Cap. 7 Aproximarea numerică a funcţiilor

7.4 Derivarea numerică

- fie funcţia $f:[a,b]\rightarrow\Re,\ a,b\in\Re,\ f=f(x)$ şi divizarea Δ a intervalului [a, b]:

$$\Delta_{[a,b]}: a\le x_0<\cdots<x_i<\cdots<x_n\le b$$

- notaţie: $f_i=f(x_i),\ i=0,\ldots,n$

- problema *derivării numerice* → aproximarea valorilor derivatelor funcţiei f:

$$f'(x^*), f''(x^*),\ldots\quad \forall x^*\in[a,b]$$

utilizând setul de valori:

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}\qquad \{x_i\}_{i=0,\ldots,n},\ x_i\in[a,b],\ i=0,\ldots,n$$

- soluţia → se determină o funcţie de tip polinomial care aproximează f

↓

se evaluează derivata sa în diverse puncte din intervalul [a, b]

- aplicabil primele două derivate → *dacă datele sunt afectate de eroare (de exemplu, zgomot de măsură), atunci operaţia de derivare tinde să amplifice aceste erori*.

7.4.1 Derivarea numerică bazată pe interpolarea Lagrange

- $L(x)$ - polinomul Lagrange care interpolează funcţia $f(x)$

$$f(x) \cong L(x) = \sum_{i=0}^{n} \{[\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}] \cdot f_i\} = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f_i$$

derivata de ordin 1

$$f'(x) \cong L'(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i'(x) \cdot f_i$$

$$L_i'(x) = [\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)}] \cdot \{\sum_{k=0}^{n} [\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i;\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)]\}$$

derivata de ordin 2

$$f''(x) \cong L''(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i''(x) \cdot f_i$$

$$L_i''(x) = [\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)}] \cdot \{\sum_{k=0}^{n} [\sum_{l=0}^{n} (\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i;\ j\neq k;\ j\neq l}}^{n} (x - x_j))]\}$$

METODE NUMERICE – curs 11

7.4.2 Formule de derivare numerică bazate pe interpolarea cu funcţii spline cubice

- fie $s_\Delta(x)$ - funcţia spline cubică naturală care interpolează funcţia f
- pentru $x^* \in [a, b]$ $\rightarrow$ $f'(x^*) \cong s'_\Delta(x^*)$

trebuie identificat intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ unde se află argumentul x^*

$$s_\Delta(x)\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

$$f'(x^*) \cong s'_\Delta(x^*)\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = 3 \cdot a_i \cdot (x^* - x_i)^2 + 2 \cdot b_i \cdot (x^* - x_i) + c_i$$

$$f'(x_i) \cong c_i$$

$$f''(x^*) \cong s''_\Delta(x^*)\big|_{[x_i, x_{i+1}]} = 6 \cdot a_i \cdot (x^* - x_i) + 2 \cdot b_i, \quad f''(x_i) \cong 2 \cdot b_i$$

- pentru aproximarea derivatelor de ordin superior, se folosesc funcţii spline de ordin mai mare decât 3 pentru aproximarea funcţiei f

7.5 Cuadratura numerică

- funcţia $f:[a,b]\to\Re,\ f=f(x)$, cunoscută prin intermediul setului de puncte:

$$\{x_i, f_i\}_{i=0,\dots,n},\quad f_i=f(x_i) \qquad a=x_0<x_1<\dots<x_i<x_{i+1}<\dots<x_n=b$$

- *problema de calculul* $\to$ determinarea valoarii integralei definite $I(f)=\int_a^b f(x)\cdot dx$

$$I(f)=\sum_{i=0}^{n-1} I_i(f),\quad I_i(f)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot dx,\quad i=0,\dots,n-1$$

- *spre deosebire de operaţia de derivare numerică, cuadratura tinde să "netezească" sau să diminueze erorile ce afectează datele.*

Definiţii:

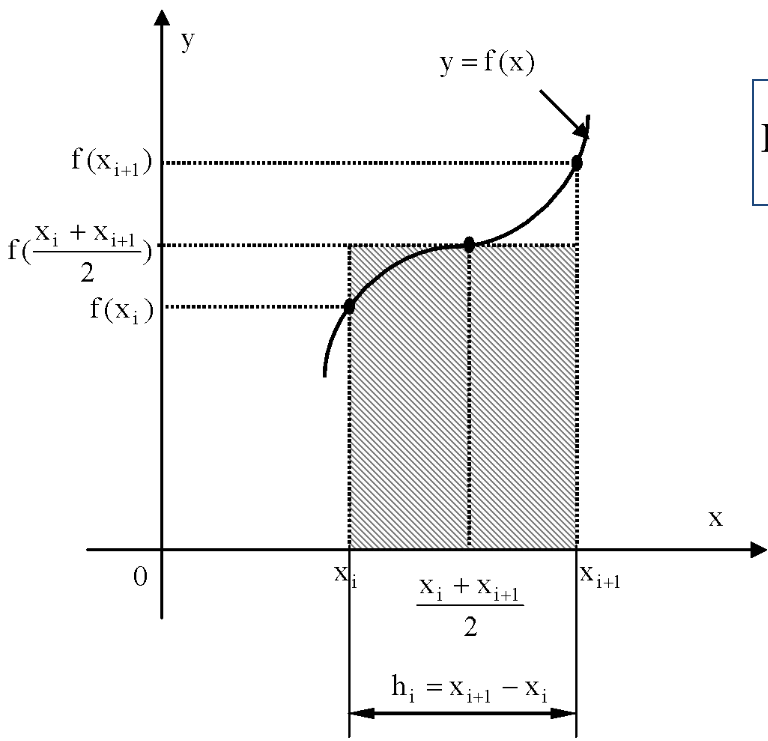
✧ *Se numeşte regulă (elementară) de cuadratură, o formulă simplă care aproximează valorile integralelor elementare .*

✧ *Se numeşte regulă compusă de cuadratură, o formulă care aproximează valoarea integralei definite , ca o sumă a regulilor (elementare) de cuadratură.*

7.5.1 Regula dreptunghiului

- funcţia f(x) este aproximată pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ printr-un polinom de gradul zero:

$$f(x) \cong f((x_i + x_{i+1})/2)$$



$$\boxed{I_i(f) \cong D_i(f) = h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0, \ldots, n-1}$$

$$\boxed{I(f) \cong D(f) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}$$

👉 f *nu este cunoscută analitic*

↓

se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$$

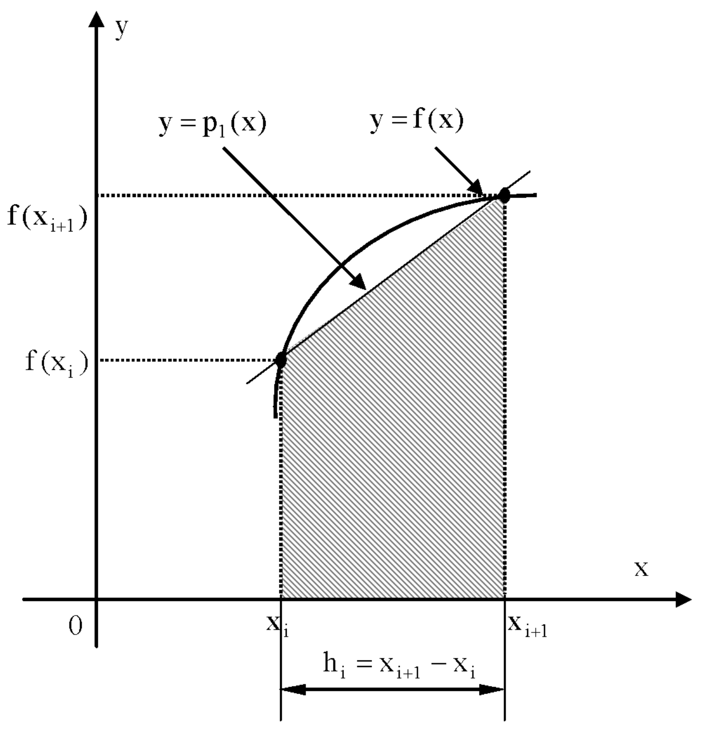
↓

$$D_i(f) = (x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot f(x_i)$$

$$e_D(f) = I(f) - D(f), \quad |\,e_D(f)\,| \le \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi), \ \xi \in (a,b)$$

7.5.2 Regula trapezului

- f aproximată printr-o dreaptă pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$



$$\boxed{I_i(f) \cong T_i(f) = h_i \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},\ i = 0, \ldots, n-1,}$$

$$\boxed{I(f) \cong T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} T_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.}$$

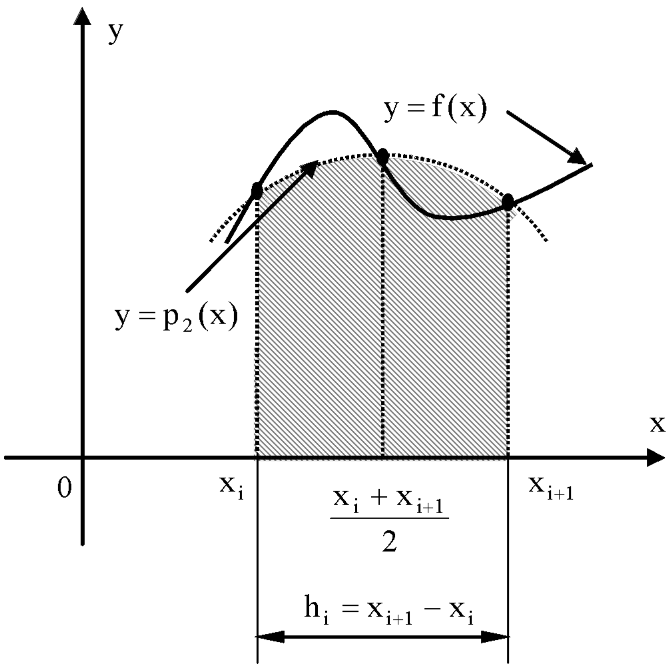
$$e_T(f) = I(f) - T(f)$$

$$|\, e_T(f)\,| \le \frac{b-a}{24} \cdot h^2 \cdot f''(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

7.5.3 Regula Simpson

 f aproximată printr-un polinom de gradul al doilea ce trece prin punctele:

$$\{x_i, f(x_i)\},\ \left\{\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right\},\ \{x_{i+1}, f(x_{i+1})\}$$



$$S_i(f) = \frac{1}{6} \cdot h_i \cdot \left[f(x_i) + 4 \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$I(f) \cong S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6} \cdot h_i \cdot \left[f(x_i) + 4 \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right].$$

$$e_S(f) = I(f) - S(f),\ |e_S(f)| \cong \frac{1}{2850} \cdot \sum_{i-0}^{n-1} h_i^5 \cdot f^{(4)}\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

METODE NUMERICE – curs 11

- f *nu este cunoscută analitic*

$\downarrow$

se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) \longrightarrow \boxed{S_i(f) = \frac{2}{3} \cdot D_i(f) + \frac{1}{3} \cdot T_i(f)}$$

- se consideră divizarea intervalului [a, b] ca fiind formată din puncte echidistante:

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

dezvoltări particulare:

- n - impar

regula 1/3 Simpson

$$S(f) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4 \cdot f_1 + f_2 + f_2 + 4 \cdot f_3 + f_4 + \ldots)$$
$$= \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 4 \cdot f_{n-3} + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n).$$

- n - par

regula 3/8 Simpson

$$S(f) = \frac{3 \cdot h}{8} \cdot (f_0 + 3 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + 3 \cdot f_4 + 3 \cdot f_5 + \ldots$$
$$+ 2 \cdot f_{n-3} + 3 \cdot f_{n-2} + 3 \cdot f_{n-1} + f_n).$$

7.5.4 Cuadratura bazată pe interpolarea cu funcţii spline cubice

- se utilizează rezultatele aproximării funcţiei f prin interpolare cu funcţii spline cubice (naturale)

$$I(f) = \int_a^b f(x)\cdot dx \cong \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}\cdot h_i^4\cdot a_i + \frac{1}{3}\cdot h_i^3\cdot b_i + \frac{1}{2}\cdot h_i^2\cdot c_i + h_i\cdot d_i\right]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i,\ \ i = 0,\ldots,n-1$$

👉 ţinând cont de expresiile coeficienţilor a_i, b_i, c_i, d_i:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \cong \sum_{i=0}^{n-1}\left[h_i\cdot\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} - h_i^3\cdot\frac{b_i+b_{i+1}}{12}\right]$$

faţă de formula trapezului, apare în plus termenul $h_i^3\cdot(b_i + b_{i+1})/12$

creşte precizia aproximării

METODE NUMERICE – curs 11

Cap. 8 Ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţii iniţiale

8.1 Formularea problemei

8.1.1 Ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi

- fie o funcţie reală de două variabile reale:

$$f = f(t, y(t))$$

$$y : [a,b] \to I \subseteq \Re, \quad f : [a,b] \times I \to R$$

$t \in [a,b]$ - *variabilă independentă*

$y = y(t)$ - *variabilă dependentă*

- se consideră <u>*ecuaţia diferenţială de ordinul întâi*</u> de forma:

problema Cauchy →

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) & (1) \\ y_0 = y(t_0), \quad t_0 \in [a,b],\ y_0 \in I \qquad t_0 = a & (2) \end{cases}$$

condiţia iniţială

- <u>Problema de calcul</u> $\rightarrow$ determinarea soluţiei (aproximative), y(t), a ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), pentru orice valoare a argumentului $t \in [a,b]$

Teoremă:

Fie ecuaţia (1) *şi condiţia iniţială* (2). *Dacă sunt îndeplinite condiţiile*:

- *funcţia* f *este continuă în raport cu argumentul* $t \in [a,b]$;
- *funcţia* f *este lipschitziană în raport cu argumentul* $y \in I$, *anume* $\exists L > 0$ *astfel încât este îndeplinită relaţia*:

$$\forall t \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in I, \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$$

atunci există şi este unică o soluţie a problemei Cauchy.

👉 metodele numerice de rezolvare a problemei Cauchy discretizează intervalul [a,b] într-o reţea de puncte distincte şi anume:

$$\Delta_{[a,b]}: \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots t_N = b$$

👉 prin anumite formule de recurenţă se calculează y_i, drept aproximaţii ale soluţiei exacte $y(t_i)$, având drept punct de start valoarea precizată y_0: $y(t_i) \cong y_i,\ i = \overline{1,N}$

$$\Downarrow$$

$\{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$ ⟵ *soluţia numerică a problemei Cauchy*

$h_i = t_{i+1} - t_i,\ i = 0,1,\ldots,N-1$ ⟵ *paşi de integrare*

$[t_0, t_N]$ ⟵ *pas de observare*

8.1.2 Ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior

👉 **ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul n**

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t),$$
$$a_i, b_0 \in \Re,\ i = 0,1,\dots,n; \quad a_n \neq 0 \qquad (3)$$

$y(t_0),\ y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0),\quad t_0 \in [a,b]$ ⟵ condiţiile iniţiale cunoscute

$u(t)$ ⟵ cunoscută analitic sau printr-un şir de valori

- pentru rezolvarea numerică a acestei ecuaţii $\rightarrow$ se transformă într-un sistem de n ecuaţii diferenţiale ordinare, fiecare ecuaţie fiind de ordinul întâi

$\downarrow$

metodele pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi se extind la cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale

👉 ecuaţia (3) se rescrie sub forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -\frac{a_0}{a_n}\cdot y(t) - \frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{dy(t)}{dt} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \frac{b_0}{a_n}\cdot u(t)$$

👉 notaţii:

$$\alpha_k = a_{n-k}/a_n,\ k = 1,\dots,n;\quad \beta_n = b_0/a_n$$

👉 se definesc urmoarele ***variabile de lucru***:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t) = \dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = \dfrac{dx_{n-1}(t)}{dt} = \dot{x}_{n-1}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -\alpha_n\cdot x_1(t) - \alpha_{n-1}\cdot x_2(t) - \cdots - \alpha_1\cdot x_n(t) + \beta_n\cdot u(t) \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = x_1(t)}$$

notaţii:

$$\begin{cases} g(t,x_1(t),\cdots,x_n(t)) = x_1(t); \quad f_i(t,x_1(t),\cdots,x_n(t)) = x_{i+1}(t), \ \ i = 1,\dots,n-1 \\ f_n(t,x_1(t),\cdots,x_n(t)) = -\alpha_n \cdot x_1(t) - \cdots - -\alpha_1 \cdot x_n(t) + \beta_n \cdot u(t) \\ \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T, \quad \underline{f}(t,\underline{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t,\underline{x}(t)) & \cdots & f_n(t,\underline{x}(t)) \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x}(t)), \\ y(t) = g(t,\underline{x}(t)), \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^{[0]} = \begin{bmatrix} x_1^{[0]} & \cdots & x_n^{[0]} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y(t_0) & \cdots & y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(3)

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}(t)}{dt} = A \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \\ y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t) \end{cases}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{bmatrix}^T, \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1xn}$$