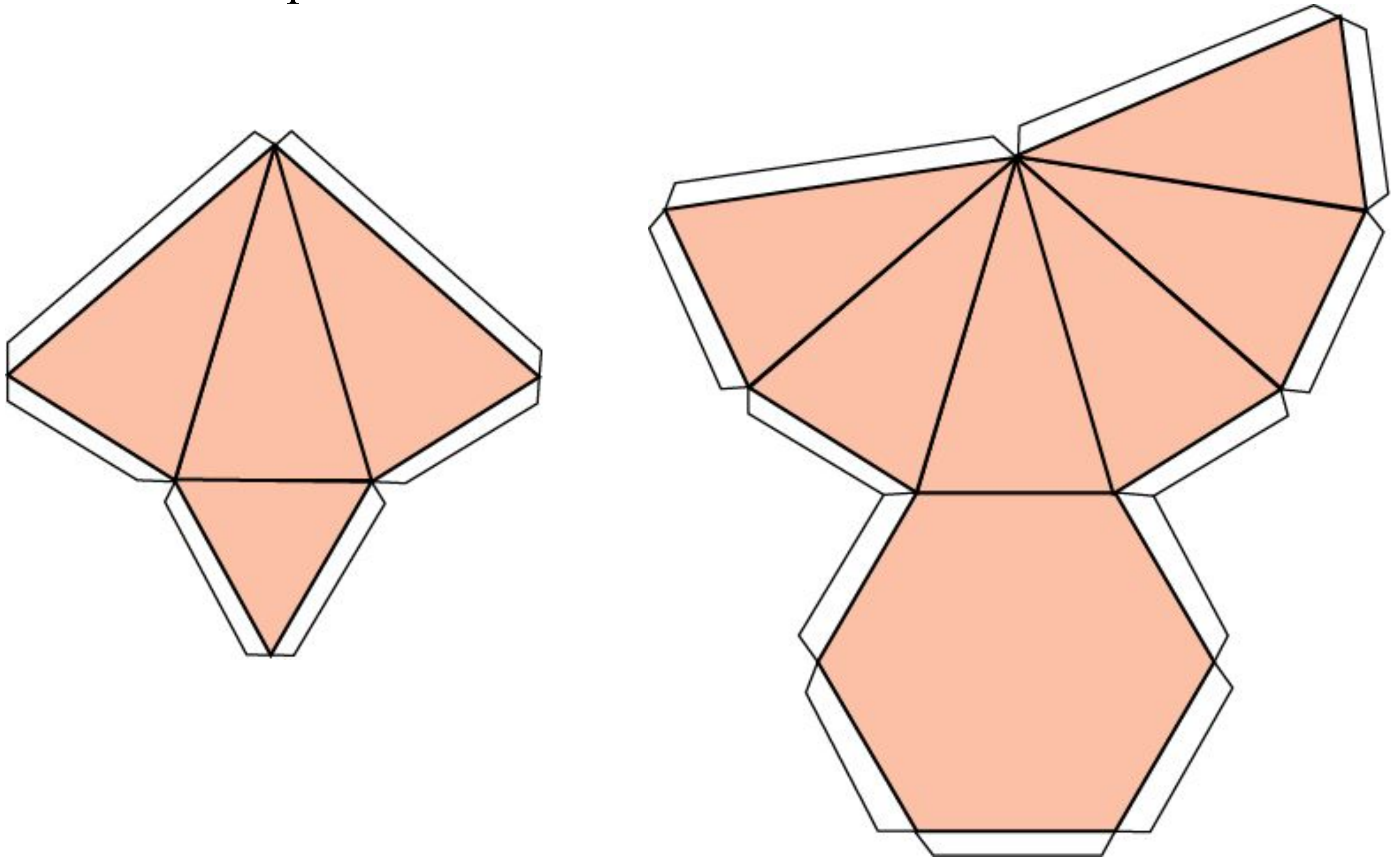
На рисунке показаны развертки треугольной и шестиугольной правильных призм.





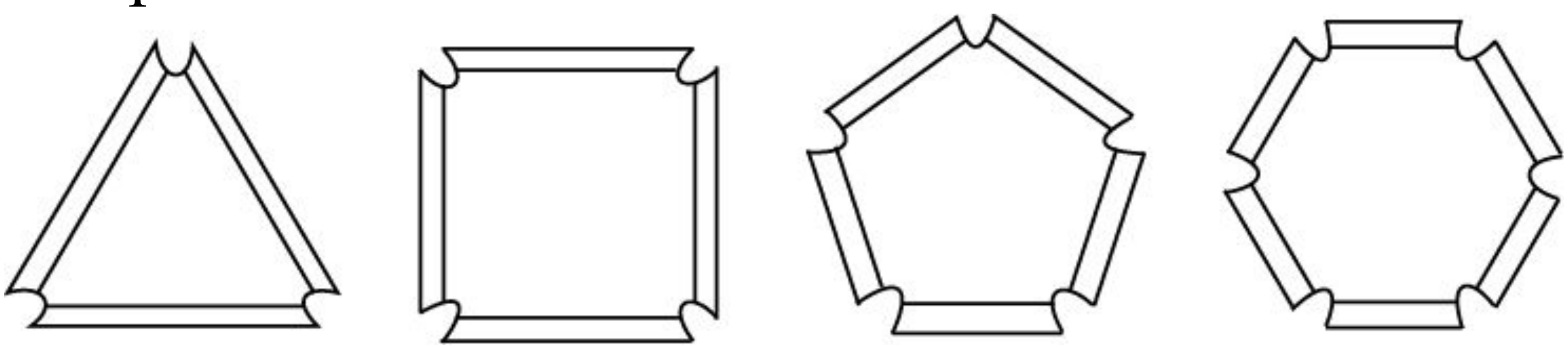
ПИРАМИДА

На рисунке показаны развертки треугольной и шестиугольной правильных пирамид.



Конструктор

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек - основной крепежной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников.



Моделирование многогранников в программе GeoGebra

Программа GeoGebra это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта http://geogebra.org.

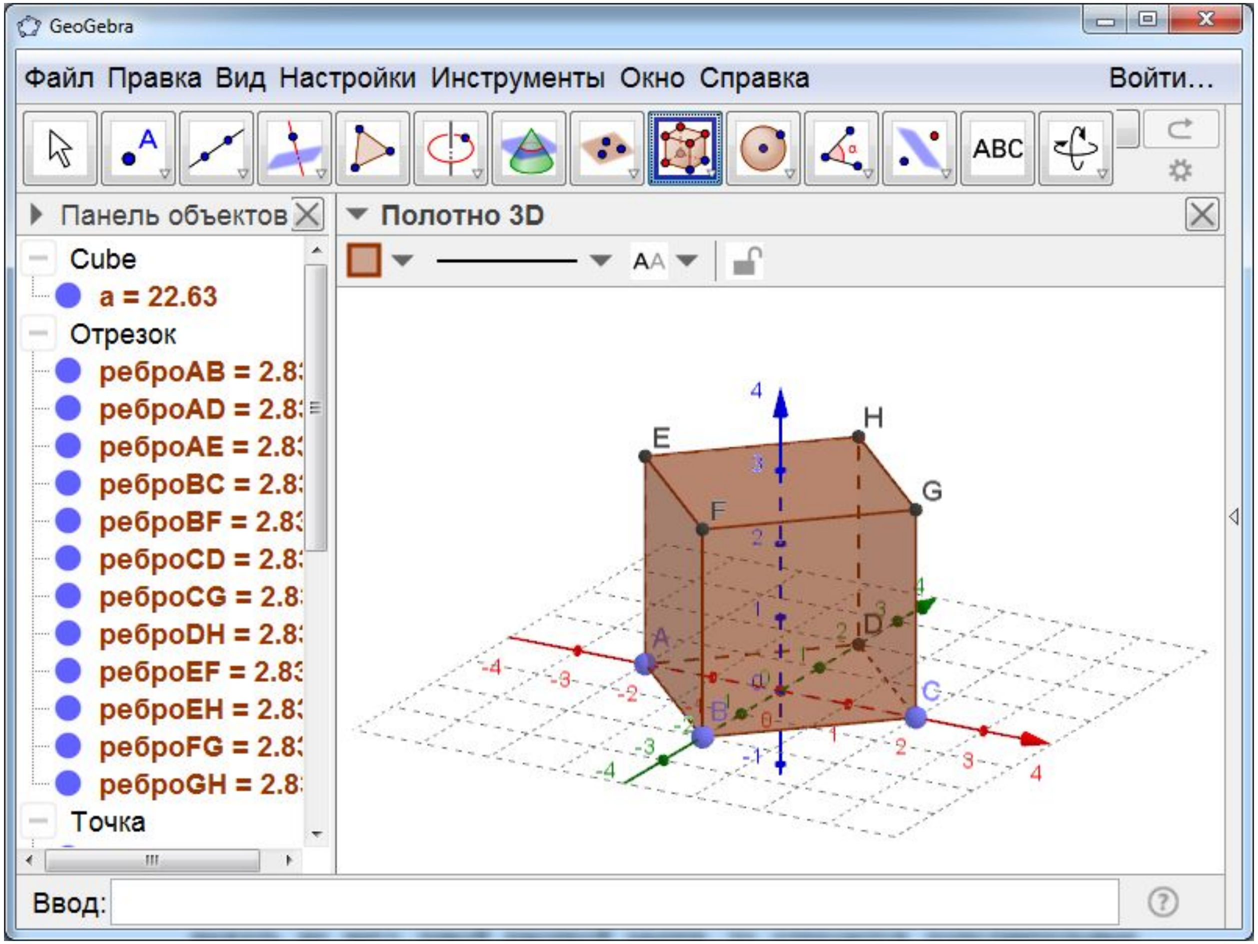
Она позволяет получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для моделирования многогранников.

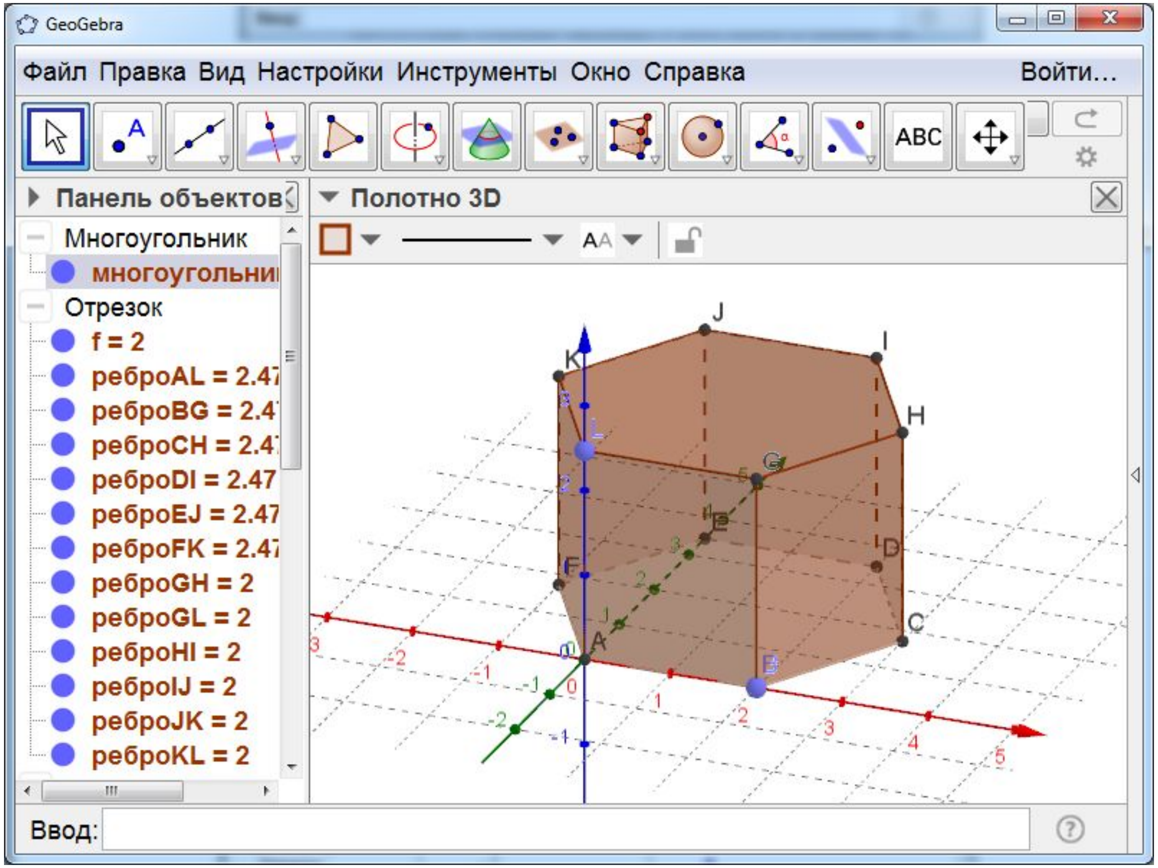
Полученную модели можно поворачивать, смотреть на них с разных сторон.

Инструмент «Куб» позволяет получать модель куба. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины куба). На рисунке показан пример такого куба.

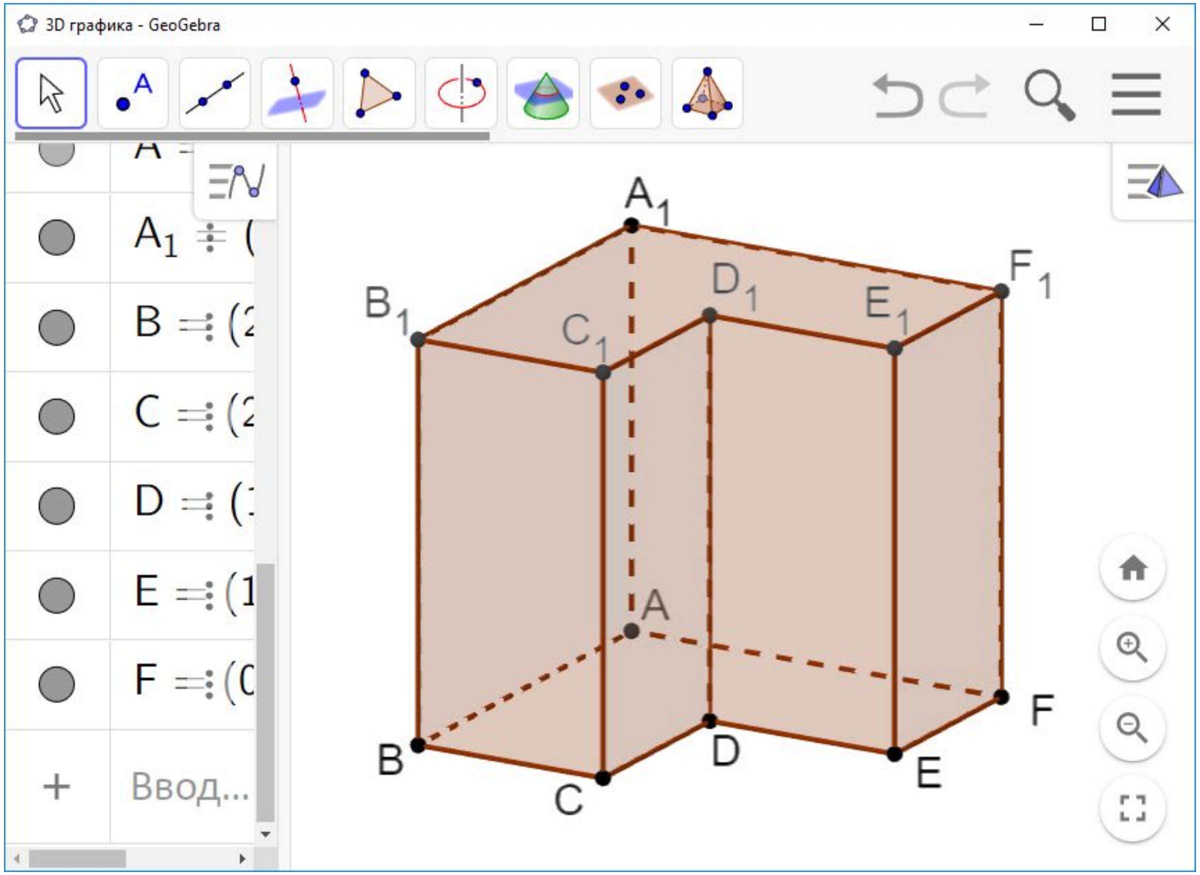


Призма

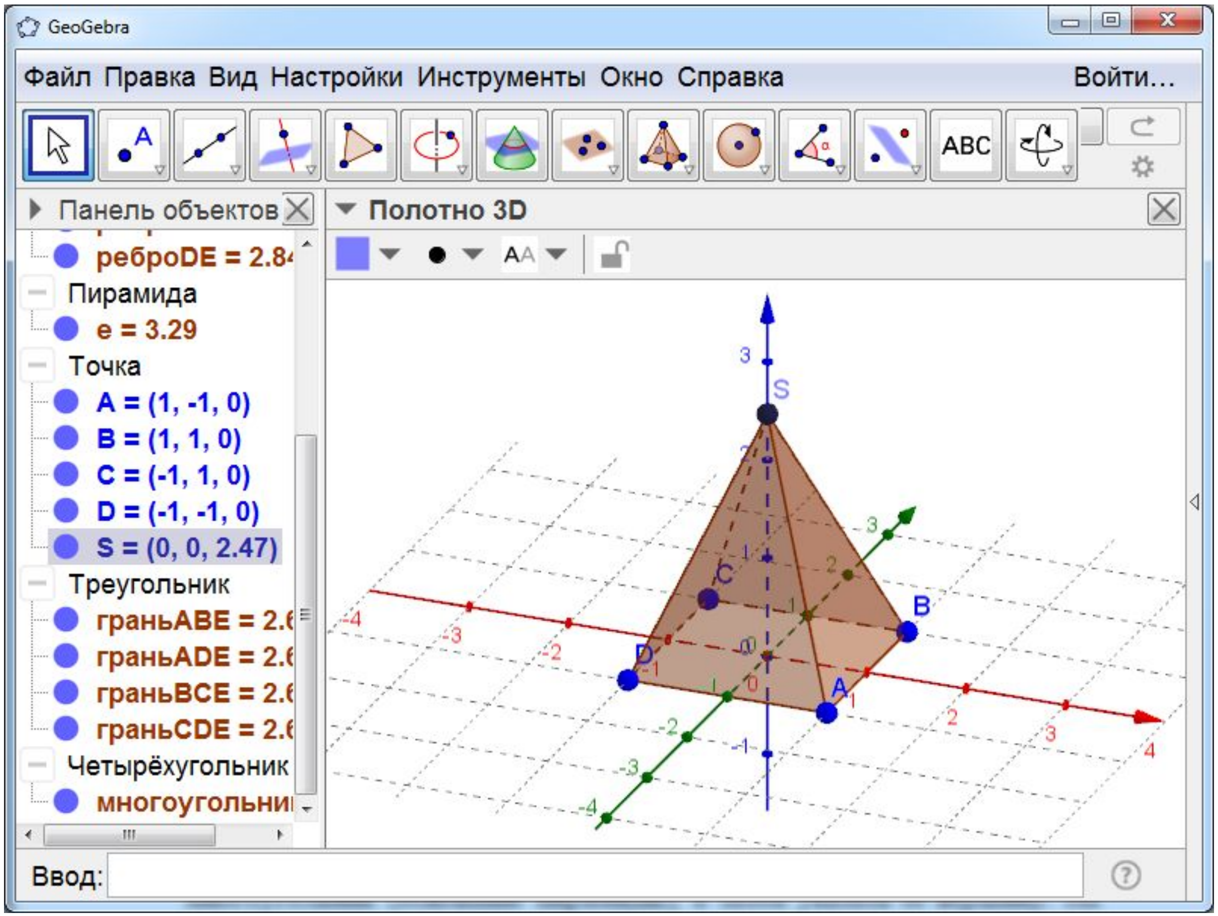
Инструмент «Призма» позволяет построить модель призмы. На рисунке показана правильная шестиугольная призма. Для её построения сначала с помощью инструмента «Правильный многоугольник нужно построить правильный шестиугольник (основание призмы). Далее, выбрав инструмент «Призма», нажать левой кнопкой мыши сначала на построенный правильный шестиугольник, а затем на какую-нибудь точку оси аппликат. Получим правильную шестиугольную призму.



Аналогичным образом можно получить призму, в основании которой невыпуклый многоугольник.



Инструмент «Пирамида» позволяет строить модель пирамиды. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание пирамиды), а затем указать её вершину. На рисунке показана четырёхугольная пирамида.



Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. Волочаевская, 40Г, строение 4, 3 этаж
Тел.: 8 (495) 181-68-88
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
E-mail для бюджетных закупок: tender@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**: pocketschool.ru
E-mail для оптовых закупок: zakaz@ars-edu.ru