

Свойства функции



Алгоритм исследования функции

- 1. Область определения
- 2. Множество значений
- 3. Чётность , нечётность
- 4. Периодичность
- 5. Непрерывность
- 6. Промежутки возрастания и убывания
- 7. Ограниченность функции
- 8. Нули функции
- 9. Точки экстремума (наибольшее и наименьшее значение функции)
- 10. Выпуклость графика

1. Область определения

- Область определения функции $y = f(x)$ - это множество всех действительных значений переменной x , при которых функция имеет смысл. Обозначение: $D(x)$.
- Область определения функции $y = \sqrt{3-2x}$
 $D(x) = (-\infty; \frac{3}{2}]$, т. к. подкоренное выражение всегда больше или равно нулю.

2. Множество значений

Множество значений функции $y = f(x)$ - это множество всех действительных значений переменной y , которые функция может принимать при данном x . Обозначение: $E(y)$.

Множество значений функции $y = \sqrt{3-2x}$
 $E(y) = (0; \infty)$, т. к. значение подкоренного выражения всегда больше или равно нулю.

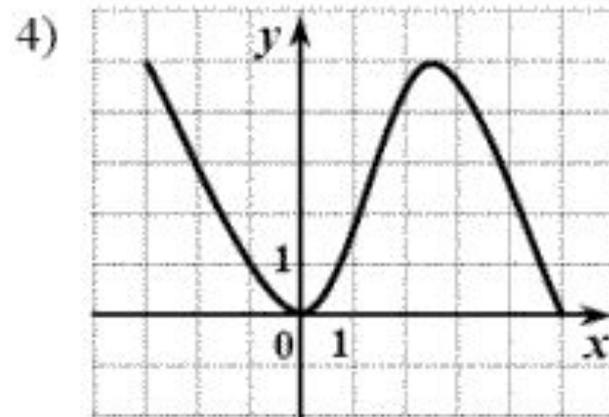
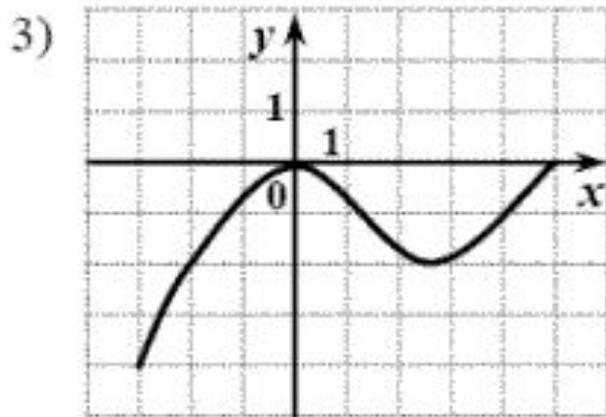
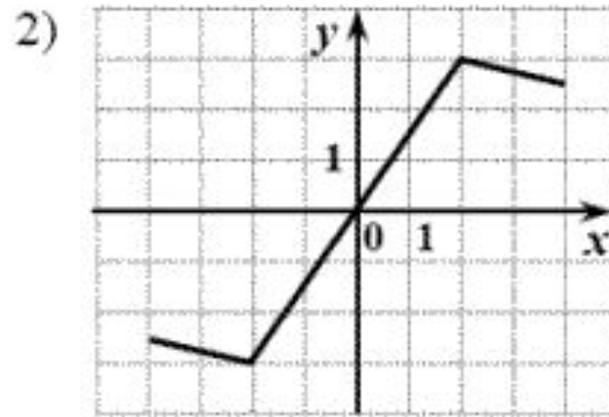
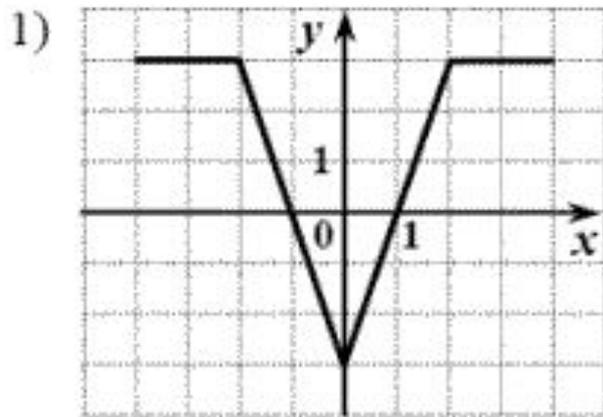
3. Чётность и нечётность функции

- Функцию $y = f(x)$ называют **чётной**, если для любого значения x из множества $D(x)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$
- Функцию $y = f(x)$ называют **нечётной**, если для любого значения x из множества $D(x)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$
- Функция $y = f(x)$ не является **ни чётной, ни нечётной**, если хотя бы в одной точке из множества $D(x)$ выполняются неравенства $f(-x) \neq f(x)$ $f(-x) \neq -f(x)$

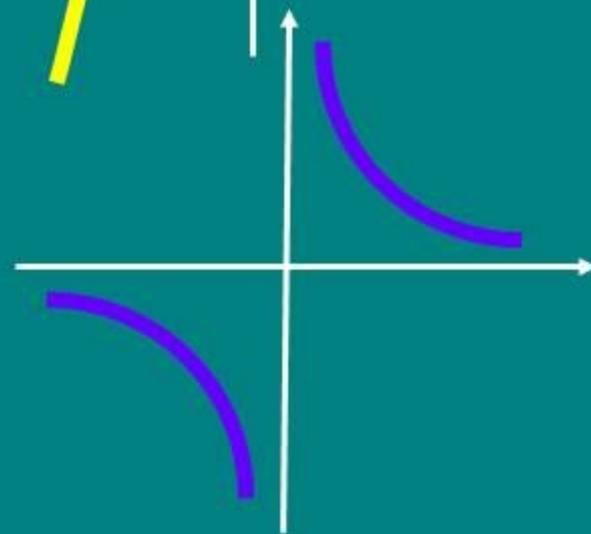
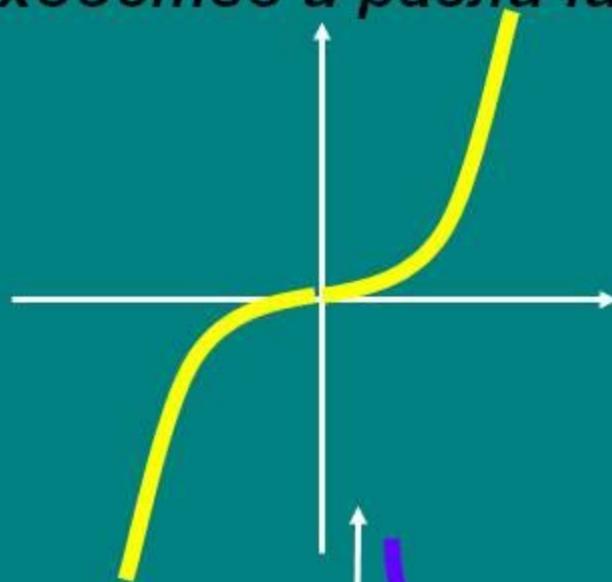
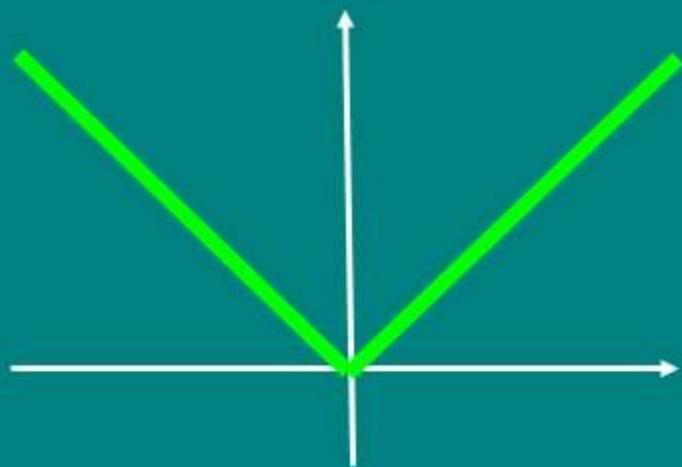
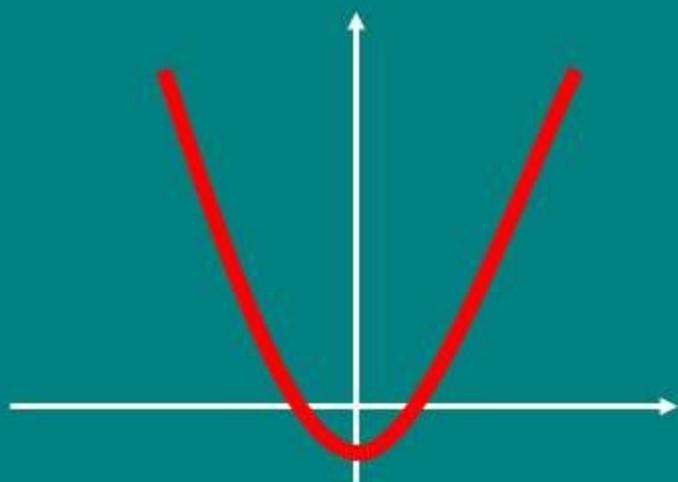
Особенности графиков функций

- Если график функции симметричен относительно оси ординат Oy , то функция **чётная**.
- Если график функции симметричен относительно начала координат, то функция **нечётная**.
- Если график функции не симметричен, то функция не является **ни чётной, ни нечётной**.

Графики чётных и нечётных функций



Графики каких функций здесь изображены?
Сравните чертежи. В чём их сходство и различие?

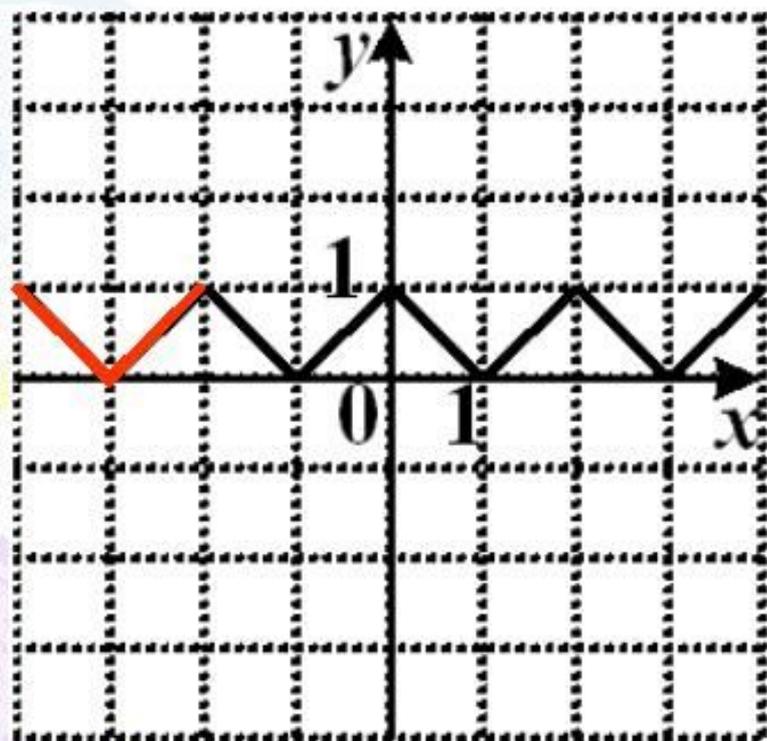


4. Периодичность функции

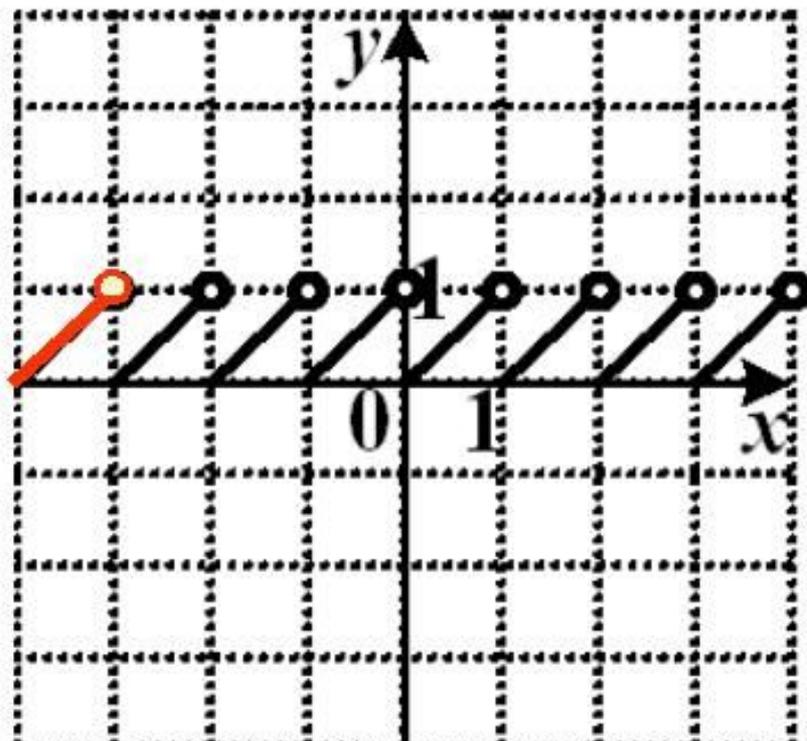
- Периодическая функция — функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу x некоторого фиксированного ненулевого числа (периода функции) на всей области определения.
- Функция называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (период), что на всей области определения функции $D(x)$ выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$.

Периодические функции

График периодической функции состоит из повторяющихся одинаковых кусков, каждый из которых получается из другого параллельным переносом вправо или влево на T единиц.

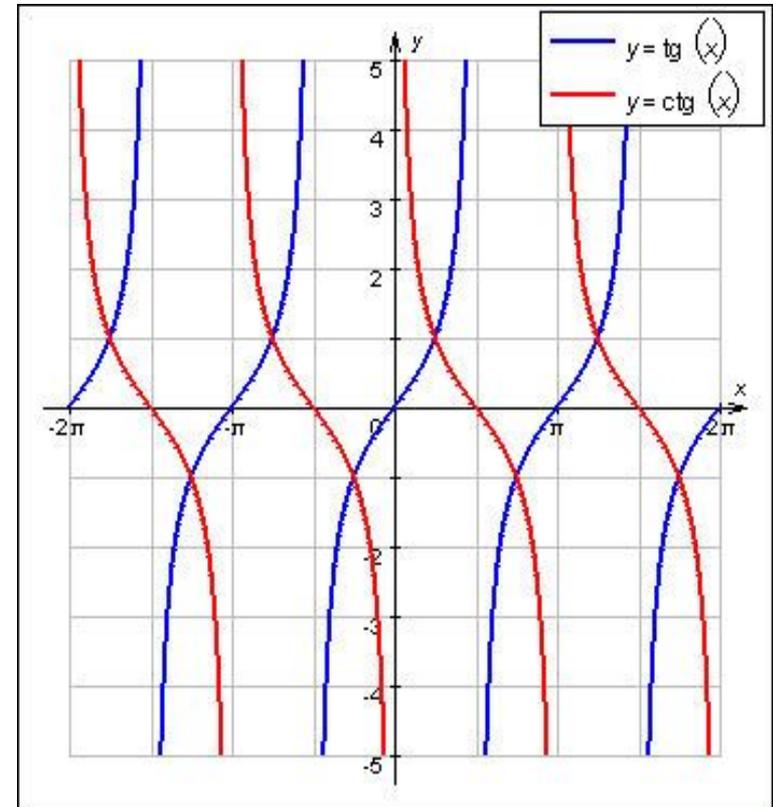
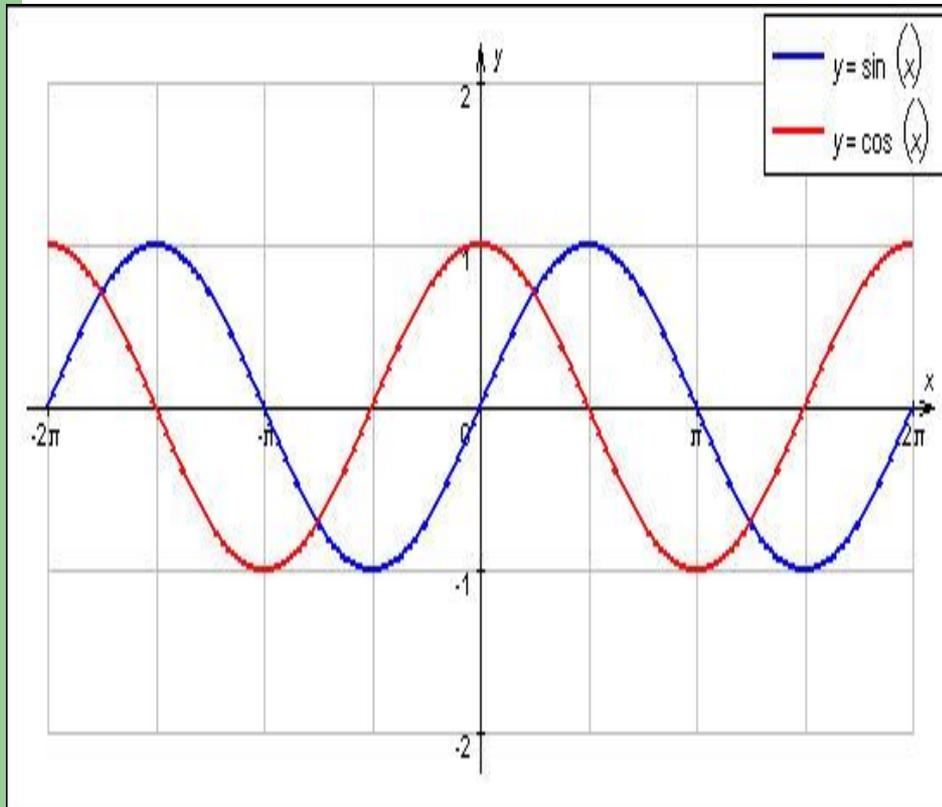


$T=2$



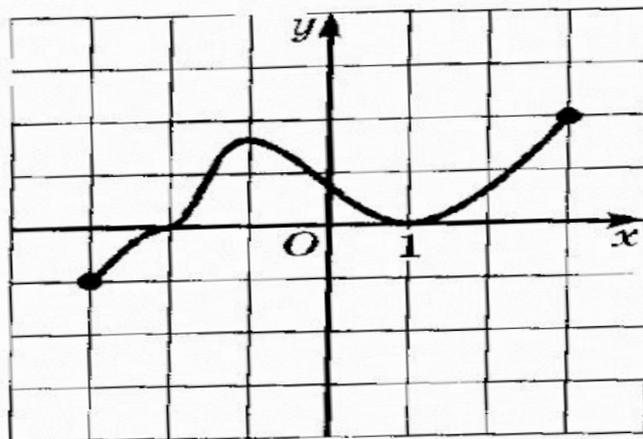
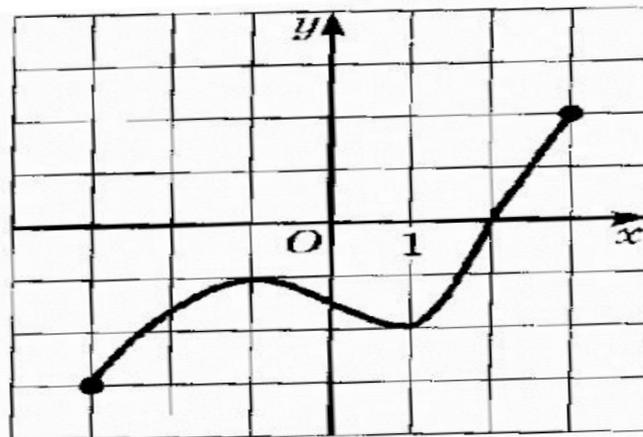
$T=1$

Графики периодических функций

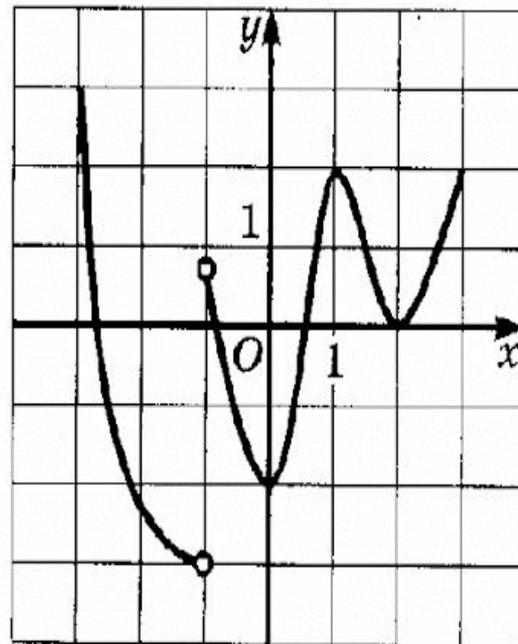
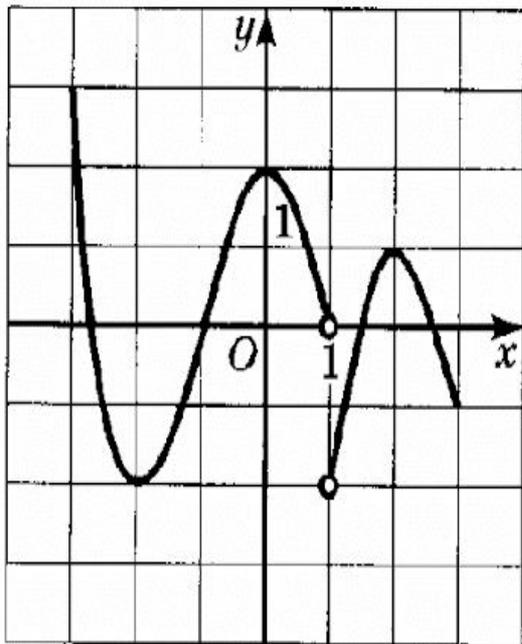


5. Непрерывность функции

Непрерывность функции на отрезке $D(x)$ – означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва



Графики разрывных функций

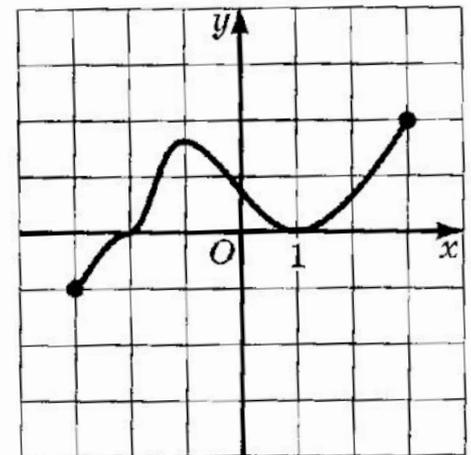
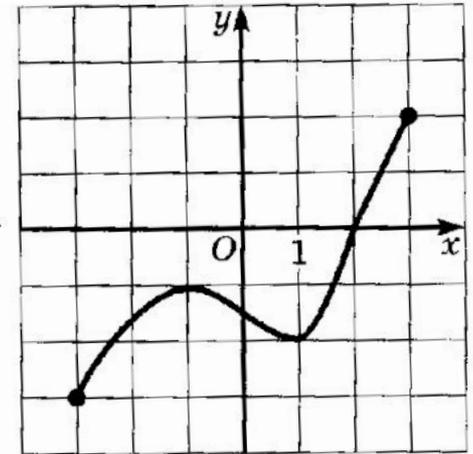


6. Монотонность функции

Термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют исследованием функции на монотонность.

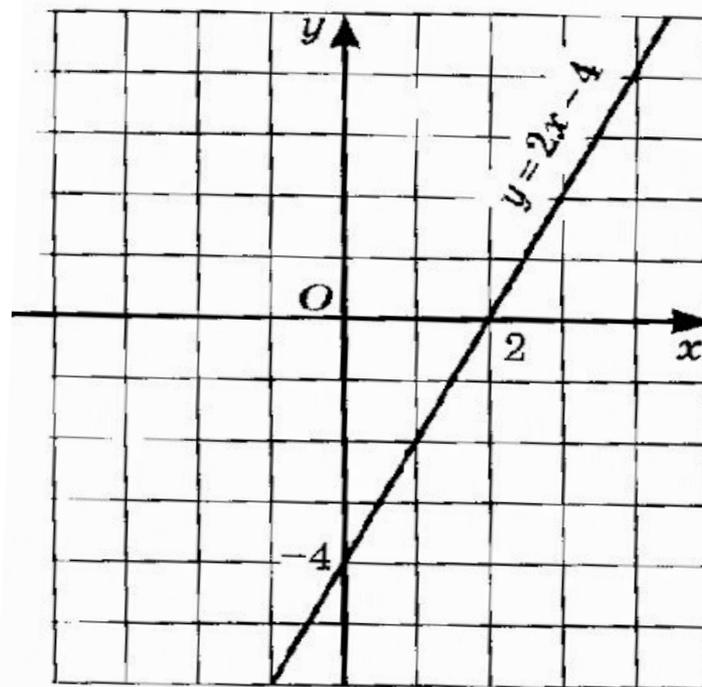
Возрастающая функция

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей** на множестве $D(x)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества $D(x)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



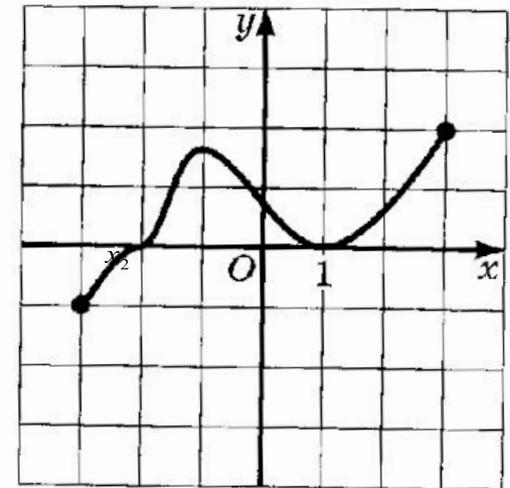
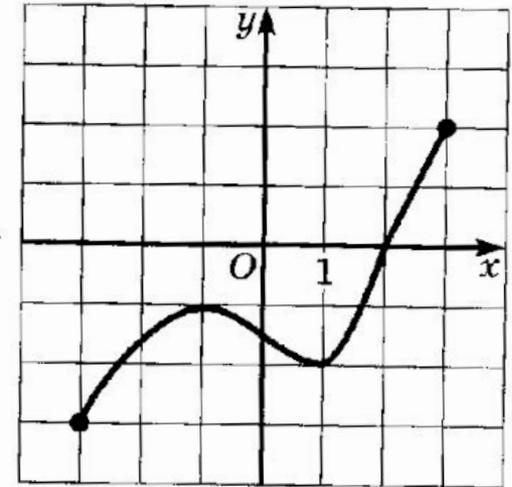
Условие возрастания

Функция возрастает, если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции.



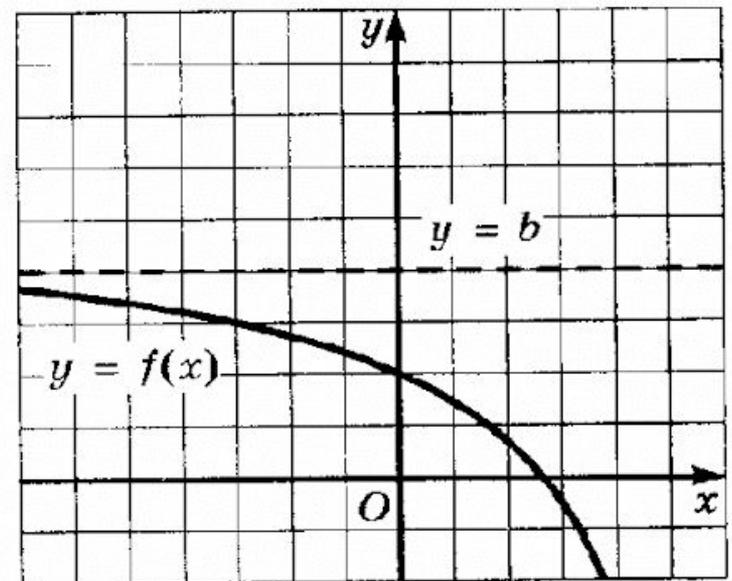
Убывающая функция

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей** на множестве $D(x)$, если для любых точек x_1 и x_2 из множества X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



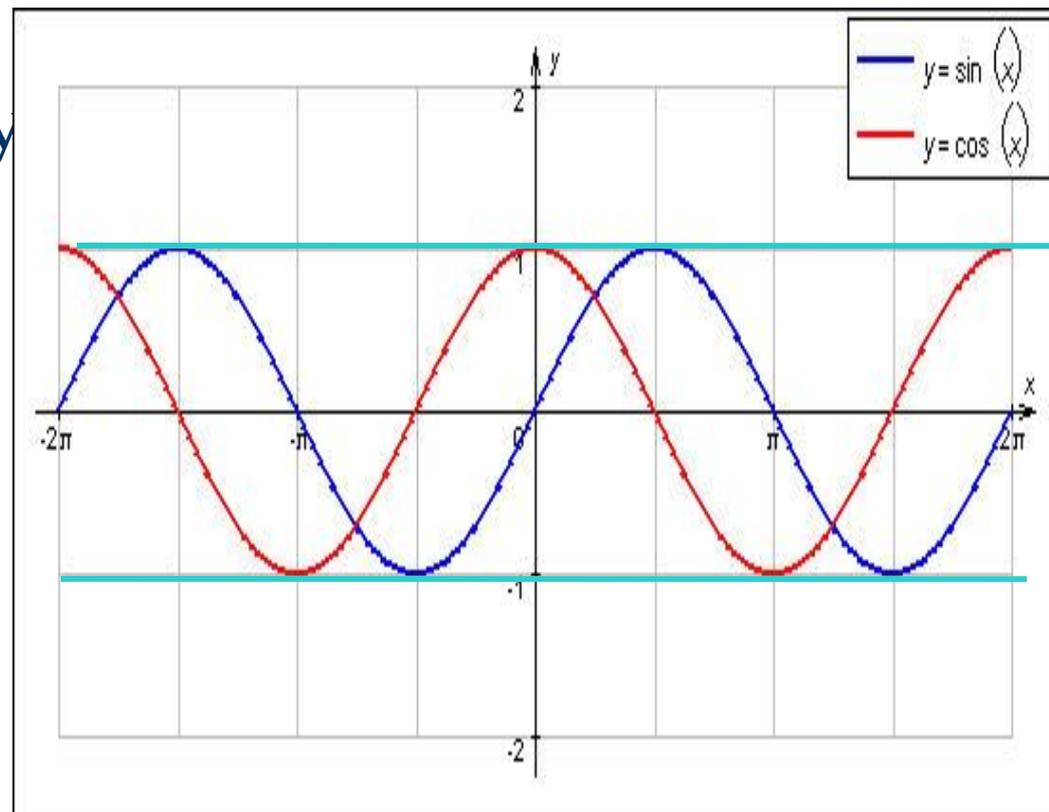
Условие убывания функции

Функция убывает,
если **большему**
значению
аргумента
соответствует
меньшее значение
функции.



7. Ограниченность функции

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то её называют **ограниченной**.



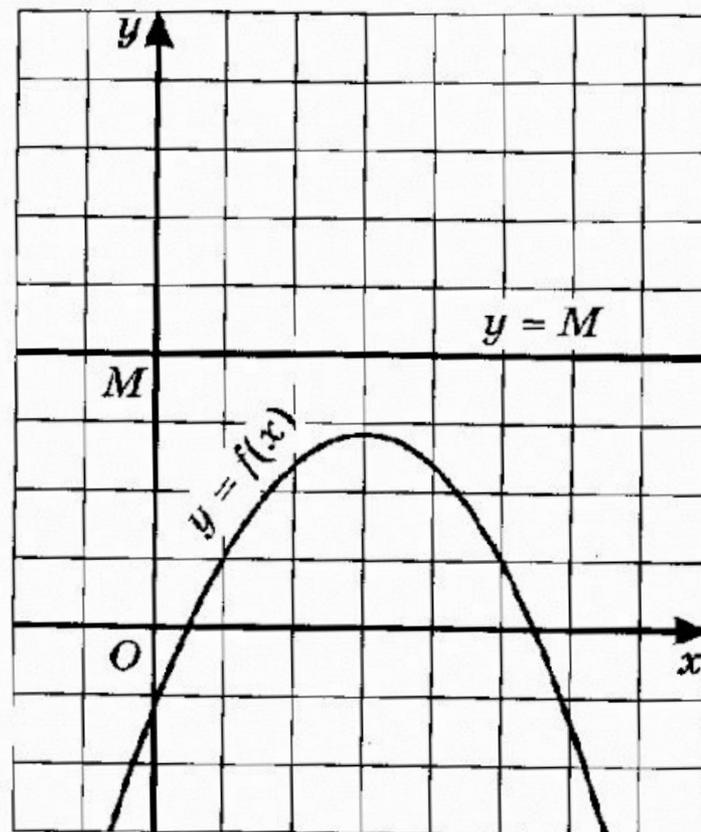
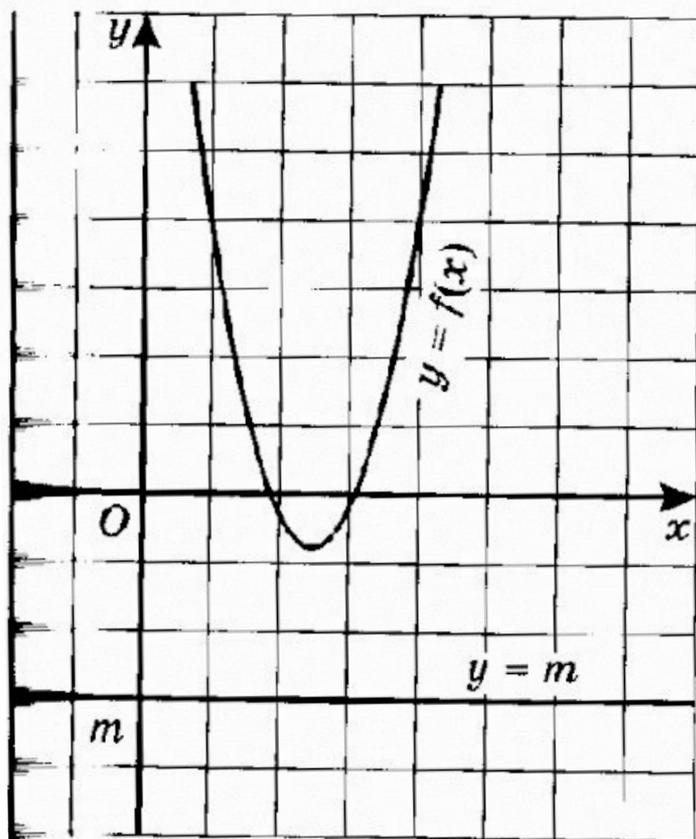
Ограниченность снизу

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве $D(x)$, если все значения этой функции больше некоторого числа m , т.е. существует такое число m , что для любого значения x выполняется неравенство $f(x) > m$

Ограниченность сверху

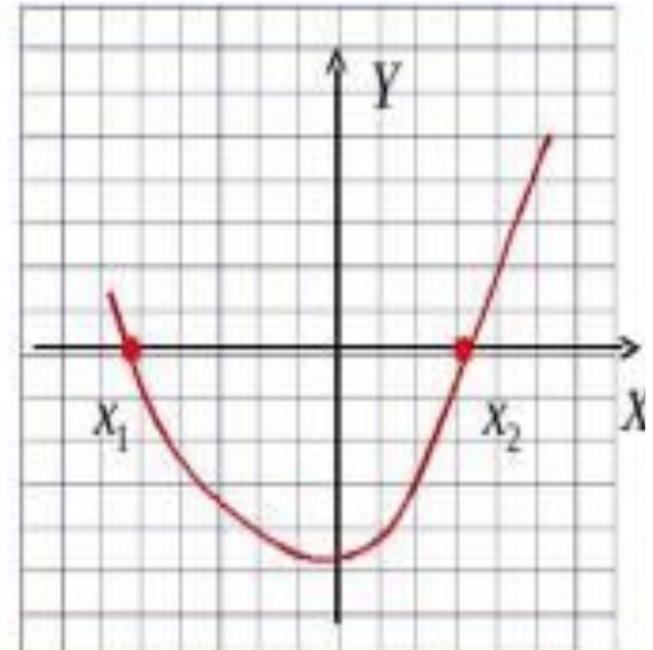
Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве $D(x)$, если все значения этой функции на множестве $D(x)$ меньше некоторого числа M , т.е. существует такое число M , что для всех значений x выполняется неравенство $f(x) < M$

Графики ограниченной снизу и ограниченной сверху функций



8. Нули функции

- Нули функции – это такие значения аргумента x , при которых функция $y = f(x)$ равна нулю.
- Нули функции – это абсциссы точек пересечения с осью Ox



9. Наименьшее значение функции

Число m называют **наименьшим значением функции** $y = f(x)$ на множестве $D(x)$, если:

- 1) во множестве X существует такая точка x_0 , что $f(x_0) = m$
- 2) для любого значения x из множества X выполняется неравенство

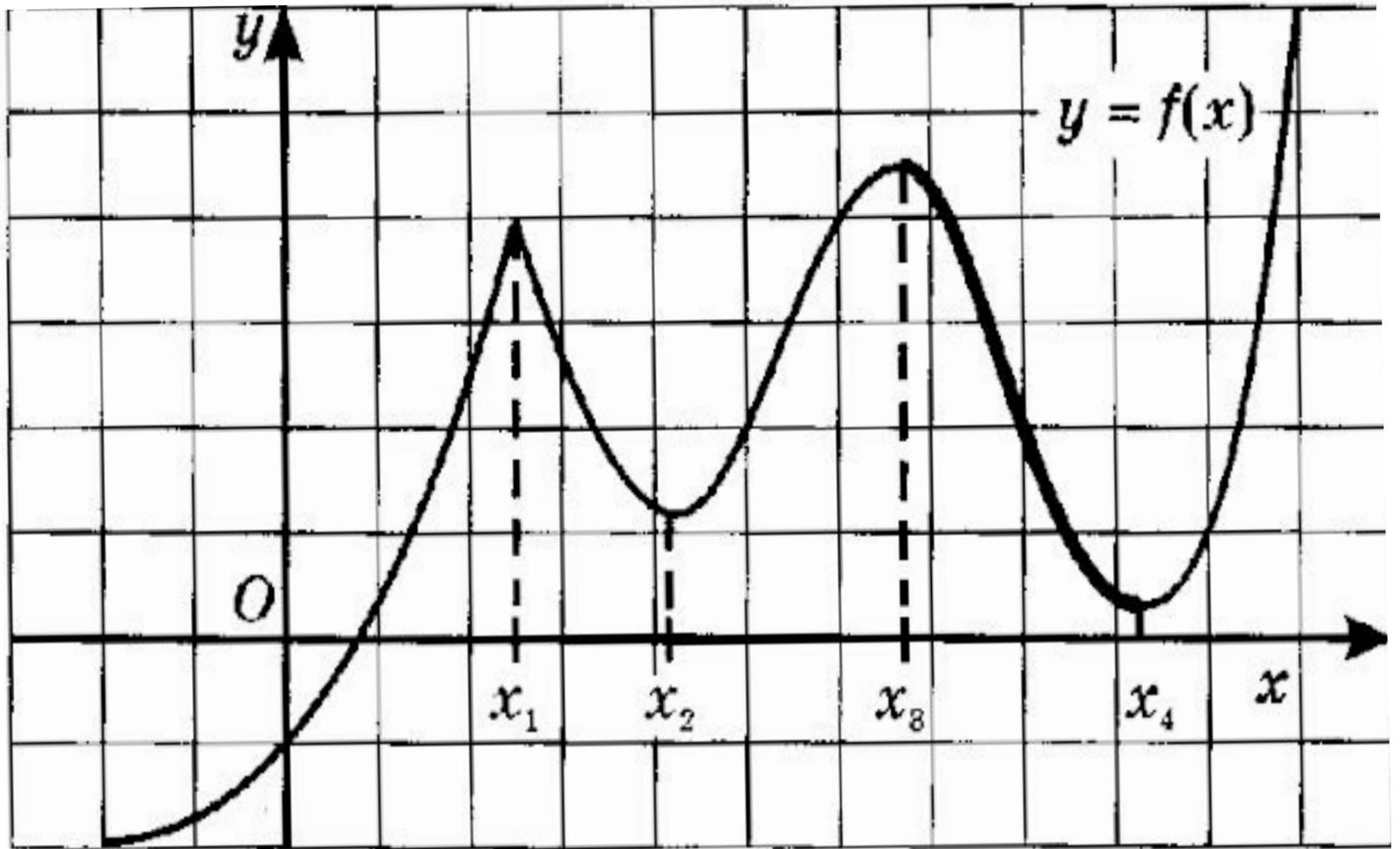
$$f(x) \geq f(x_0)$$

Наибольшее значение функции

Число m называют **наибольшим** значением функции $y = f(x)$ на множестве $D(x)$, если:

- 1) во множестве $D(x)$ существует такая точка, что $f(x_0) = m$
- 2) для любого значения x из множества $D(x)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0)$$



Условия существования экстремума

Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$,
то она ограничена сверху.

Если у функции существует $y_{\text{наим}}$,
то она ограничена снизу.

Максимум функции

Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

Минимум функции

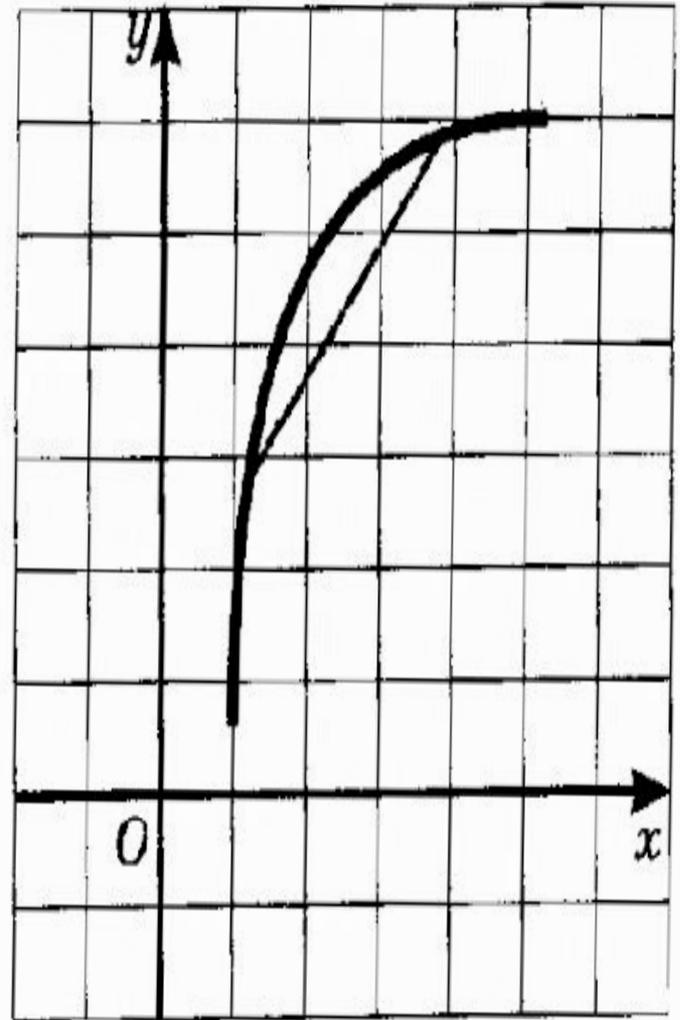
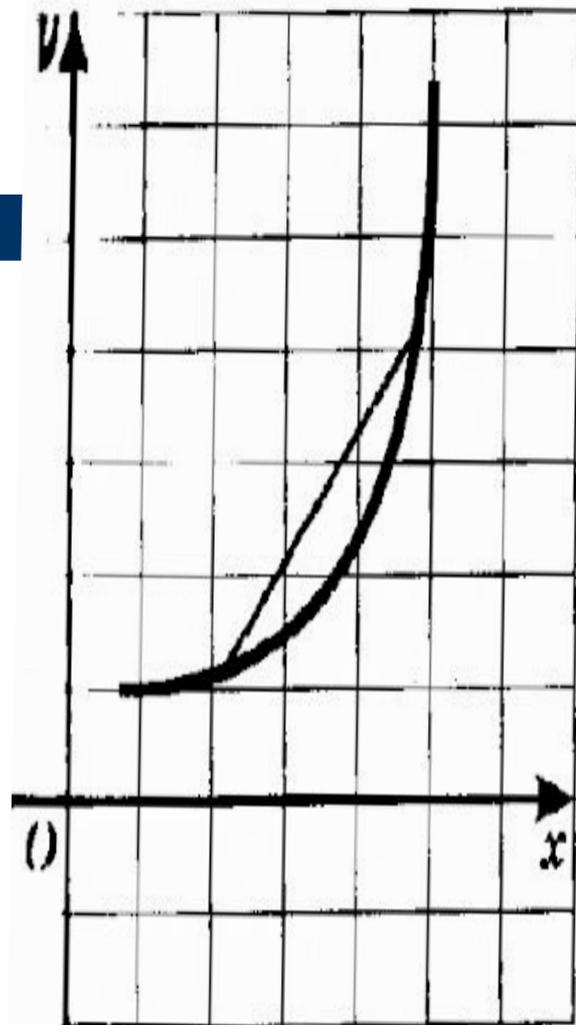
Точку x_0 называют точкой **минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0)$$

Точки максимума и минимума объединяют общим названием – **точки экстремума**

10. Выпуклость функции

- **Функция выпукла вниз** на промежутке $D(x)$, если, соединив любые две точки её графика отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка.
- **Функция выпукла вверх** на промежутке $D(x)$, если, соединив любые две точки её графика отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.



Опишите основные свойства

