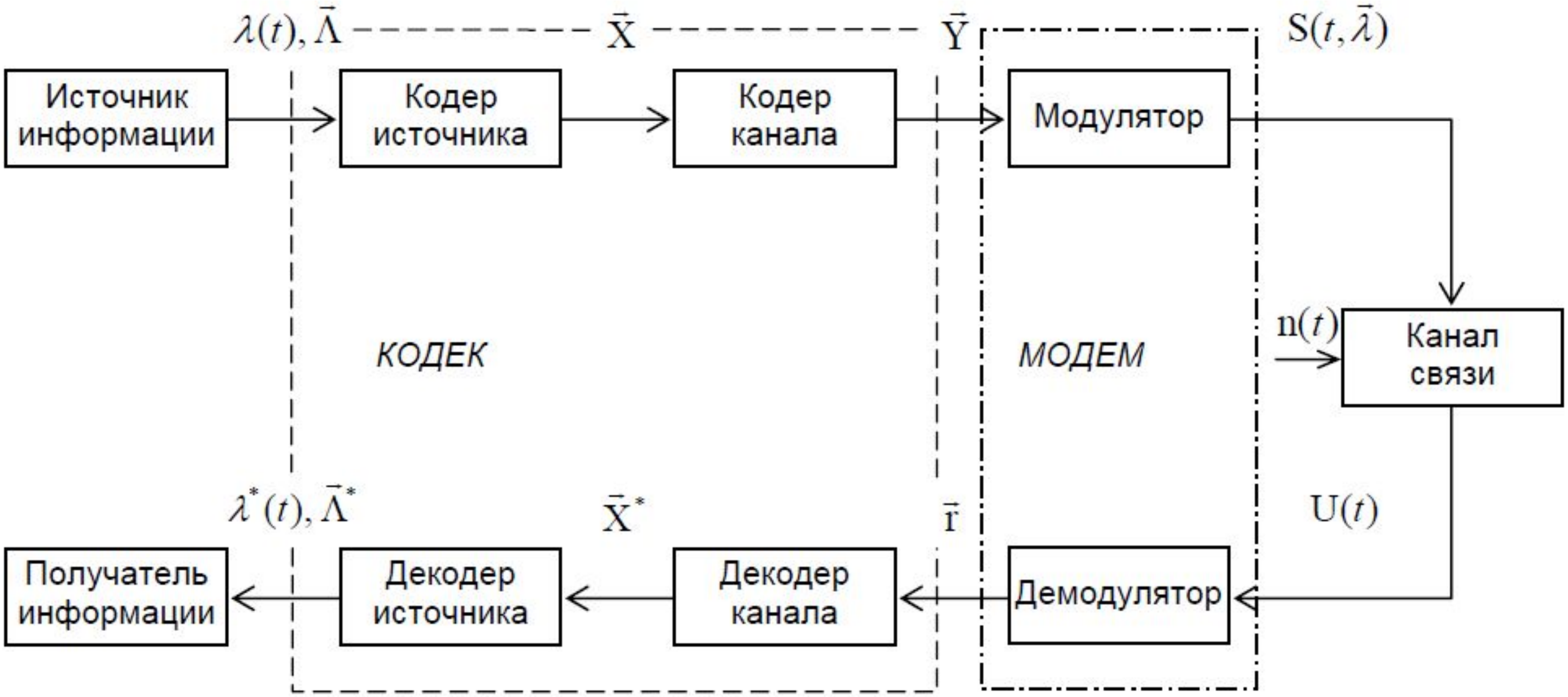
ЛЕКЦИЯ №1 ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ Ч.1

Преподаватель: Оцоков Шамиль Алиевич

Москва, 2021 г.

Модель передачи информации



Терминология

Источник информации

Цель кодирования

Преобразование различных сообщений в однообразную форму, упрощающих передачу информации, а также сокращение объема информации с целью повышения скорости ее передачи

Кодирование в канале, или *помехоустойчивое кодирование,* представляет собой способ обработки передаваемых данных, позволяющий обнаруживать и исправлять ошибки, возникающие в процессе передачи по каналу с помехами.

Модулятор. Задача модулятора - *преобразование закодированных сообщений в радиосигналы* $S(t)$, *свойства которых позволяли бы передавать их по радиоканалу связи.* При этом сигналы, принадлежащие множеству систем передачи информации, работающих в общем радиоканале, должны быть такими, чтобы обеспечивалась независимая передача сообщений от всех источников ко всем получателям информации.

Терминология

Демодулятор. Приемник в первую очередь должен *по принятому колебанию* $U(t)$ получить оценку кодовой последовательности Y называемую *принятой последовательностью* r. Эта процедура называется *демодуляцией, детектированием или приемом сигнала*.

Декодер канала. Принятые последовательности r в общем случае могут отличаться от переданных кодовых слов Y, то есть содержать ошибки. *Задача декодера канала* - обнаружить и, по возможности, *исправить* эти ошибки. Процедура обнаружения и исправления ошибок в принятой последовательности r называется *декодированиемв канале*.

Декодер источника. Поскольку информация источника ($\lambda(t)$, Λ) в процессе передачи подвергалась кодированию с целью ее более компактного (или более удобного) представления, ее необходимо восстановить к исходному виду. Процедура восстановления Λ^* по X^* называется *декодированием источника*.

Статистическая трактовка процесса передачи информации

Пусть известен алфави $\{\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots .\ \lambda_m\}$

Пусть создано сообщение, которое принимает одно из значений алфавита.
Какое именно получатель не знает. Таким образом, создание сообщения
источником представляет случайный эксперимент

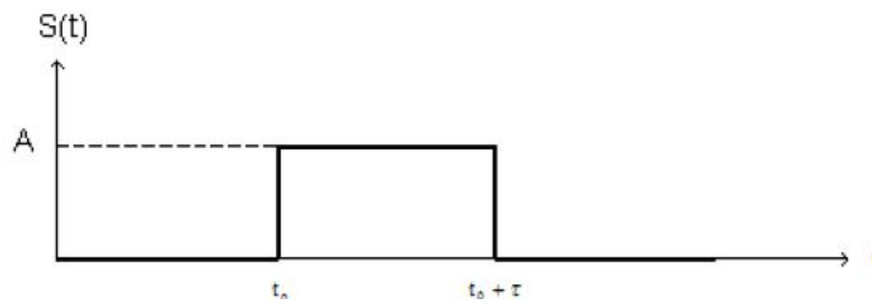
Одна из основных и принципиальных проблем, возникающих при передаче сообщений, состоит в том, что помехи, всегда присутствующие в канале связи, существенно затрудняют, а иногда делают невозможным воспроизведение передаваемых сообщений на приемной стороне. Поэтому, в теории связи уделяется очень большое внимание решению комплекса вопросов, связанных с преодолением этих трудностей. В связи с этим можно выделить следующие основные вопросы, которыми занимается теория связи и которые мы с той или иной степенью подробности будем рассматривать в нашем курсе:

Типы сигналов

Во-первых различают сигналы *детерминированные и случайные*. Детерминированным называется сигнал, который может быть задан в виде некоторой полностью определенной функции времени $S(t)$, то есть *сигнал, значения которого однозначно определены для любого заданного момента времени.*

Примером детерминированного сигнала может служить импульс прямоугольной (или иной) формы временное положение, амплитуда и длительность которого известны Аналитически такой сигнал можно задать набором своих параметров:

$$S(t) = \begin{cases} A, & \text{при } t_0 < t < t_0 + \tau_0 \\ 0, & \text{при } t < t_0 \text{ и } t > t_0 + \tau_0 \end{cases}$$

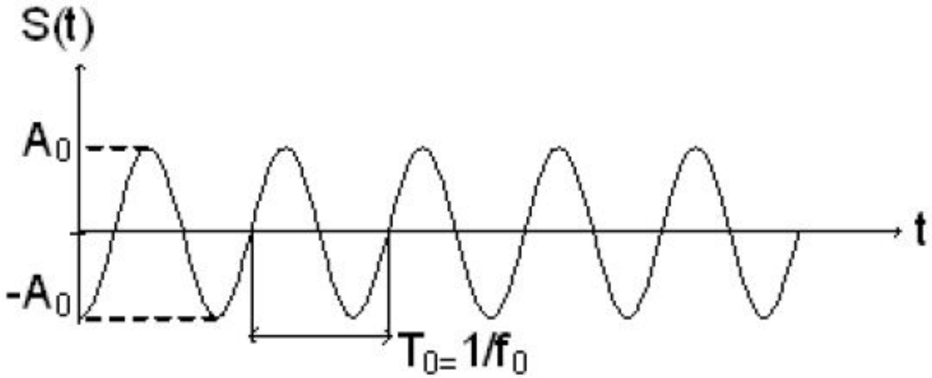


Гармонический сигнал

Другой пример – непрерывный гармонический сигнал

$$S(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0),$$

где A_0, f_0 и φ_0 заданная амплитуда, частота и начальная фаза сигнала.



Периодический сигнал

Детерминированные сигналы в свою очередь можно подразделить на *периодические и непериодические.* Периодический сигнал, это сигнал, значения которого периодически повторяются, то есть для которого выполняется условие

$$S\,(t + T_0\,) = S(t),$$

где T_0 – период повторения.

Помехи

Помехой называется любое случайное воздействие на сигнал, которое ухудшает верность воспроизведения передаваемых сообщений, то есть ухудшает качество связи. Помехи весьма разнообразны как по своему происхождению, так и по физическим свойствам.

В радиоканалах часто присутствуют атмосферные помехи, обусловленные электрическими процессами в атмосфере, прежде всего, грозовыми разрядами. Энергия этих помех сосредоточена главным образом в области длинных и средних волн.

Сильные помехи создают также различные промышленные и медицинские установки. Это так называемые *индустриальные помехи*, возникающие из-за резких изменений величины тока в электрических цепях, обусловленные генерацией электромагнитных колебаний большой мощности и т.д.. Сюда относятся помехи от электротранспорта, электрических двигателей, рентгеновских установок, систем зажигания двигателей и т.д..

Обобщенный ряд Фурье

В математике доказывается, что произвольная непрерывная функция *s(t)* для которой выполняется условие

$$\int_{t1}^{t2} ||\, s(t)||^2\, dt \; < \infty\,,$$

может быть *абсолютно точно* представлена в виде бесконечной суммы ряда

$$s(t) = c_0\,\varphi_0(t) + c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + \ldots . c_n\,\varphi_n(t) \ldots,$$

где $\varphi_n(t)$ – система ортогональных непрерывных функций, c_n – коэффициенты ряда, определяемые, как

$$c_n \;=\; (1/\, t_2 - t_1) \int_{t1}^{t2} s(t)\,\varphi_n(t)\, dt\,.$$

Обобщенный ряд Фурье

Что такое система ортогональных функций? Система действительных функций $\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots\ \varphi_n(t), \ldots$, называется ортогональной на отрезке $[t_1, t_2]$, если

$$\int_{t1}^{t2} \varphi_n(t)\, \varphi_m(t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m$$

При этом предполагается, что ни одна из них тождественно не равна нулю на этом интервале:

$$\lambda n = \int_{t1}^{t2} \varphi_n^2(t) \neq 0 \quad \text{при любом} \quad n.$$

Обобщенный ряд Фурье

При соблюдении условий $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, которая уже заведомо будет нормальной. Обратимся к примерам.

1) Важнейшим примером ортогональной системы функций как раз и является тригонометрическая система

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \ldots \tag{17}$$

в промежутке $[-\pi, \pi]$, которую мы рассматривали выше; ее ортогональность следует из соотношений (6), (8), (9) и (13). Однако нормальной она не будет ввиду (10) и (14). Умножая тригонометрические функции (17) на надлежащие множители, легко получить нормальную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{17*}$$

Ортогональные функции

Одной из наиболее удобных систем ортогональных функций, которые могут использоваться для разложения произвольных сигналов, является система тригонометрических функций - синусов и косинусов:

$$\varphi_{\mathrm{cn}}(t) = cos\ (\ 2\pi f_{\mathrm{n}}\ t),\ \varphi_{\mathrm{sn}}(t) = sin\ (2\ \pi f_{\mathrm{n}}\ t), \tag{1.11}$$

или в комплексной форме

$$\varphi_{\mathrm{en}}(\ t\ ) = exp(\ j\ 2\pi f_{\mathrm{n}}\ t\ ). \tag{1.12}$$

Система тригонометрических функций

Если в качестве базиса разложения выбрана система тригогнометрических функций, то говорят не об обобщенном ряде Фурье, а просто - о разложении функции в ряд Фурье

$$s(t) = c_0 + \Sigma\ a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t), \qquad (1.13)$$

где коэффициенты ряда a_n и b_n рассчитываются по формулам

$$a_n = (1/t_2 - t_1) \int_{t1}^{t2} s(t) \cos(2\pi f_n t)dt, \qquad (1.14)$$

$$b_n = (1/t_2 - t_1) \int_{t1}^{t2} s(t) \sin(2\pi f_n t)dt. \qquad (1.15)$$

Ряд Фурье

для которой коэффициенты c_n определяются по формуле

$$c_n = 1/T \int_{t1}^{t2 = t1+T} s(t)\, exp(-j2\pi f_n t)\, dt . \qquad (1.17)$$

Набор коэффициентов ряда Фурье сигнала называется *спектром Фурье этого сигнала* или просто *спектром*.

Разложение фунции в ряд Фурье называют ее гармоническим или *спектральным анализом*, а слагаемые ряда, аппроксимирующего функцию – ее *спектральными составляющими*. Таким образом, спектральный анализ сигнала *s(t)* показывает: сколько и каких по величине спектральных составляющих (гармоник) содержится в данном сигнале.

Ряд Фурье

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока или — в примере паровой машины — путь, скорость и ускорение крейцкопфа, давление пара, касательное усилие в пальце кривошипа и т. д.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является *синусоидальная величина*: $A\sin(\omega t+\alpha)$, где ω есть «частота», связанная с периодом T соотношением:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Наперед ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо, как легко убедиться, сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, ибо приводит опять к синусоидальной величине, притом той же частоты. Наоборот, если сложить несколько величин вида

$$\left.\begin{aligned}y_0=A_0,\ y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\ y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2),\\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3),\ \ldots\ ,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ряд Фурье

которые, если не считать постоянной, имеют частоты

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \ldots,$$

кратные наименьшей из них, ω, и периоды

$$T,\ \frac{1}{2}T,\ \frac{1}{3}T,\ \ldots,$$

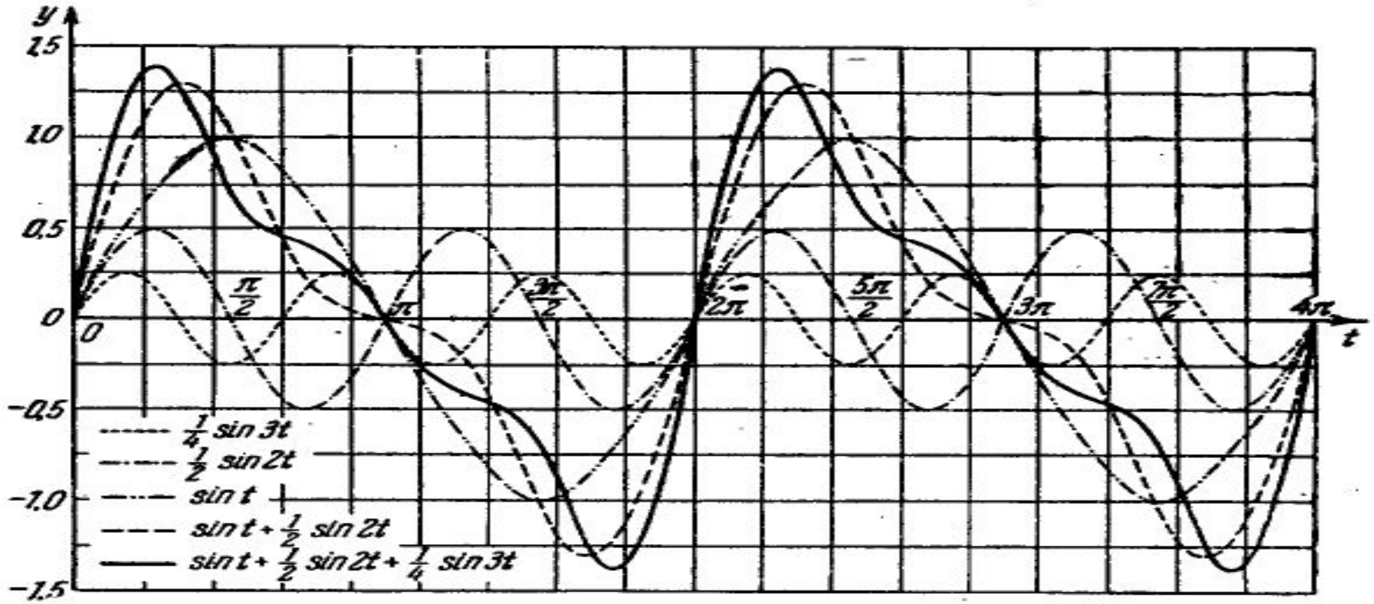
то получится периодическая функция (с периодом T), но уже существенно отличная от величин типа (2).

Для примера мы воспроизводим здесь сложение трех синусоидальных величин:

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t;$$

график этой функции по своему характеру уже значительно разнится от синусоиды. Еще в большей степени это имеет место для суммы бесконечного ряда, составленного из величин вида (2).

Ряд Фурье



Теперь естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (2)? Как увидим ниже, по отношению к довольно широкому классу функций на этот вопрос можно дать **утвердительный** ответ, но только если привлечь именно всю **бесконечную** последовательность величин (2).

Ряд Фурье

Для функций этого класса имеет место разложение в «тригонометрический ряд»:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (3)$$

причем A_0, A_1, α_1, A_2, α_2, ... суть постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота ω дается формулой (1).

Геометрически это означает, что *график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид*. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что здесь *сложное колебание, характеризуемое функцией* $\varphi(t)$, *разлагается на отдельные гармонические колебания*. В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения (3), называют *гармоническими составляющими* функции $\varphi(t)$ или просто ее *гармониками* (первой, второй и т. д.). Самый же процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа*.

Ряд Фурье

Если за независимую переменную выбрать

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

то получится функция от x:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом 2π. Разложение же (3) примет вид

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \qquad (4)$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы и положив

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \ldots = \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (5)$$

Ряд Фурье

A0 + A1*sin(x)*cos(α1) + A1*cos(x)*sin(α1)+ A2*sin(2x)*cos(α2) + A2*sin(α2)*cos(2x)+… =

Будем предполагать функцию $f(x)$ *интегрируемой в промежутке* $[-\pi, \pi]$ — *в собственном или в несобственном смысле; в последнем случае мы дополнительно будем предполагать, что функция абсолютно интегрируема.* Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно от $-\pi$ до π; мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right].$$

Но, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{и}\quad &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, и окончательно найдем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Ряд Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right].$$

Первый член справа исчезает ввиду (6). Далее имеем [ср. **308**, 4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = 0; \qquad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,dx = 0, \qquad (9)$$

если $n \neq m$, и, наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx = \pi. \qquad (10)$$

Ряд Фурье

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m. Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \qquad (11)$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично, умножая предварительно разложение (5) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, определим коэффициент при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \qquad (12)$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ряд Фурье

Пусть в промежутке $[a, b]$ дана какая-нибудь ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$. Зададимся целью разложить определенную в $[a, b]$ функцию $f(x)$ в «ряд по функциям φ» вида:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{22}$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская его возможность, поступим так, как мы это сделали в частном случае выше. Именно, умножив обе части разложения на $\varphi_m(x)$, проинтегрируем его почленно:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx.$$

Ряд Фурье

В силу ортогональности [см. (15) и (16)], все интегралы справа, кроме одного, будут нулями, и легко получается:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x)\, \varphi_m(x)\, dx. \tag{23}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

[Формулы (7), (11), (12) являются частными случаями этой формулы.]

Ряд (22) с коэффициентами, составленными по формулам (23), называется (*обобщенным*) *рядом Фурье* данной функции, а сами коэффициенты — ее (*обобщенными*) *коэффициентами Фурье* относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. Особенно просто выглядят формулы (23) в случае нормальной системы; тогда

$$c_m = \int_a^b f(x)\, \varphi_m(x)\, dx \tag{23*}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Конечно, здесь могут быть повторены те же замечания, какими мы закончили предыдущий n°. Обобщенный ряд Фурье, построенный для данной функции $f(x)$, связан с нею лишь формально. И в общем случае связь между функцией $f(x)$ и ее (обобщенным) рядом Фурье обозначают так:

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{22*}$$

Ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \tag{8}$$

Его коэффициенты определяются формулами

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu \, du, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu \, du. \tag{9}$$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$ $(m = 1, 2, \ldots)$

Если заменить теперь $\cos mx$ и $\sin mx$ их выражениями через показательную функцию от чисто мнимого аргумента [**457**]:

$$\cos mx = \frac{1}{2}(e^{mxi} + e^{-mxi}),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i}(e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2}(e^{-mxi} - e^{mxi}),$$

то получится ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_m - b_m i) e^{mxi} + \frac{1}{2}(a_m + b_m i) e^{-mxi}.$$

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \tag{10}$$

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \qquad (10)$$

полагая

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + b_m i), \qquad (11)$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

так что *

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \qquad (12)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье функции* $f(x)$.

Ряд Фурье

Коэффициенты c_m разложения (10), определяемые формулами (11), если учесть формулы Эйлера — Фурье (9), могут быть записаны единообразно:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-nui}\, du. \tag{13}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$c_n = 1/T \int_{t1}^{t2 = t1+T} s(t) \exp(-j2\pi f_n t)\, dt\,.$$

Или в комплексной форме

$$s(t) = \Sigma c_n \exp(j2\pi f_n t),$$

Ряд Фурье

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье сигнала в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов вида Рис. 1.5 – так называемого *“меандра”*

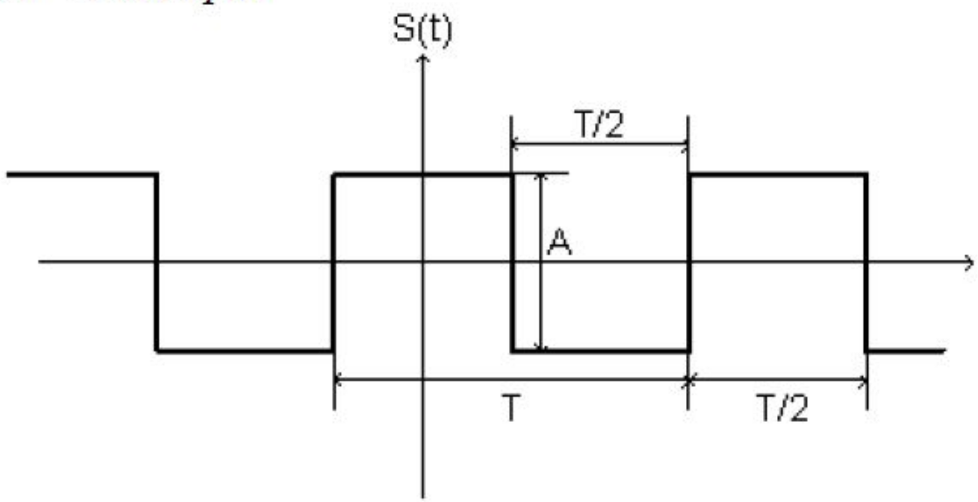


Рис. 1.5

Ряд Фурье

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i f t}\, dt$$

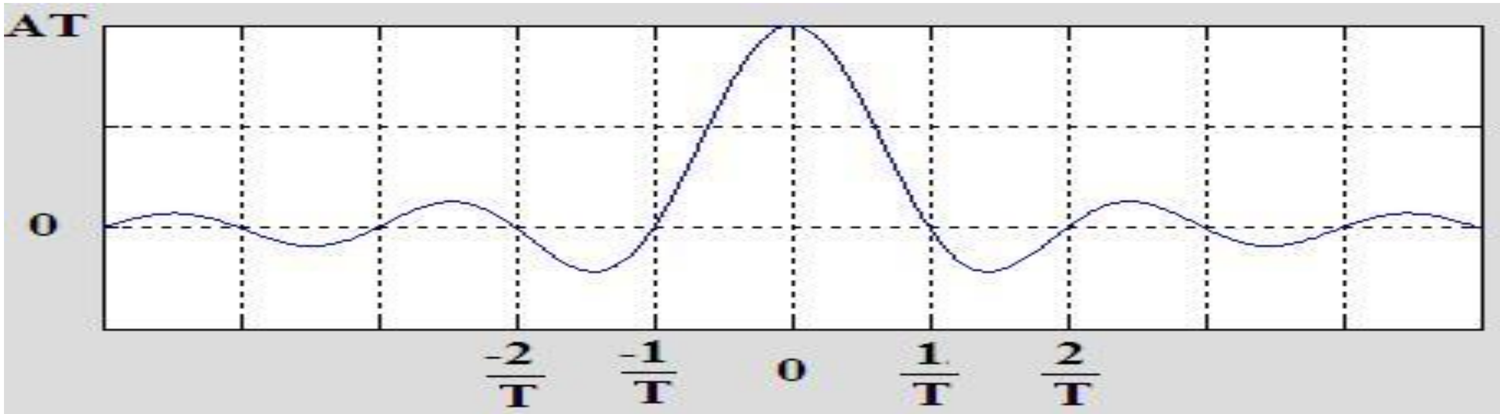
$$= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-2\pi i f t}\, dt = \frac{A}{-2\pi i f}\left[e^{-2\pi i f t} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right]$$

$$= \frac{A}{-2\pi i f}\left[e^{-\pi i f T} - e^{\pi i f T} \right] = \frac{AT}{\pi f T}\left[\frac{e^{\pi i f T} - e^{-\pi i f T}}{2i} \right]$$

$$= \frac{AT}{\pi f T} \sin(\pi f T) = AT\left[\operatorname{sinc}(fT)\right]$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Ряд Фурье



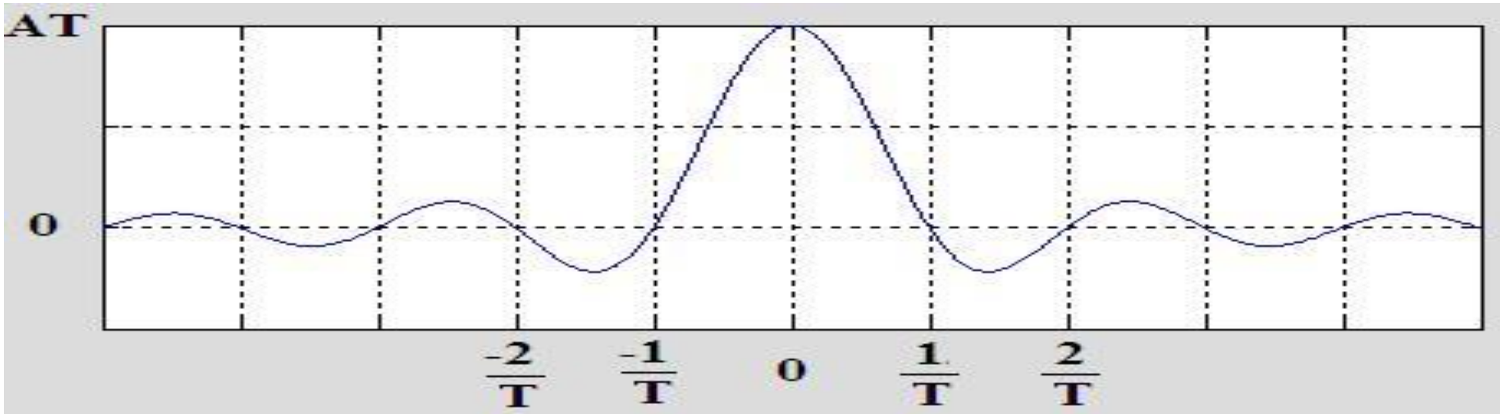
$$a_n = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_n t)dt = (1/T)\int_{-T/4}^{T/4} A\cos(2\pi nt/T)dt = (2A/\pi n)\sin(\pi n/2) \quad (1.18)$$

Представление сигнала типа “*меандр*” в виде ряда Фурье с учетом этого можно записать следующим образом

$$s(t) = 2A/\pi\,\{\cos(2\pi t/T) - 1/3\cos(3\cdot 2\pi t/T) + 1/5\cos(5\cdot 2\pi t/T) - \ldots\}, \quad (1.19)$$

$$s(t) = c_0 + \Sigma\, a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t),$$

Ряд Фурье



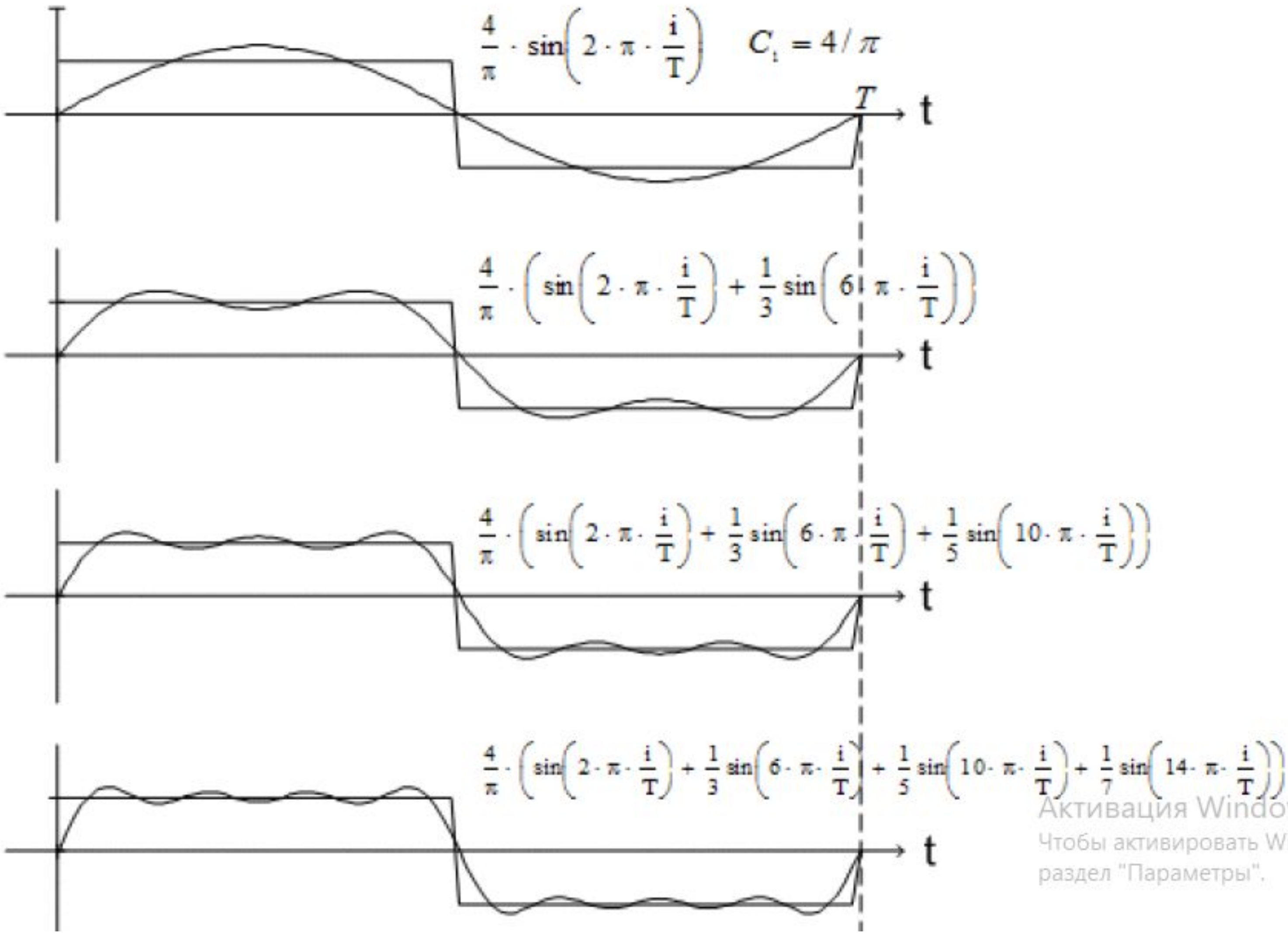
$$a_n = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_n t)dt = (1/T)\int_{-T/4}^{T/4} A\cos(2\pi nt/T)dt = (2A/\pi n)\sin(\pi n/2) \qquad (1.18)$$

Представление сигнала типа *“меандр”* в виде ряда Фурье с учетом этого можно записать следующим образом

$$s(t) = 2A/\pi\,\{\cos(2\pi t/T) - 1/3\cos(3\cdot 2\pi t/T) + 1/5\cos(5\cdot 2\pi t/T) - \ldots\}, \qquad (1.19)$$

$$s(t) = c_0 + \Sigma\, a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t),$$

Ряд Фурье


$\frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right)$
$C_1 = 4/\pi$
T
t
$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(6 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right)\right)$
t
$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(6 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(10 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right)\right)$
t
$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(6 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(10 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right) + \frac{1}{7}\sin\left(14 \cdot \pi \cdot \frac{i}{T}\right)\right)$
t

Ряд Фурье

Для непериодических сигналов конечной длительности *s(t)* используется другая форма разложения, при которой дискретность или шаг вычисления спектра стремится по величине к нулю и дискретный ряд Фурье переходит в интеграл Фурье или *преобразование Фурье*. Переход от ряда Фурье для периодического сигнала к интегралу Фурье для непериодического сигнала можно объяснить следующим образом. Любую финитную непериодическую функцию можно рассматривать как функцию периодическую, с периодом $T = \infty$. Тогда к ней можно применить разложение в ряд Фурье с дискретностью

Ряд Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi ft)\, df\,. \tag{1.20}$$

Это выражение представляет непериодическую функцию *S(t)*, как бесконечную сумму экспоненциальных функций $exp(2\pi ft)$ с частотами на интервале $(-\infty < f < \infty)$ и весами, определяемыми для каждой частоты величиной $S(f)$, которая называется *функцией спектральной плотности* и имеет тот же смысл, что и коэффициенты c_n для ряда Фурье.

Функция спектральной плотности для интеграла Фурье определяется следующим образом

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt\,. \tag{1.21}$$

Ряд Фурье

Функция $S(f)$ (спектральная плотность или просто *спектр*) является прямым преобразованием Фурье сигнала $s(t)$. Она характеризует амплитуды различных частотных составляющих, входящих в этот сигнал. Поэтому говорят, что фунция $S(f)$ является частотным представлением сигнала $s(t)$.

В свою очередь, временной сигнал $s(t)$ может быть получен обратным преобразованием Фурье его спектра $S(f)$. Обе формы представления эквивалентны, поскольку могут быть получены друг из друга линейным преобразованием, хотя более привычной для нас и является временная форма представления сигнала – его задание значениями в различные моменты времени.

Символически, прямое и обратное преобразования Фурье часто обозначают, как

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] \quad \text{и} \quad s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)]. \qquad (1.22)$$

Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как мы показали, служит инструментом для представления функций времени через экспоненциальные (гармонические) составляющие с различными частотами. То есть возможны два равнозначных способа определения сигналов - во временной и частотной областях. Выясним, как влияют определенные действия, совершаемые над сигналом в одной области, на ее вид в другой области. К примеру – как, при изменении дли-

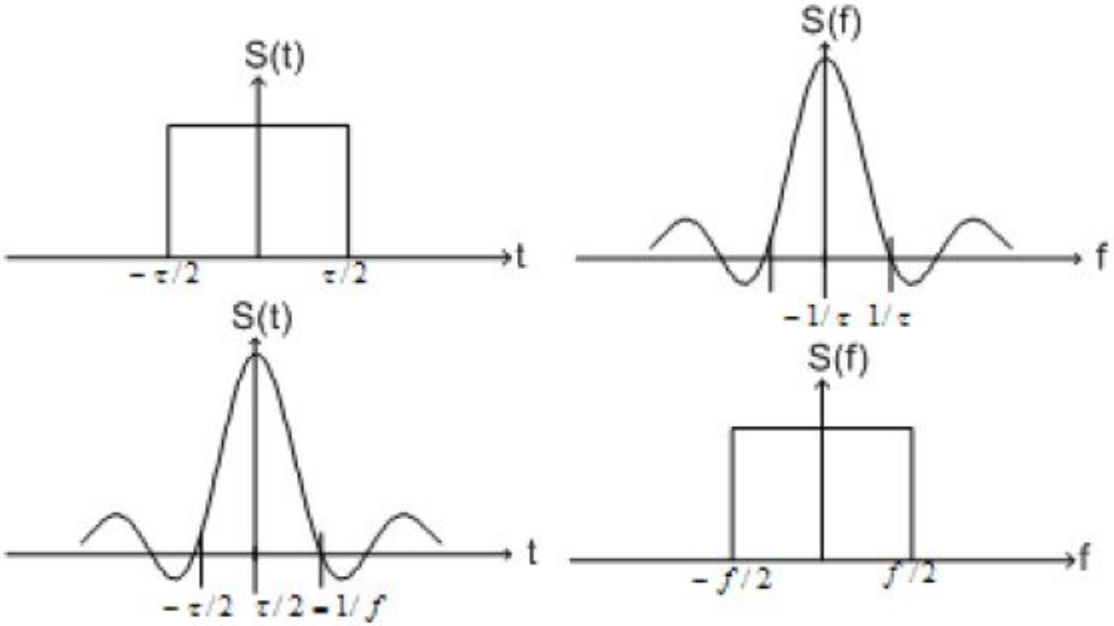
Свойство симметрии

Свойство симметрии прямого и обратного преобразований Фурье можно сформулировать следующим образом:

если $s(t) = A(t)$ *и соответствующий ему спектр* $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = B(f)$,

то сигналу $s(t) = B(t)$ *соответствует спектр* $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = A(f)$.

Свойства преобразования Фурье



Свойства преобразования Фурье

Свойство линейности

Свойство линейности преобразования Фурье можно сформулировать следующим образом: *спектр суммы сигналов равен сумме их спектров*, иными словами, если

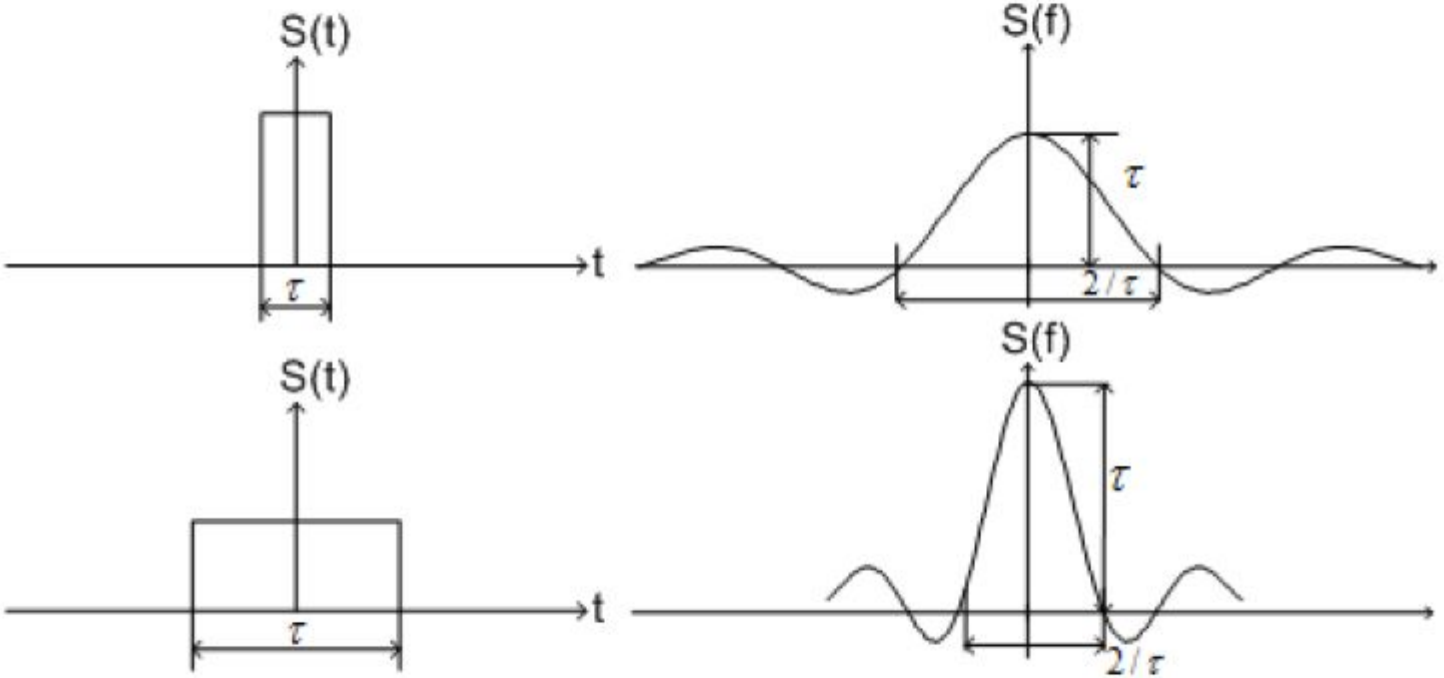
$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad \text{то} \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = a_1 \mathcal{F}[s_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[s_2(t)]$$

Свойство изменения масштаба

Это свойство формулируется следующим образом:

$$\text{если} \qquad S(f) = \mathcal{F}[s(t)]\,, \quad \text{то} \qquad \mathcal{F}[s(a\,t)] = 1/a\, S(f/a).$$

Свойства преобразования Фурье



Свойства преобразования Фурье

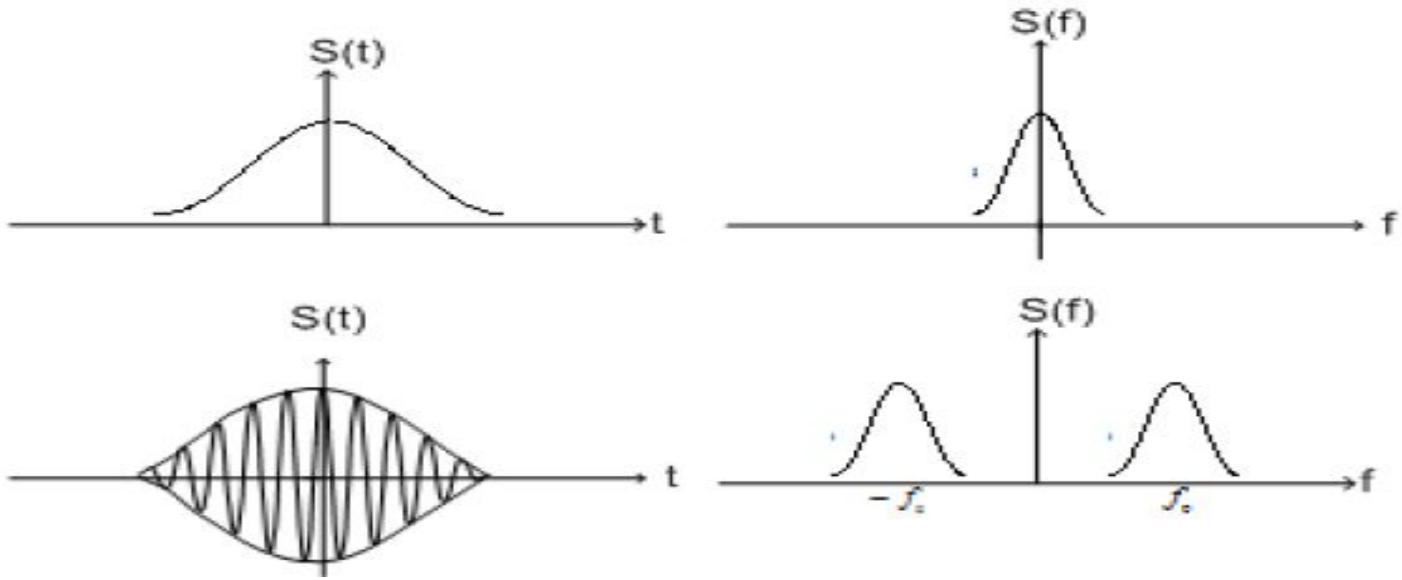
Свойство частотного сдвига

Свойство частотного сдвига состоит в следующем:

если $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$ *то* $\mathcal{F}[s(t)exp(j2\pi f_0 t)] = S(f + f_0),$

Иными словами, если сигнал $S(t)$ умножить на экспоненту вида $exp(j2\pi f_0 t)$ (на комплексную синусоиду) то спектр этого сигнала $S(f)$ сдвинется по оси частот на величину f_0. Данное свойство преобразования Фурье иллюстрируется и широко используется в радиотехнических устройствах (преобразование частоты сигнала).

Свойства преобразования Фурье



Свойство временного сдвига

Если $\mathcal{F}[s(t)] = S(f)$ *то* $\mathcal{F}[s(t\text{-}\tau)] = S(f)\, exp(\text{-}j2\pi f\tau)$

То есть, при временном сдвиге сигнала его амплитудный спектр не изменяется, а фазовый спектр приобретает дополнительное слагаемое, линейно зависящее от частоты.

Свойства преобразования Фурье

Теорема о свертке

Свертка сигналов является очень часто используемым в радиотехнике интегральным преобразованием сигналов, поскольку она, в частности, описывает прохождение сигнала через линейную систему с постоянными параметрами (усилители, фильтры, дифференцирующие и интегрирующие звенья и т.п.) . Операция свертки записывается следующим образом:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Символически свертка обозначается, как $f(t) \otimes h(t)$.

Свойства преобразования Фурье

Таким образом, теорема о свертке может быть сформулирована примерно следующим образом: *свертке двух функций во временной области соответствует произведение спектров этих функций, и обратно, свертке двух спектров соответствует произведение соответствующих им временных функций.*

В символах преобразования Фурье эта теорема может быть записана таким образом:

$$\mathcal{F}[s_1(t) \otimes s_2(t)] = \mathcal{F}[s_1(t)]\ \mathcal{F}[s_2(t)] = S_1(f)\ S_2(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[S_1(f) \otimes S_2(f)] = s_1(t)\ s_2(t)\ .$$