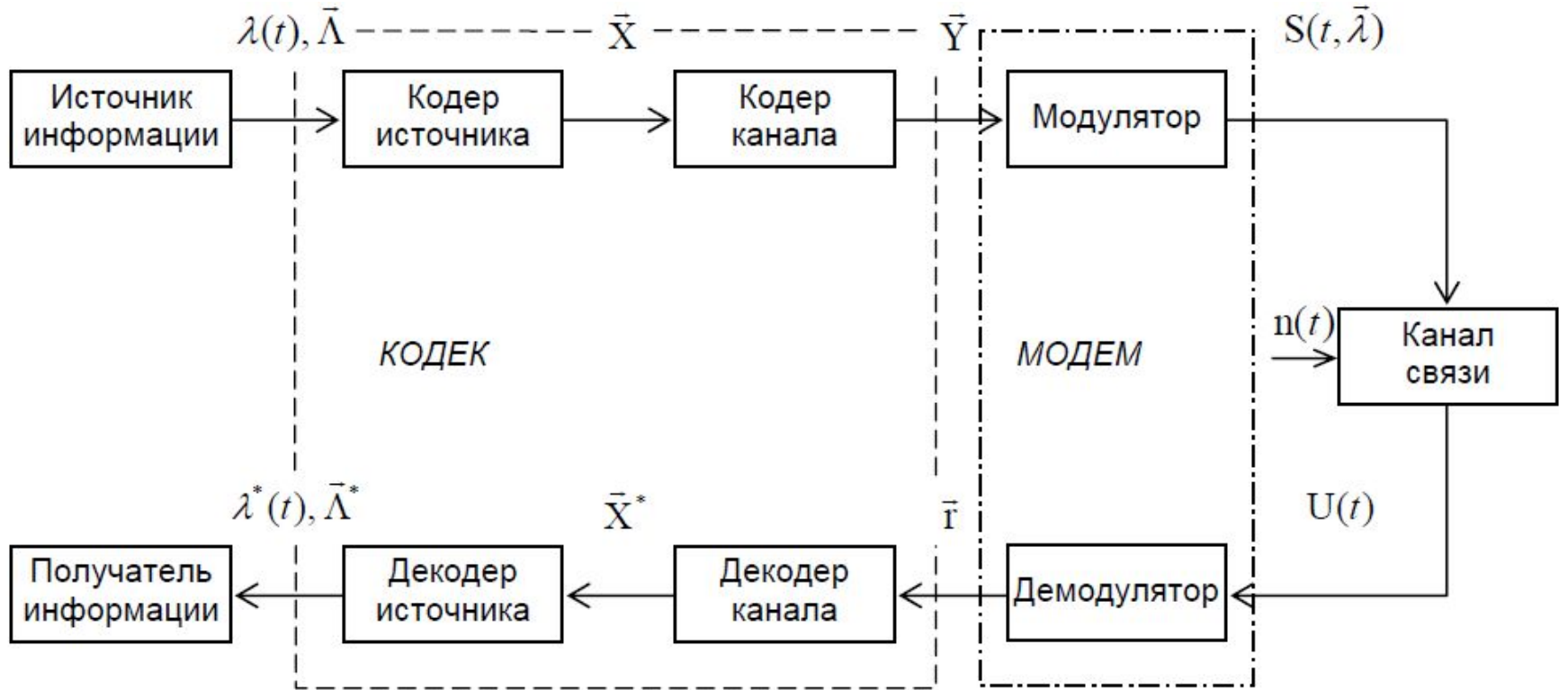


**ЛЕКЦИЯ №1 ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ  
ИНФОРМАЦИИ Ч.1**

**Преподаватель: Оцоков Шамиль Алиевич**

Москва, 2021 г.

# Модель передачи информации



# Терминология

## Источник информации

### Цель кодирования

Преобразование различных сообщений в однообразную форму, упрощающих передачу информации, а также сокращение объема информации с целью повышения скорости ее передачи

*Кодирование в канале, или помехоустойчивое кодирование, представляет собой способ обработки передаваемых данных, позволяющий обнаруживать и исправлять ошибки, возникающие в процессе передачи по каналу с помехами.*

*Модулятор. Задача модулятора - преобразование закодированных сообщений в радиосигналы  $S(t)$ , свойства которых позволяли бы передавать их по радиоканалу связи. При этом сигналы, принадлежащие множеству систем передачи информации, работающих в общем радиоканале, должны быть такими, чтобы обеспечивалась независимая передача сообщений от всех источников ко всем получателям информации.*

## Терминология

*Демодулятор.* Приемник в первую очередь должен по принятому колебанию  $U(t)$  получить оценку кодовой последовательности  $Y$  называемую *принятой последовательностью  $r$* . Эта процедура называется *демодуляцией, детектированием или приемом сигнала*.

*Декодер канала.* Принятые последовательности  $r$  в общем случае могут отличаться от переданных кодовых слов  $Y$ , то есть содержать ошибки. *Задача декодера канала* - обнаружить и, по возможности, *исправить* эти ошибки. Процедура обнаружения и исправления ошибок в принятой последовательности  $r$  называется *декодированием в канале*.

*Декодер источника.* Поскольку информация источника  $(\lambda(t), A)$  в процессе передачи подвергалась кодированию с целью ее более компактного (или более удобного) представления, ее необходимо восстановить к исходному виду. Процедура восстановления  $A^*$  по  $X^*$  называется *декодированием источника*.

## Статистическая трактовка процесса передачи информации

Пусть известен алфавит  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$

Пусть создано сообщение, которое принимает одно из значений алфавита.

Какое именно получатель не знает. Таким образом, создание сообщения

математическим предстает случайный эксперимент

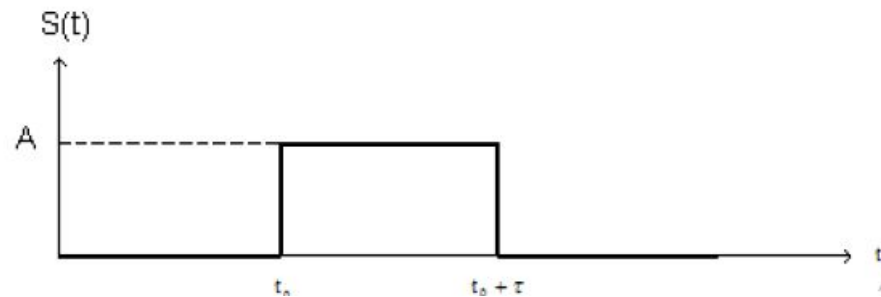
Одна из основных и принципиальных проблем, возникающих при передаче сообщений, состоит в том, что помехи, всегда присутствующие в канале связи, существенно затрудняют, а иногда делают невозможным воспроизведение передаваемых сообщений на приемной стороне. Поэтому, в теории связи уделяется очень большое внимание решению комплекса вопросов, связанных с преодолением этих трудностей. В связи с этим можно выделить следующие основные вопросы, которыми занимается теория связи и которые мы с той или иной степенью подробности будем рассматривать в нашем курсе:

## Типы сигналов

Во-первых различают сигналы *детерминированные* и *случайные*. Детерминированным называется сигнал, который может быть задан в виде некоторой полностью определенной функции времени  $S(t)$ , то есть *сигнал, значения которого однозначно определены для любого заданного момента времени*.

Примером детерминированного сигнала может служить импульс прямоугольной (или иной) формы временное положение, амплитуда и длительность которого известны. Аналитически такой сигнал можно задать набором своих параметров:

$$S(t) = \begin{cases} A, & \text{при } t_0 < t < t_0 + \tau_0 \\ 0, & \text{при } t < t_0 \text{ и } t > t_0 + \tau_0 \end{cases}$$

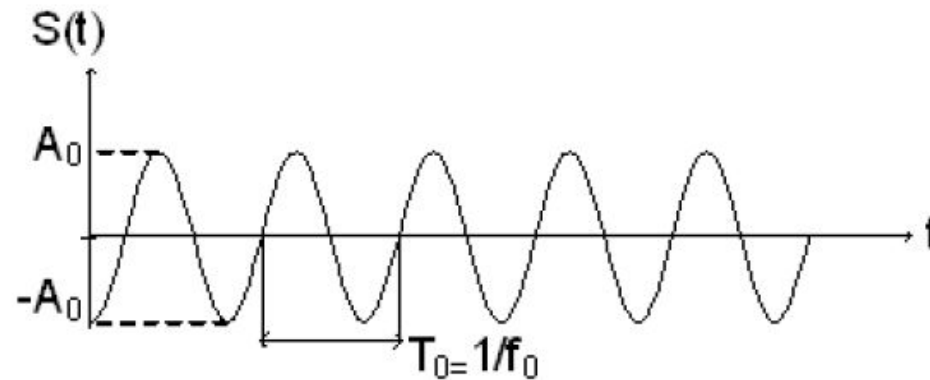


## Гармонический сигнал

Другой пример – непрерывный гармонический сигнал

$$S(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0),$$

где  $A_0$ ,  $f_0$  и  $\varphi_0$  заданная амплитуда, частота и начальная фаза сигнала.



## Периодический сигнал

Детерминированные сигналы в свою очередь можно подразделить на *периодические и непериодические*. Периодический сигнал, это сигнал, значения которого периодически повторяются, то есть для которого выполняется условие

$$S(t + T_0) = S(t),$$

где  $T_0$  – период повторения.



## Помехи

*Помехой* называется любое случайное воздействие на сигнал, которое ухудшает верность воспроизведения передаваемых сообщений, то есть ухудшает качество связи. Помехи весьма разнообразны как по своему происхождению, так и по физическим свойствам.

В радиоканалах часто присутствуют атмосферные помехи, обусловленные электрическими процессами в атмосфере, прежде всего, грозowymi разрядами. Энергия этих помех сосредоточена главным образом в области длинных и средних волн.

Сильные помехи создают также различные промышленные и медицинские установки. Это так называемые *индустриальные помехи*, возникающие из-за резких изменений величины тока в электрических цепях, обусловленные генерацией электромагнитных колебаний большой мощности и т.д.. Сюда относятся помехи от электротранспорта, электрических двигателей, рентгеновских установок, систем зажигания двигателей и т.д..

## Обобщенный ряд Фурье

В математике доказывается, что произвольная непрерывная функция  $s(t)$  для которой выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} ||s(t)||^2 dt < \infty ,$$

может быть *абсолютно точно* представлена в виде бесконечной суммы ряда

$$s(t) = c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots c_n \varphi_n(t) \dots,$$

где  $\varphi_n(t)$  – система ортогональных непрерывных функций,  $c_n$  – коэффициенты ряда, определяемые, как

$$c_n = (1/t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n(t) dt .$$

## Обобщенный ряд Фурье

Что такое система ортогональных функций? Система действительных функций  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ , называется ортогональной на отрезке  $[t_1, t_2]$ , если

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = 0 \quad \text{при } n \neq m$$

При этом предполагается, что ни одна из них тождественно не равна нулю на этом интервале:

$$\lambda_n = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t) dt \neq 0 \quad \text{при любом } n.$$

## Обобщенный ряд Фурье

При соблюдении условий  $\lambda_n = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе  $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ , которая уже заведомо будет нормальной. Обратимся к примерам.

✓ 1) Важнейшим примером ортогональной системы функций как раз и является тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (17)$$

в промежутке  $[-\pi, \pi]$ , которую мы рассматривали выше; ее ортогональность следует из соотношений (6), (8), (9) и (13). Однако нормальной она не будет ввиду (10) и (14). Умножая тригонометрические функции (17) на надлежащие множители, легко получить нормальную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (17^*)$$

Активаци

## Ортогональные функции

Одной из наиболее удобных систем ортогональных функций, которые могут использоваться для разложения произвольных сигналов, является система тригонометрических функций - синусов и косинусов:

$$\varphi_{\text{cn}}(t) = \cos(2\pi f_n t), \quad \varphi_{\text{sn}}(t) = \sin(2\pi f_n t), \quad (1.11)$$

или в комплексной форме

$$\varphi_{\text{en}}(t) = \exp(j 2\pi f_n t). \quad (1.12)$$

## Система тригонометрических функций

Если в качестве базиса разложения выбрана система тригонометрических функций, то говорят не об обобщенном ряде Фурье, а просто - о разложении функции в ряд Фурье

$$s(t) = c_0 + \sum a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t), \quad (1.13)$$

где коэффициенты ряда  $a_n$  и  $b_n$  рассчитываются по формулам

$$a_n = (1/t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} s(t) \cos(2\pi f_n t) dt, \quad (1.14)$$

$$b_n = (1/t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} s(t) \sin(2\pi f_n t) dt. \quad (1.15)$$

## Ряд Фурье

для которой коэффициенты  $c_n$  определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2 = t_1 + T} s(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt. \quad (1.17)$$

Набор коэффициентов ряда Фурье сигнала называется *спектром Фурье этого сигнала* или просто *спектром*.

Разложение функции в ряд Фурье называют ее гармоническим или *спектральным анализом*, а слагаемые ряда, аппроксимирующего функцию – ее *спектральными составляющими*. Таким образом, спектральный анализ сигнала  $s(t)$  показывает: сколько и каких по величине спектральных составляющих (гармоник) содержится в данном сигнале.

## Ряд Фурье

$$\varphi(t + T) = \varphi(t).$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока или — в примере паровой машины — путь, скорость и ускорение кривокопфа, давление пара, касательное усилие в пальце кривошипа и т. д.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является *синусоидальная величина*:  $A \sin(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega$  есть «частота», связанная с периодом  $T$  соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1)$$

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Наперед ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо, как легко убедиться, сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, ибо приводит опять к синусоидальной величине, притом той же частоты. Наоборот, если сложить несколько величин вида

$$\left. \begin{aligned} y_0 = A_0, \quad y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Активация  
Чтобы актив



## Ряд Фурье

которые, если не считать постоянной, имеют частоты

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots,$$

кратные наименьшей из них,  $\omega$ , и периоды

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots,$$

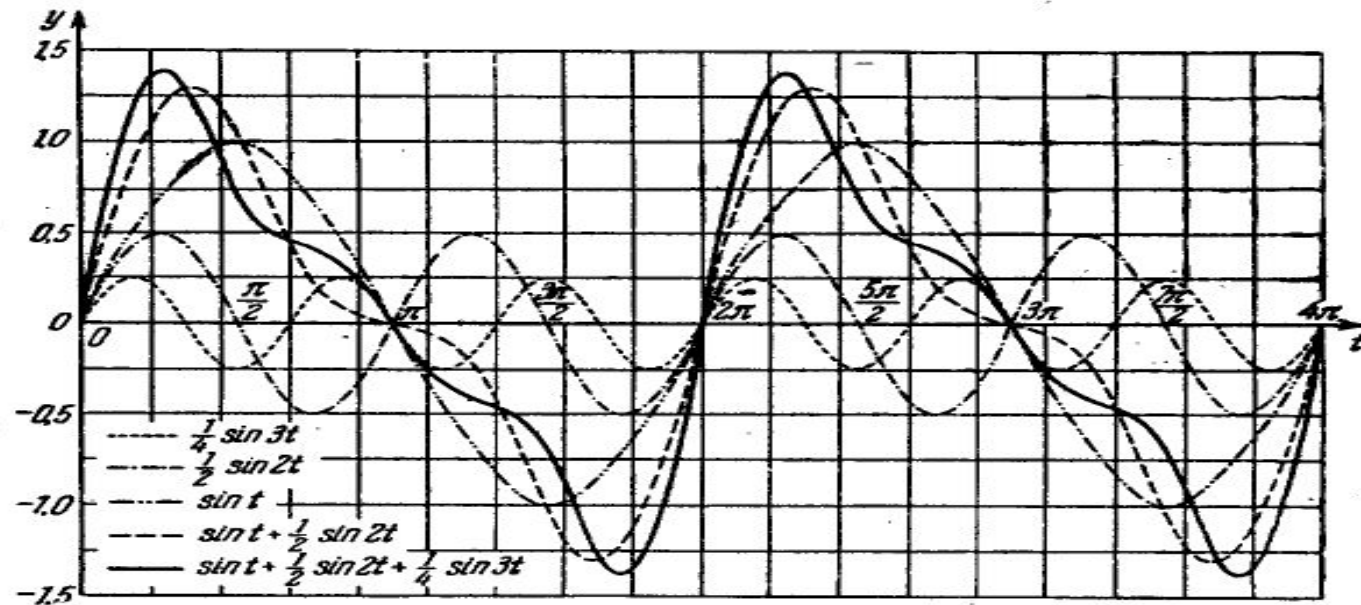
то получится периодическая функция (с периодом  $T$ ), но уже существенно отличная от величин типа (2).

Для примера мы воспроизводим здесь сложение трех синусоидальных величин:

$$\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 3t;$$

график этой функции по своему характеру уже значительно разнится от синусоиды. Еще в большей степени это имеет место для суммы бесконечного ряда, составленного из величин вида (2).

## Ряд Фурье



Теперь естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию  $\varphi(t)$  периода  $T$  представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (2)? Как увидим ниже, по отношению к довольно широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, но только если привлечь именно всю бесконечную последовательность величин (2).

## Ряд Фурье

Для функций этого класса имеет место разложение в «тригонометрический ряд»:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (3)$$

причем  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_2$ , ... суть постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота  $\omega$  дается формулой (1).

Геометрически это означает, что *график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид*. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что здесь *сложное колебание, характеризуемое функцией  $\varphi(t)$ , разлагается на отдельные гармонические колебания*. В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения (3), называют *гармоническими составляющими* функции  $\varphi(t)$  или просто ее *гармониками* (первой, второй и т. д.). Самый же процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа*.

## Ряд Фурье

Если за независимую переменную выбрать

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

то получится функция от  $x$ :

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом  $2\pi$ . Разложение же (3) примет вид

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \dots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \quad (4)$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы и положив

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

мы приходим к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots = \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5)$$

## Ряд Фурье

$$A_0 + A_1 \sin(x) \cos(\alpha_1) + A_1 \cos(x) \sin(\alpha_1) + A_2 \sin(2x) \cos(\alpha_2) + A_2 \sin(\alpha_2) \cos(2x) + \dots =$$

Будем предполагать функцию  $f(x)$  интегрируемой в промежутке  $[-\pi, \pi]$  — в собственном или в несобственном смысле; в последнем случае мы дополнительно будем предполагать, что функция абсолютно интегрируема. Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно от  $-\pi$  до  $\pi$ ; мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right].$$

Но, как легко видеть,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, и окончательно найдем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

## Ряд Фурье

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right].$$

Первый член справа исчезает ввиду (6). Далее имеем [ср. 308, 4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0; \quad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = 0, \quad (9)$$

если  $n \neq m$ , и, наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} \, dx = \pi.$$

(10)  
Активаци  
Чтобы актив

## Ряд Фурье

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент  $a_m$ . Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (11)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$ .

Аналогично, умножая предварительно разложение (5) на  $\sin mx$  и затем интегрируя почленно, определим коэффициент при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (12)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$ .

## Ряд Фурье

Пусть в промежутке  $[a, b]$  дана какая-нибудь ортогональная система  $\{\varphi_n(x)\}$ . Зададимся целью разложить определенную в  $[a, b]$  функцию  $f(x)$  в «ряд по функциям  $\varphi$ » вида:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots \quad (22)$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская его возможность, поступим так, как мы это сделали в частном случае выше. Именно, умножив обе части разложения на  $\varphi_m(x)$ , проинтегрируем его почленно:

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx.$$



## Ряд Фурье

В силу ортогональности [см. (15) и (16)], все интегралы справа, кроме одного, будут нулями, и легко получается:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx. \quad (23)$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

[Формулы (7), (11), (12) являются частными случаями этой формулы.]

Ряд (22) с коэффициентами, составленными по формулам (23), называется *(обобщенным) рядом Фурье* данной функции, а сами коэффициенты — ее *(обобщенными) коэффициентами Фурье* относительно системы  $\{\varphi_n(x)\}$ . Особенно просто выглядят формулы (23) в случае нормальной системы; тогда

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (23^*)$$

$(m = 0, 1, 2, \dots).$

Конечно, здесь могут быть повторены те же замечания, какими мы закончили предыдущий п°. Обобщенный ряд Фурье, построенный для данной функции  $f(x)$ , связан с нею лишь формально. И в общем случае связь между функцией  $f(x)$  и ее (обобщенным) рядом Фурье обозначают так:

$$f(x) \sim \sum_n^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

## Ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \quad (8)$$

Его коэффициенты определяются формулами

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu \, du, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu \, du. \quad (9)$$

$(m=0, 1, 2, \dots)$                        $(m=1, 2, \dots)$

Если заменить теперь  $\cos mx$  и  $\sin mx$  их выражениями через показательную функцию от чисто мнимого аргумента [457]:

$$\cos mx = \frac{1}{2} (e^{mxi} + e^{-mxi}),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i} (e^{mxi} - e^{-mxi}) = \frac{i}{2} (e^{-mxi} - e^{mxi}),$$

то получится ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_m - b_m i) e^{mxi} + \frac{1}{2} (a_m + b_m i) e^{-mxi}.$$

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \quad (10)$$

## Ряд Фурье

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \quad (10)$$

полагая

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_m = \frac{1}{2} (a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2} (a_m + b_m i), \quad (11)$$

( $m = 1, 2, 3, \dots$ )

так что \*

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \quad (12)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье функции  $f(x)$* .

## Ряд Фурье

Коэффициенты  $c_m$  разложения (10), определяемые формулами (11), если учесть формулы Эйлера — Фурье (9), могут быть записаны единообразно:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nui} du. \quad (13)$$

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t1}^{t2=t1+T} s(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt.$$

Или в комплексной форме

$$s(t) = \sum c_n \exp(j2\pi f_n t),$$

## Ряд Фурье

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье сигнала в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов вида Рис. 1.5 – так называемого “меандра”

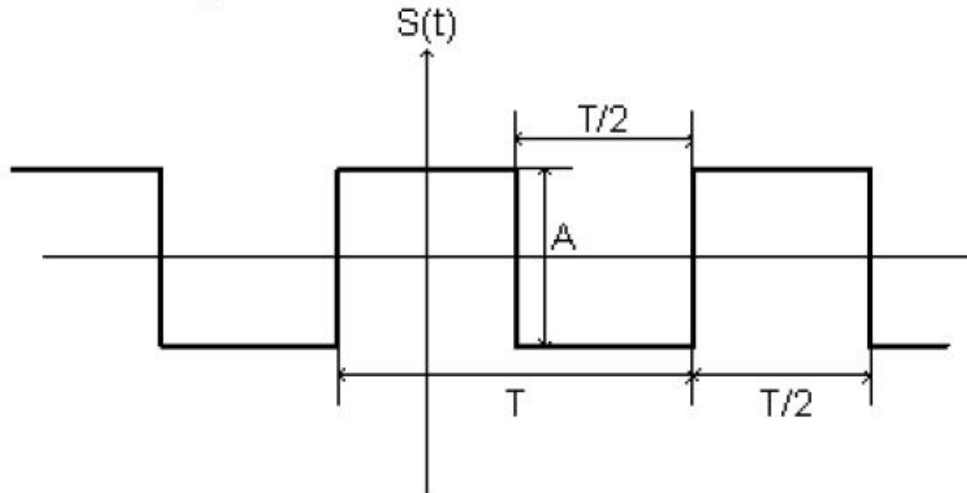


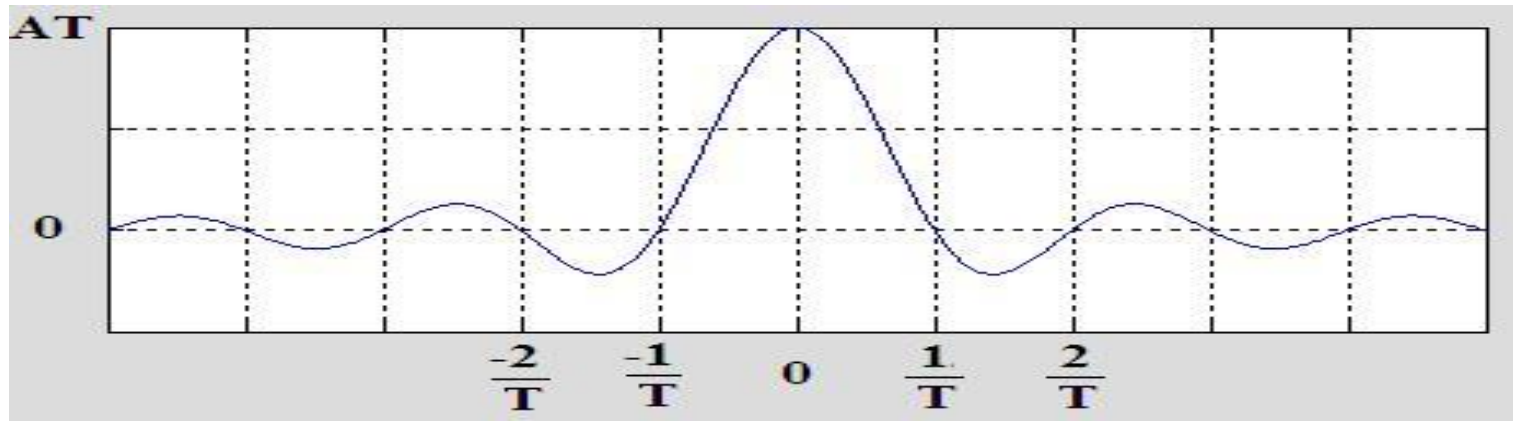
Рис. 1.5

## Ряд Фурье

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-2\pi ift} dt = \frac{A}{-2\pi if} \left[ e^{-2\pi ift} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{A}{-2\pi if} \left[ e^{-\pi ifT} - e^{\pi ifT} \right] = \frac{AT}{\pi fT} \left[ \frac{e^{\pi ifT} - e^{-\pi ifT}}{2i} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi fT} \sin(\pi fT) = AT [\text{sinc}(fT)]\end{aligned}$$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

## Ряд Фурье



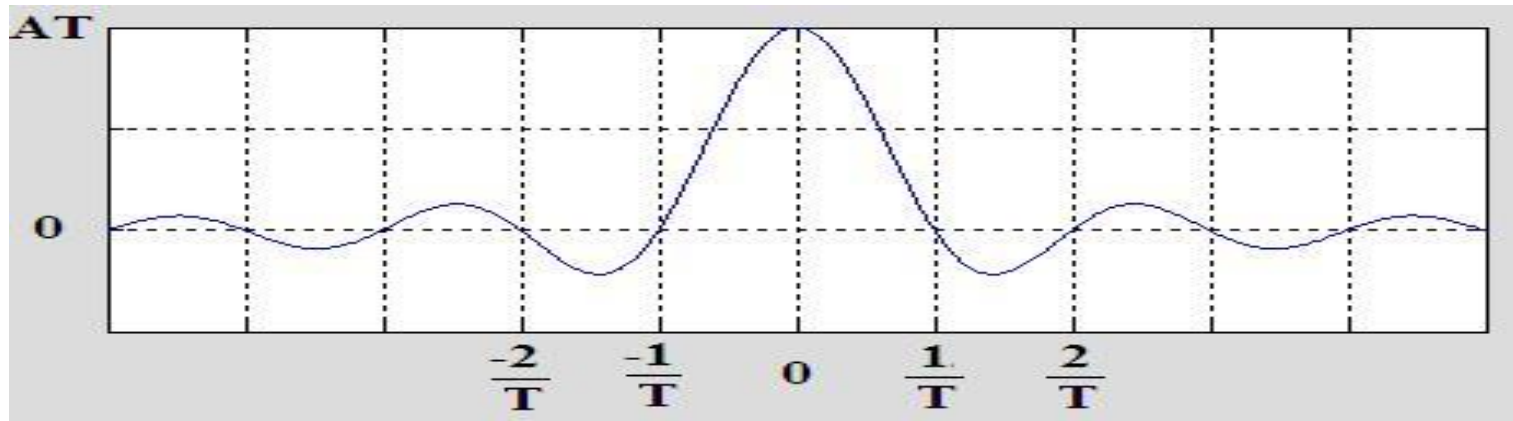
$$a_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_n t) dt = (1/T) \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(2\pi n t/T) dt = (2A/\pi n) \sin(\pi n/2) \quad (1.18)$$

Представление сигнала типа “меандр” в виде ряда Фурье с учетом этого можно записать следующим образом

$$s(t) = 2A/\pi \{ \cos(2\pi t/T) - 1/3 \cos(3 \cdot 2\pi t/T) + 1/5 \cos(5 \cdot 2\pi t/T) - \dots \}, \quad (1.19)$$

$$s(t) = c_0 + \sum a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t),$$

## Ряд Фурье



$$a_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_n t) dt = (1/T) \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(2\pi n t/T) dt = (2A/\pi n) \sin(\pi n/2) \quad (1.18)$$

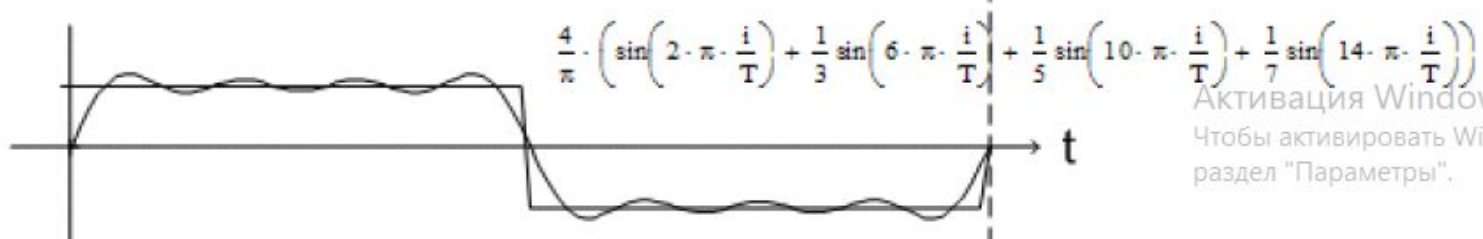
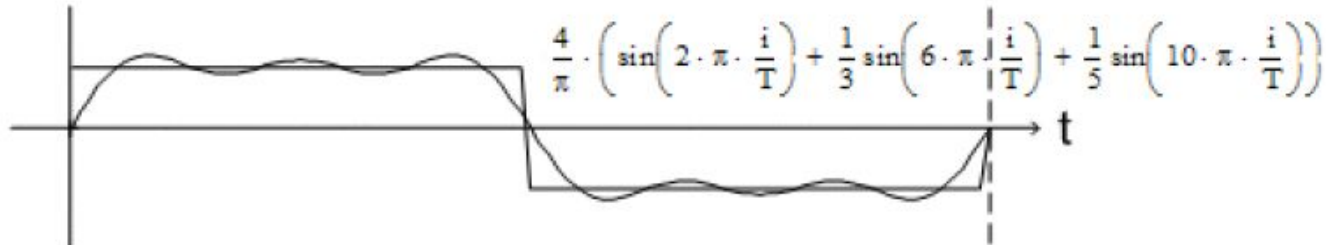
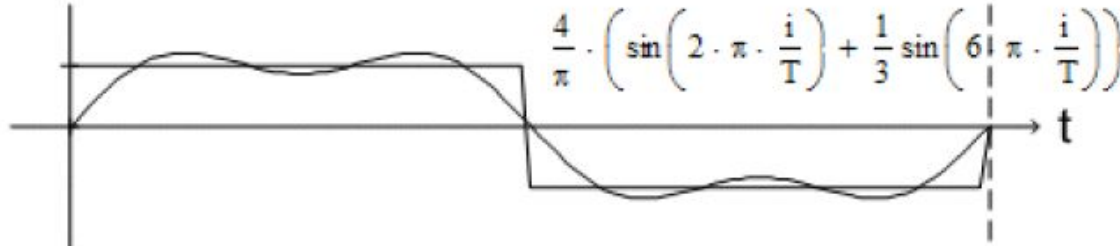
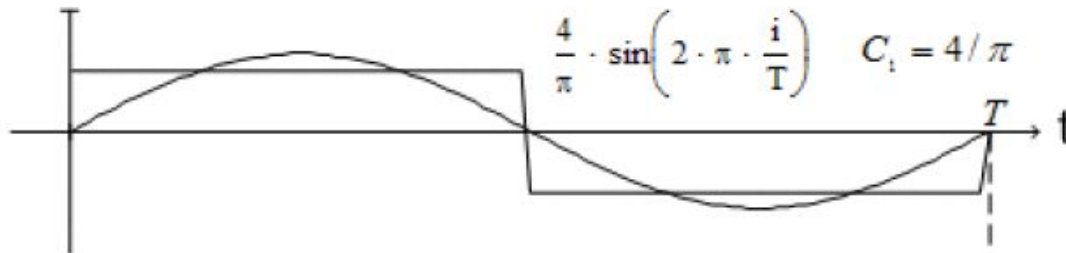
Представление сигнала типа “*меандр*” в виде ряда Фурье с учетом этого можно записать следующим образом

$$s(t) = 2A/\pi \{ \cos(2\pi t/T) - 1/3 \cos(3 \cdot 2\pi t/T) + 1/5 \cos(5 \cdot 2\pi t/T) - \dots \}, \quad (1.19)$$

$$s(t) = c_0 + \sum a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t),$$



## Ряд Фурье



Активация Windows:  
Чтобы активировать Windows, перейдите в раздел "Параметры".

## Ряд Фурье

Для непериодических сигналов конечной длительности  $s(t)$  используется другая форма разложения, при которой дискретность или шаг вычисления спектра стремится по величине к нулю и дискретный ряд Фурье переходит в интеграл Фурье или *преобразование Фурье*. Переход от ряда Фурье для периодического сигнала к интегралу Фурье для непериодического сигнала можно объяснить следующим образом. Любую финитную непериодическую функцию можно рассматривать как функцию периодическую, с периодом  $T = \infty$ . Тогда к ней можно применить разложение в ряд Фурье с дискретностью

## Ряд Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (1.20)$$

Это выражение представляет непериодическую функцию  $S(t)$ , как бесконечную сумму экспоненциальных функций  $\exp(2\pi ft)$  с частотами на интервале  $(-\infty < f < \infty)$  и весами, определяемыми для каждой частоты величиной  $S(f)$ , которая называется *функцией спектральной плотности* и имеет тот же смысл, что и коэффициенты  $c_n$  для ряда Фурье.

Функция спектральной плотности для интеграла Фурье определяется следующим образом

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (1.21)$$

## Ряд Фурье

Функция  $S(f)$  (спектральная плотность или просто *спектр*) является прямым преобразованием Фурье сигнала  $s(t)$ . Она характеризует амплитуды различных частотных составляющих, входящих в этот сигнал. Поэтому говорят, что функция  $S(f)$  является частотным представлением сигнала  $s(t)$ .

В свою очередь, временной сигнал  $s(t)$  может быть получен обратным преобразованием Фурье его спектра  $S(f)$ . Обе формы представления эквивалентны, поскольку могут быть получены друг из друга линейным преобразованием, хотя более привычной для нас и является временная форма представления сигнала – его задание значениями в различные моменты времени.

Символически, прямое и обратное преобразования Фурье часто обозначают, как

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] \quad \text{и} \quad s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)]. \quad (1.22)$$

## Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как мы показали, служит инструментом для представления функций времени через экспоненциальные (гармонические) составляющие с различными частотами. То есть возможны два равнозначных способа определения сигналов - во временной и частотной областях. Выясним, как влияют определенные действия, совершаемые над сигналом в одной области, на ее вид в другой области. К примеру – как, при изменении дли-

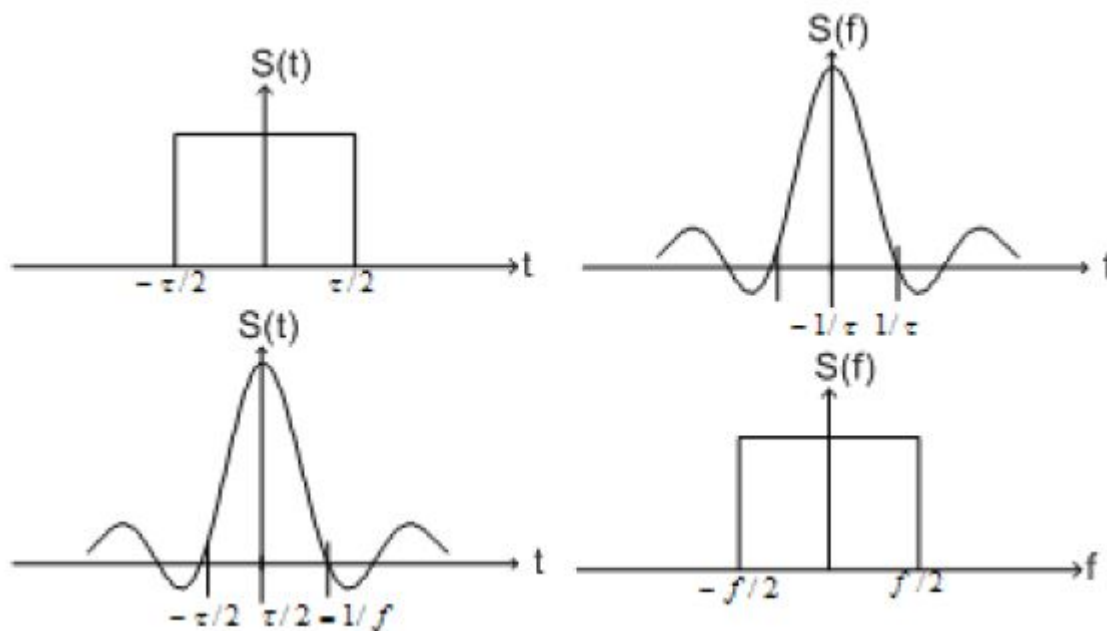
### *Свойство симметрии*

Свойство симметрии прямого и обратного преобразований Фурье можно сформулировать следующим образом:

*если  $s(t) = A(t)$  и соответствующий ему спектр  $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = B(f)$ ,*

*то сигналу  $s(t) = B(t)$  соответствует спектр  $S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = A(f)$ .*

## Свойства преобразования Фурье



## Свойства преобразования Фурье

### Свойство линейности

Свойство линейности преобразования Фурье можно сформулировать следующим образом: *спектр суммы сигналов равен сумме их спектров*, иными словами, если

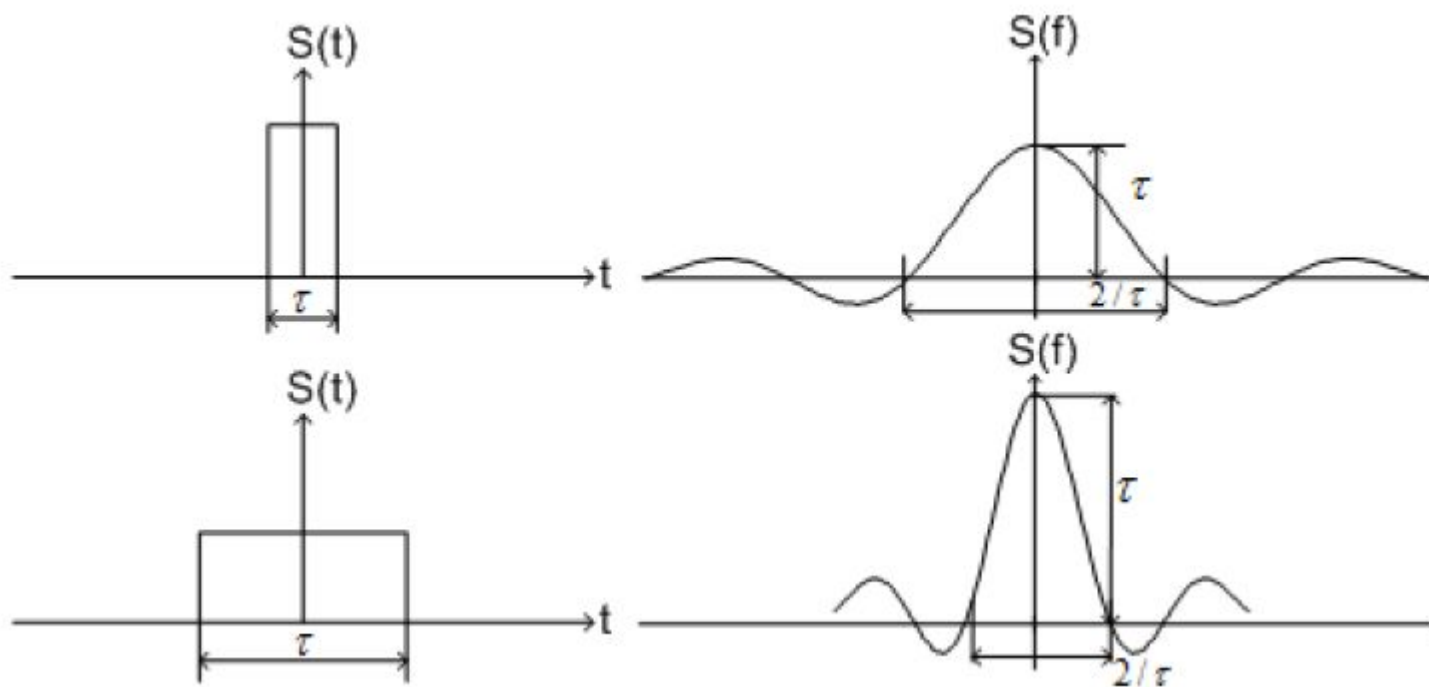
$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad \text{то} \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = a_1 \mathcal{F}[s_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[s_2(t)]$$

### Свойство изменения масштаба

Это свойство формулируется следующим образом:

$$\text{если} \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)], \quad \text{то} \quad \mathcal{F}[s(at)] = 1/a S(f/a).$$

## Свойства преобразования Фурье



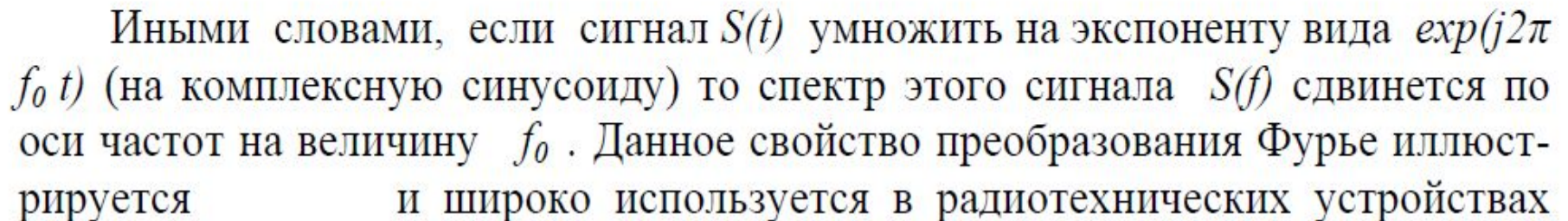


## Свойства преобразования Фурье

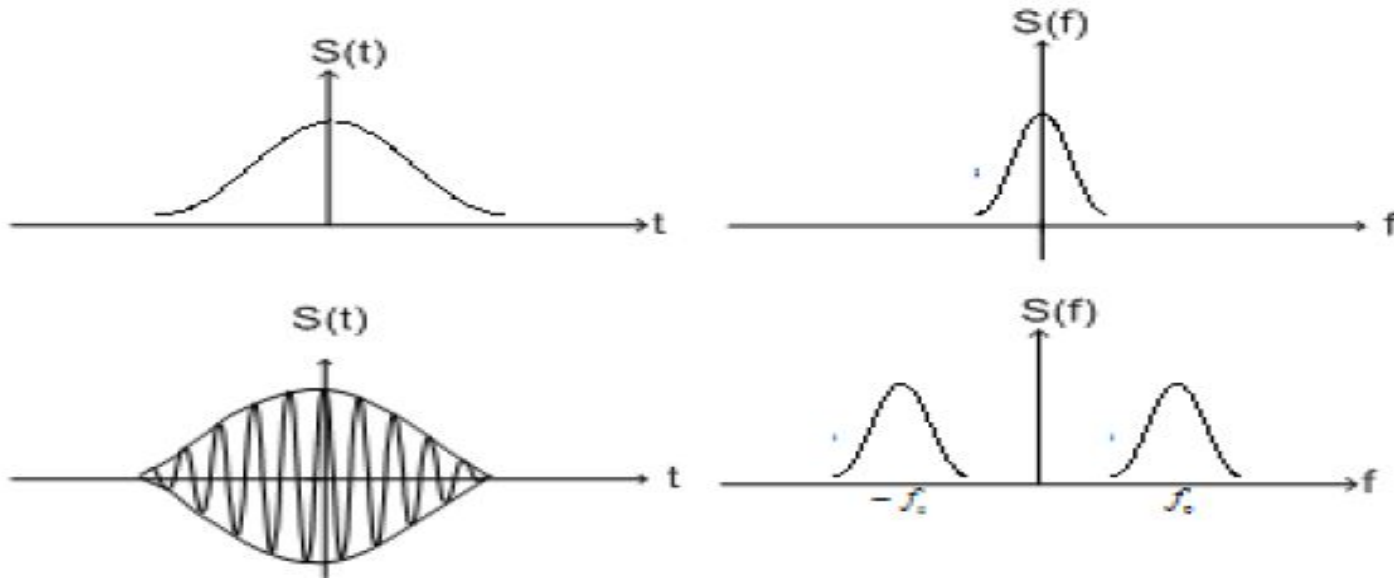
### Свойство частотного сдвига

Свойство частотного сдвига состоит в следующем:

$$\text{если } S(f) = \mathcal{F}[s(t)] \text{ то } \mathcal{F}[s(t)\exp(j2\pi f_0 t)] = S(f + f_0),$$

Иными словами, если сигнал  $S(t)$  умножить на экспоненту вида  $\exp(j2\pi f_0 t)$  (на комплексную синусоиду) то спектр этого сигнала  $S(f)$  сдвинется по оси частот на величину  $f_0$ . Данное свойство преобразования Фурье иллюстрируется  и широко используется в радиотехнических устройствах (преобразование частоты сигнала).

## Свойства преобразования Фурье



*Свойство временного сдвига*

$$\text{Если } \mathcal{F}[s(t)] = S(f) \text{ то } \mathcal{F}[s(t-\tau)] = S(f) \exp(-j2\pi f\tau)$$

То есть, при временном сдвиге сигнала его амплитудный спектр не изменяется, а фазовый спектр приобретает дополнительное слагаемое, линейно зависящее от частоты.

## Свойства преобразования Фурье

### *Теорема о свертке*

Свертка сигналов является очень часто используемым в радиотехнике интегральным преобразованием сигналов, поскольку она, в частности, описывает прохождение сигнала через линейную систему с постоянными параметрами (усилители, фильтры, дифференцирующие и интегрирующие звенья и т.п.). Операция свертки записывается следующим образом:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Символически свертка обозначается, как  $f(t) \otimes h(t)$ .

## Свойства преобразования Фурье

Таким образом, теорема о свертке может быть сформулирована примерно следующим образом: *свертке двух функций во временной области соответствует произведение спектров этих функций, и наоборот, свертке двух спектров соответствует произведение соответствующих им временных функций.*

В символах преобразования Фурье эта теорема может быть записана таким образом:

$$\mathcal{F}[s_1(t) \otimes s_2(t)] = \mathcal{F}[s_1(t)] \mathcal{F}[s_2(t)] = S_1(f) S_2(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[S_1(f) \otimes S_2(f)] = s_1(t) s_2(t) .$$