

Линейная алгебра

Основы матричной алгебры

Матрицы и векторы имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x' = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$$

Матричные операции

Пусть матрица $A(M \times N)$ умножается на матрицу $B(N \times K)$.

Результат – матрица C $C = A * B$

В покомпонентной записи:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^N a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Для того, чтобы умножить матрицу A на матрицу B необходимо, чтобы число столбцов матрицы A равнялось числу строк матрицы B .

Специальные операции

$$C_{i,j} = X_i \cdot Y_j$$

На Матлабе это выглядит как:

$$C = X * Y';$$

Здесь X и Y – вектор-столбцы

Аналогично выглядят операции:

$$C_{i,j} = X_i \pm Y_j$$

Задание

Дана покомпонентная запись. Записать в формате

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} K_{i,j} \cdot x_i \cdot y_j$$

Матлаба:

A – матрица, **x** и **y** – вектор-столбцы.

Записать в покомпонентной форме:

$$A \cdot x \cdot x' \cdot A' \quad x' \cdot A' \cdot A \cdot x$$

Какова размерность матрицы и векторов?

Что собой представляет результат?

Записать в формате
Матлаба: (j – мнимая
единица)

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{i \cdot k}{N}}$$

Логическая индексация массивов

Логические вектора, построенные с помощью логических выражений могут служить индексами при доступе к массивам.

Пусть

```
>>x=[1,2,3,4,5,6,7,8];
```

```
>>y=x(x>3)
```

```
Y= 4  5  6  7  8
```

Пусть функция задается разными выражениями при разных значениях аргумента:

$$y = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \sin(x), & x \in [-5, 1] \\ x^2 - 3, & x \in (1, 4] \\ \ln(x), & x > 4 \end{cases}$$

```
>> y=@(x)[0*x((x<-5)),sin(x(a1)),x(a2).^2-3,log(x(a3))]
```

```
>>x=-10:0.1:10;
```

```
>>plot(x,y(x))
```

Обратите внимание как записывается функция, равная нулю на некотором интервале. Как формируется функция из отрезков.

Постройте график этой функции.

Создание матриц с заданными свойствами

eye(n) – возвращает единичную матрицу размера $n \times n$; **eye(m,n)** – размера $m \times n$.

eye(size(A)) – возвращает единичную матрицу того же размера, что и **A**.

ones(n), ones(m,n), ones(size(A)) – возвращает матрицу, все элементы которой единицы.

zeros(n), zeros(m,n), zeros(size(A)) –

Функция **linspace** формирует *линейный массив равноотстоящих узлов*. Это подобно оператору **:**, но дает прямой контроль над числом точек. Применяется в следующих формах:

- **linspace(a,b)** – возвращает линейный массив из **100** точек, равномерно распределенных между **a** и **b**;
- **linspace(a,b,n)** – генерирует **n** точек, равномерно распределенных в интервале от **a** до **b**.

```
>> linspace(1,10,5)
```

```
ans =
```

```
1.0000 3.2500 5.5000 7.7500 10.0000
```

logspace(a,b) – возвращает вектор-

строку из **50** равноотстоящих в

логарифмическом масштабе точек

между декадами **10^a** и **10^b** ;

logspace(a,b,n) – возвращает **n** точек

между декадами **10^a** и **10^b** ;

```
>> logspace(1,10,5)
```

```
ans =
```

```
Columns 1 through 4:
```

```
10.00000    1778.27941
```

```
316227.76602  56234132.51903
```

```
Column 5:
```

```
100000000000.00000
```

Функция *rand* генерирует массивы случайных чисел, значения элементов которых *равномерно распределены* в промежутке *(0,1)*

Функция *randn* генерирует массив со случайными элементами, распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным 1.

randn(n), randn(m,n), randn(size(A))

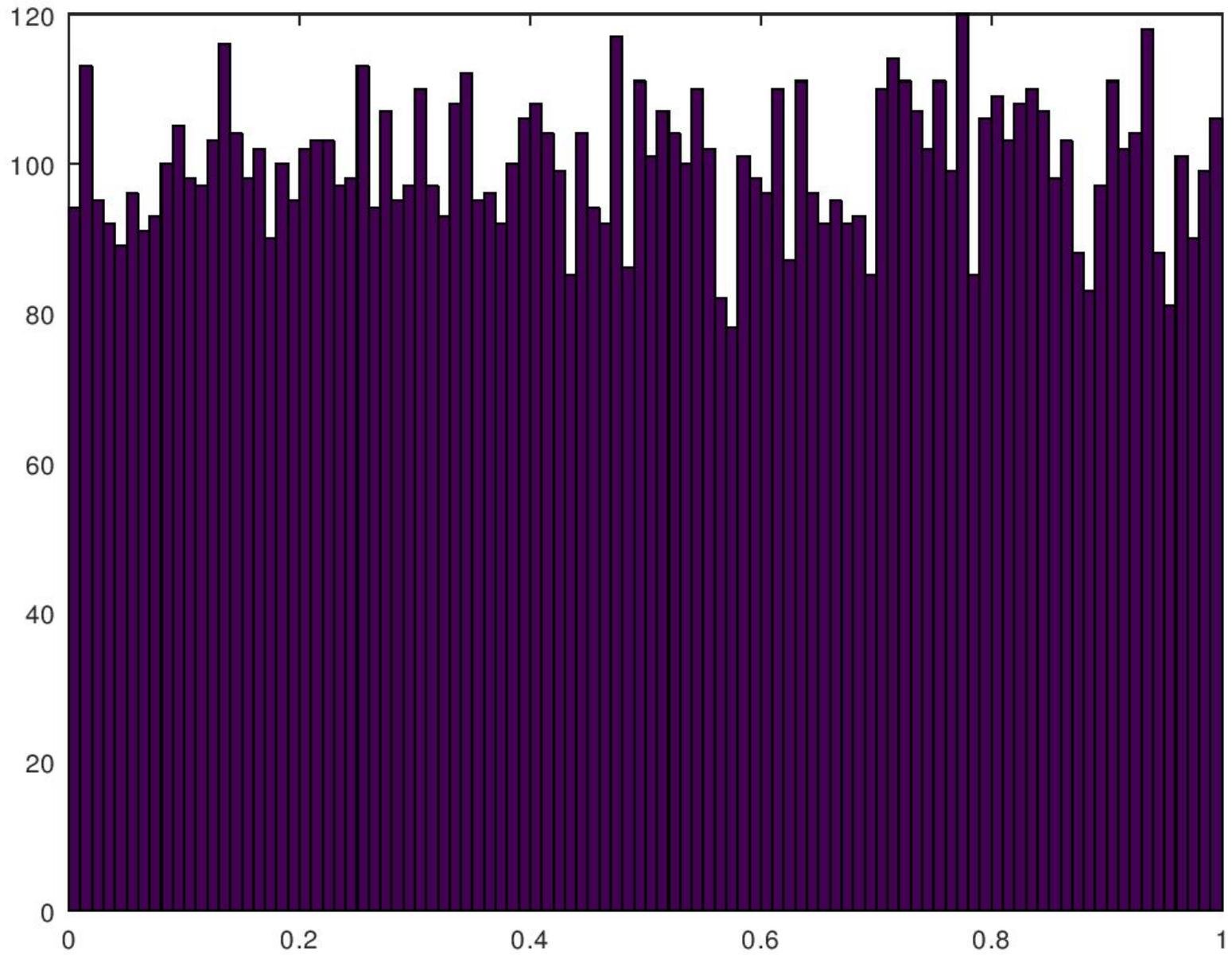
rand(n), rand(m,n), rand(size(A))

Проверить распределение случайных чисел можно, построив гистограмму распределения большого количества чисел.

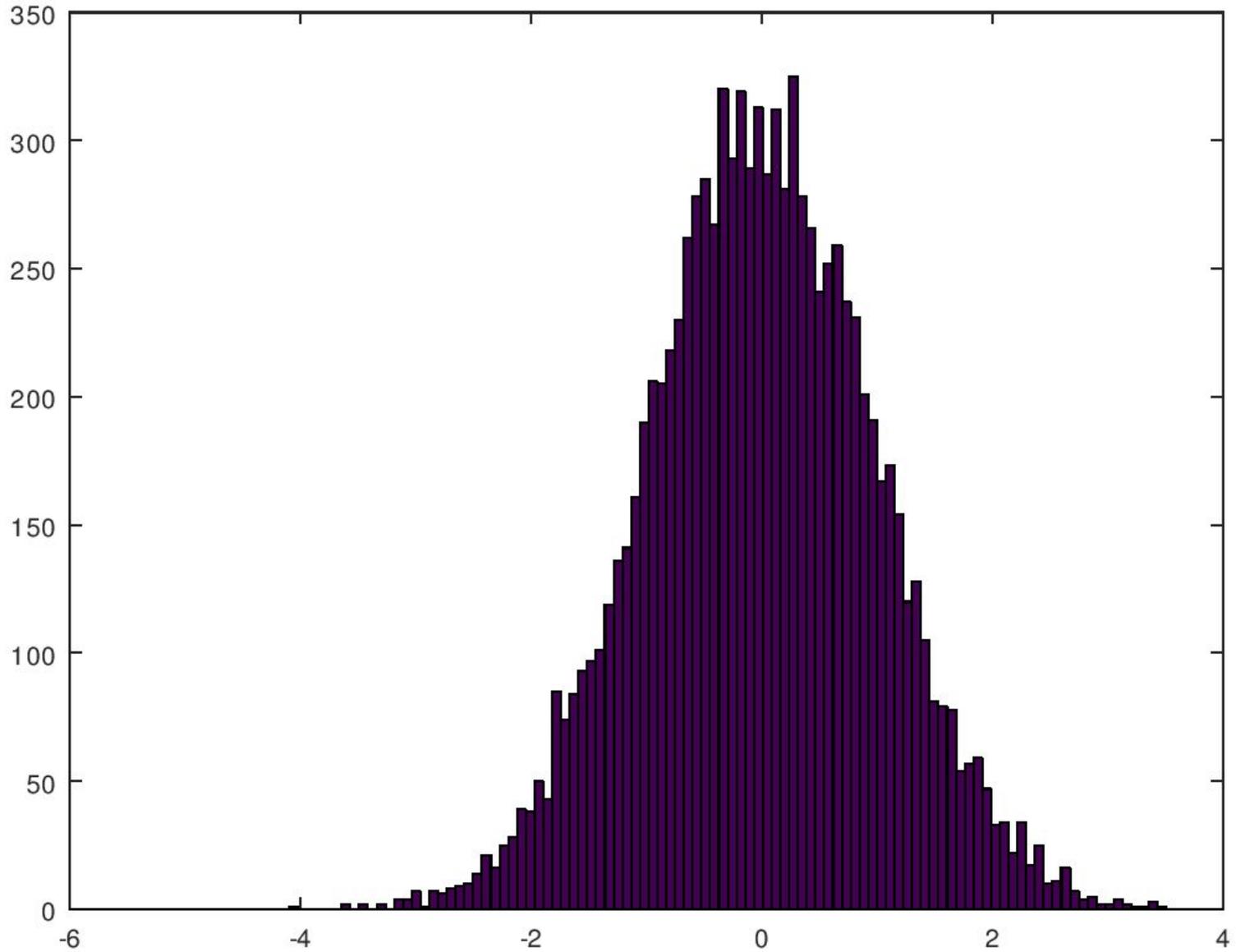
```
>> Y=rand(10000,1); hist(Y,100)
```

```
>> Y=randn(10000,1); hist(Y,100)
```

rand



randn



Конкатенация матриц

C = cat(dim,A,B) – объединяет массивы

A и **B** в соответствии со

спецификацией размерности **dim** и

возвращает объединенный массив;

dim=1 – горизонтальная конкатенация;

dim=2 – вертикальная конкатенация;

dim=3 – многомерный массив

размерности 3 и т.д.

$X = \text{diag}(v, k)$ – для вектора v ,
состоящего из n компонентов,
возвращает
квадратную матрицу X порядка
 $n + \text{abs}(k)$ с элементами v на k ой
диагонали, при $k=0$ это главная
диагональ (из левого верхнего угла
матрицы в правый нижний угол),
при $k>0$ – одна из диагоналей выше
главной диагонали, при $k<0$ – одна из
нижних диагоналей. Остальные
элементы матрицы – нули;

- **prod(A)** – возвращает произведение элементов массива, если **A** – вектор, или вектор-строку, содержащую произведения элементов каждого столбца, если **A** – матрица;
- **prod(A,dim)** – возвращает вектор (строку или столбец) с произведением элементов массива **A** по столбцам (**dim=1**), по строкам (**dim=2**).

Пример:

```
>> A=[1 2 3 4; 2 4 5 7; 6 8 3 4]
```

```
A =
```

```
1 2 3 4
```

```
2 4 5 7
```

```
6 8 3 4
```

```
>> B=prod(A)
```

```
B = 12 64 45 112
```

```
>> B=prod(A,2)
```

```
B = 24
```

```
280
```

```
576
```

- **sum(A)** – возвращает сумму элементов массива, если **A** – вектор, или вектор-строку, содержащую сумму элементов каждого столбца, если **A** – матрица;
- **sum(A,dim)** – возвращает сумму элементов массива по столбцам (**dim=1**), строкам (**dim=2**) или иным размерностям, в зависимости от значения скаляра **dim**.

```
>> X=[1 2;3 4]
```

```
X =
```

```
1 2
```

```
3 4
```

```
>> sum(X)
```

```
ans =
```

```
4 6
```

**Возможно создание *пустых*
матриц, например:**

```
>> M=[]
```

```
M = [](0x0)
```

```
>> M=[M [1,2;3,4]]
```

```
M =
```

```
 1  2
```

```
 3  4
```

Матричные функции

$\text{expm}(X)$ – возвращает $\text{exp}(X)$ от квадратной матрицы X .

$\text{sqrtm}(X), \text{logm}(X)$ – квадратный корень и логарифм от матрицы X .

Комплексный результат получается, если X имеет неположительные собственные значения. Пусть

$X = [1, 2; 3, 4]$;

Найти: $\text{exp}(X)$; $\text{expm}(X)$; $\text{sqrt}(X)$; $\text{sqrtm}(X)$;

Объяснить отличия.

```
>> S=[1,0,3;1,3,1;4,0,0]
```

```
>> a=expm(S)
```

```
a =
```

```
31.22028    0.00000    23.37787  
38.96594    20.08554    30.05928  
31.17049    0.00000    23.42766
```

```
>> b=logm(a)
```

```
b =
```

```
1.00000    0.00000    3.00000  
1.00000    3.00000    1.00000  
4.00000    0.00000   -0.00000
```

Умножение матриц

$$C_{i,k} = \sum_{j=1}^N A_{i,j} \cdot B_{j,k} \rightarrow C = A * B;$$

Это запись в Матлабе

$$C_{i,j} = X_i \otimes Y_j \rightarrow C = X \otimes Y';$$

Если X вектор – столбец

Y вектор – столбец

\otimes – любой оператор : + – *

$$\sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i \rightarrow X' * Y$$

Скалярное произведение

Вычисление нормы и чисел обусловленности матрицы

Норма вектора X (или, точнее, его p -норма) задается выражением и вычисляется функцией $\text{norm}(x,p)$.

Заметим, что $\text{norm}(x,2)=\text{sqrt}(x'*x)$

$$\|X\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Пусть A – матрица. Тогда $n = \text{norm}(A)$ эквивалентно $n = \text{norm}(A, 2)$ и возвращает вторую норму, то есть самое большое сингулярное число матрицы A .

$$n = \text{norm}(A, 1) = \max_i \sum_j |A_{i,j}|$$

$$n = \text{norm}(A, \text{inf}) = \max_j \sum_i |A_{i,j}|$$

В общем случае p -норма матрицы A вычисляется как $\max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

```
>> A=[2,3,1;1,9,4;2,6,7]
```

```
A =
```

```
 2  3  1
```

```
 1  9  4
```

```
 2  6  7
```

Проверьте!

```
>> norm(A)
```

```
ans = 13.735
```

```
>> norm(A,1)
```

```
ans = 18
```

```
>> norm(A,Inf)
```

```
ans = 15
```

Число обусловленности матрицы определяет чувствительность решения системы линейных уравнений к погрешностям исходных данных. Следующая функция позволяет найти число обусловленности матриц:

cond(X) – возвращает число обусловленности, основанное на второй норме.

$$\text{cond}(A) = (\max \|Ax\| / \|x\|) / (\min \|Ax\| / \|x\|)$$

```
>> A=hilb(4)
```

```
A =
```

1.00000	0.50000	0.33333	0.25000
0.50000	0.33333	0.25000	0.20000
0.33333	0.25000	0.20000	0.16667
0.25000	0.20000	0.16667	0.14286

```
>> cond(A)
```

```
ans = 15513.73874
```

Для нахождения определителя (детерминанта) и ранга матриц в MATLAB имеются следующие функции:

- **det(X)** – возвращает определитель квадратной матрицы **X**. Если **X** содержит только целые элементы, то результат – тоже целое число.

Использование **det(X)=0** как теста на вырожденность матрицы действительно только для матрицы малого порядка с

Ранг матрицы определяется количеством **сингулярных чисел, превышающих порог **tol**.**

Для вычисления ранга

используется функция **rank:**

$\text{rank}(A)$ – возвращает количество

****сингулярных** чисел, которые**

являются

большими, чем заданный по

умолчанию допуск;

$\text{rank}(A, \text{tol})$ – возвращает количество

****сингулярных** чисел, которые**

```
>> A=hilb(11);
```

```
>> rank(A)
```

```
ans = 10
```

```
>> cond(A)
```

```
ans = 5.2237e+14
```

Вычисление **ортонормированного** базиса матрицы обеспечивают следующие функции:

- **$V = \text{orth}(A)$** – возвращает ортонормированный базис матрицы **A**. Столбцы **V** определяют то же пространство, что и столбцы матрицы **A**, но столбцы **V** ортогональны, то есть **$V' * V = \text{eye}(\text{rank}(A))$** . Количество столбцов матрицы **V** равно рангу матрицы **A**.

Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Задача на собственные значения для
квадратной матрицы имеет вид:

$$A\psi = \lambda\psi$$

Или в покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} \psi_{j,k} = \lambda_k \psi_{i,k}$$

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором, образует линейное подпространство.

Если вектора x_1, x_2, \dots, x_n являются собственными и относятся к разным собственным значениям, то векторы x_1, x_2, \dots, x_n – линейно независимы.

Матрица A приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис в n -мерном пространстве, состоящий из собственных векторов. Факторизация матрицы A — матричное представление уравнения на собственные значения. Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений; Ψ – матрица собственных векторов.

$$A\Psi = \Psi\Lambda \rightarrow A = \Psi\Lambda\Psi^{-1} \quad \text{Факторизация матрицы}$$

Матрица **A** называется неотрицательно определенной, если $X^H A X \geq 0$ Для любого вектора **X**

Матрица **A** называется симметрической, если: $A^H = A$ (**n** – символ эрмитова транспонирования, т.е. транспонирования и комплексного сопряжения. **В Матлабе символ '.**)
Для симметрической и неотрицательно определенной матрицы собственные вектора –

$[V, \lambda] = \text{eig}(A)$ – вычисление матрицы собственных векторов (V) и диагональной матрицы собственных значений (λ) от матрицы A
 $\gg [V,D]=\text{eig}(A2)$

1	2	3	V =		
4	5	6	-0.231971	-0.785830	0.408248
7	8	9	-0.525322	-0.086751	-0.816497
			-0.818673	0.612328	0.408248

$\gg \text{diag}(D)$ **Каков ранг этой матрицы?**

ans =

1.6117e+01 -1.1168e+00 -1.3037e-15

>> V'*V

ans =

1.0000e+00 -2.7343e-01 5.5511e-17
-2.7343e-01 1.0000e+00 -9.9920e-16
5.5511e-17 -9.9920e-16 1.0000e+00

**Матрица A2 – не симметрическая и
не является неотрицательно
определенной, поэтому
собственные вектора не
ортономированные**

Теплицева матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$$

На всех диагоналях одинаковые значения

`toeplitz (c)`

`toeplitz (c, r)`

**Возвращает матрицу Теплица
созданную из вектора *c* (в первом
случае).**

**Во втором случае верхняя
треугольная из вектора *c*, а нижняя
треугольная из вектора *r*.**

Создадим матрицу $K_{i,j} = \rho^{(i-j)^2}$, $i, j \in \overline{0, n-1}$

```
>> r=0.9;
```

```
>> n=5;a=(0:n-1).^2;
```

```
>> c=r.^a;
```

```
>> K=toeplitz (c)
```

```
K =
```

1.00000	0.90000	0.65610	0.38742	0.18530
0.90000	1.00000	0.90000	0.65610	0.38742
0.65610	0.90000	1.00000	0.90000	0.65610
0.38742	0.65610	0.90000	1.00000	0.90000
0.18530	0.38742	0.65610	0.90000	1.00000

Найдем собственные вектора и собственные значения этой матрицы

```
>> [V,D]=eig(K);
```

```
V =
```

```
-1.6166e-01  3.8166e-01  5.7288e-01 -5.9526e-01  3.8168e-01  
4.9416e-01 -5.9526e-01 -1.7637e-01 -3.8166e-01  4.7402e-01  
-6.7775e-01  7.8822e-16 -5.3048e-01  1.9868e-17  5.0916e-01  
4.9416e-01  5.9526e-01 -1.7637e-01  3.8166e-01  4.7402e-01  
-1.6166e-01 -3.8166e-01  5.7288e-01  5.9526e-01  3.8168e-01
```

```
>> diag(D)'
```

```
ans =
```

```
0.00057261  0.01525073  0.18139281  1.14334725  3.65943661
```

```
>> V'*V
```

```
ans =
```

```
1.0000e+00  1.1102e-16  6.9389e-17 -4.1633e-17 -9.0206e-17  
1.1102e-16  1.0000e+00 -1.6653e-16  5.5511e-17  5.5511e-17  
6.9389e-17 -1.6653e-16  1.0000e+00 -1.1102e-16  5.5511e-17  
-4.1633e-17  5.5511e-17 -1.1102e-16  1.0000e+00 -2.2204e-16  
-5.5511e-17  5.5511e-17  2.7756e-17 -2.2204e-16  1.0000e+00
```

Так как эта теплицева матрица симметрическая и неотрицательно определенная, то собственные векторы ортогональны.

Скорость выполнения

Файл test1

```
A=rand(1000,1000);
```

```
B=rand(1000,1000);
```

```
for i=1:1000
```

```
    for j=1:1000
```

```
        A(i,j)=A(i,j).^B(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

Файл test2

```
A=rand(1000,1000);
```

```
B=rand(1000,1000);
```

```
A=A.^B;
```

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
for i=1:1000
    for j=1:1000
        A(i,j)=A(i,j).^B(i,j);
    end
end
-----
>> clear
>> tic,test1,toc
Elapsed time is 25.106
seconds.
```

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
A=A.^B;
-----
-
>> clear
>> tic,test2,toc
Elapsed time is
0.224 seconds.
Выигрыш во
времени
выполнения 100
раз!
```

Тест в MatLab 7.5.0

```
>> clear
```

```
>> tic,test1,toc
```

```
Elapsed time is 0.340472 seconds.
```

```
>> clear
```

```
>> tic,test2,toc
```

```
Elapsed time is 0.254457 seconds.
```

**В Матлабе интерпретатор
оптимизирован лучше, чем в Octave.**

Запрограммировать на матлабе:

Пусть A и B – квадратные матрицы,
имеющие обратные.

Записать на Матлабе задачу на
обобщенные собственные значения
(использовать `eig()`)

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot X_{j,k} = \lambda_k \sum_{i=1}^N B_{i,j} \cdot X_{j,k}$$

$$A=[1,2;2,3] \quad B=[25,5.5;5.5,121]$$