

Cap. 7 Aproximarea numerică a funcțiilor

7.4 Derivarea numerică

□ fie funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f = f(x)$ și divizarea Δ a intervalului $[a, b]$:

$$\Delta_{[a, b]} : a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

□ notație: $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

□ problema *derivării numerice* → aproximarea valorilor derivatelor funcției f :

$$f'(x^*), f''(x^*), \dots \quad \forall x^* \in [a, b]$$

utilizând setul de valori:

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n} \quad \{x_i\}_{i=0, \dots, n}, \quad x_i \in [a, b], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

□ soluția → se determină o funcție de tip polinomial care aproximează f

↓

se evaluează derivata sa în diverse puncte din intervalul $[a, b]$

□ aplicabil primele două derivate → *dacă datele sunt afectate de eroare (de exemplu, zgomot de măsură), atunci operația de derivare tinde să amplifice aceste erori.*

7.4.1 Derivarea numerică bazată pe interpolarea Lagrange

□ $L(x)$ - polinomul Lagrange care interpolează funcția $f(x)$

$$f(x) \cong L(x) = \sum_{i=0}^n \left\{ \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] \cdot f_i \right\} = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f_i$$

derivata de ordin 1

$$f'(x) \cong L'(x) = \sum_{i=0}^n L'_i(x) \cdot f_i$$

$$L'_i(x) = \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_j)} \right] \cdot \left\{ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j) \right] \right\}$$

derivata de ordin 2

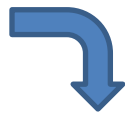
$$f''(x) \cong L''(x) = \sum_{i=0}^n L''_i(x) \cdot f_i$$

$$L''_i(x) = \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_j)} \right] \cdot \left\{ \sum_{k=0}^n \left[\sum_{l=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i; j \neq k; j \neq l}}^n (x - x_j) \right) \right] \right\}$$

7.4.2 Formule de derivare numerică bazate pe interpolarea cu funcții spline cubice

□ fie $s_{\Delta}(x)$ - funcția spline cubică naturală care interpolează funcția f

□ pentru $x^* \in [a, b] \rightarrow f'(x^*) \cong s'_{\Delta}(x^*)$



trebuie identificat intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ unde se află argumentul x^*



$$s_{\Delta}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

$$f'(x^*) \cong s'_{\Delta}(x^*)|_{[x_i, x_{i+1}]} = 3 \cdot a_i \cdot (x^* - x_i)^2 + 2 \cdot b_i \cdot (x^* - x_i) + c_i$$

$$f'(x_i) \cong c_i$$

$$f''(x^*) \cong s''_{\Delta}(x^*)|_{[x_i, x_{i+1}]} = 6 \cdot a_i \cdot (x^* - x_i) + 2 \cdot b_i, \quad f''(x_i) \cong 2 \cdot b_i$$

□ pentru aproximarea derivatelor de ordin superior, se folosesc funcții spline de ordin mai mare decât 3 pentru aproximarea funcției f

7.5 Cuadratura numerică

□ funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$, $f = f(x)$, cunoscută prin intermediul setului de puncte:

$$\{x_i, f_i\}_{i=0, \dots, n}, \quad f_i = f(x_i) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

□ *problema de calculul* → determinarea valorii integralei definite $I(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx$

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i(f), \quad I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot dx, \quad i = 0, \dots, n-1$$

□ spre deosebire de operația de derivare numerică, cuadratura tinde să “netezească” sau să diminueze erorile ce afectează datele.

Definiții:

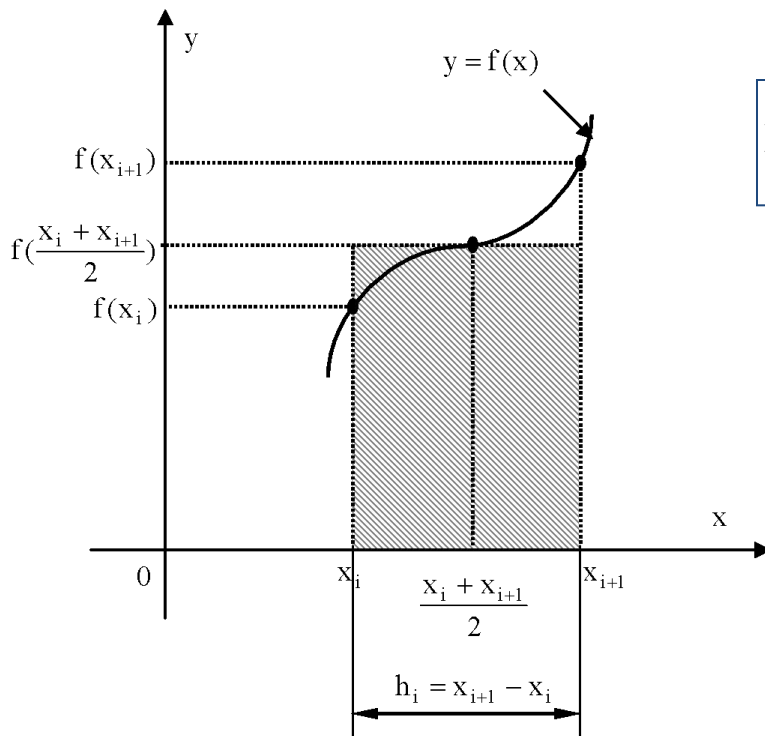
✧ Se numește regulă (elementară) de cuadratură, o formulă simplă care aproximează valorile integralelor elementare .

✧ Se numește regulă compusă de cuadratură, o formulă care aproximează valoarea integralei definite , ca o sumă a regulilor (elementare) de cuadratură.

7.5.1 Regula dreptunghiului

□ funcția $f(x)$ este aproximată pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ printr-un polinom de gradul zero:

$$f(x) \cong f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$



$$I_i(f) \cong D_i(f) = h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$I(f) \cong D(f) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

☞ f nu este cunoscută analitic

↓
se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$$

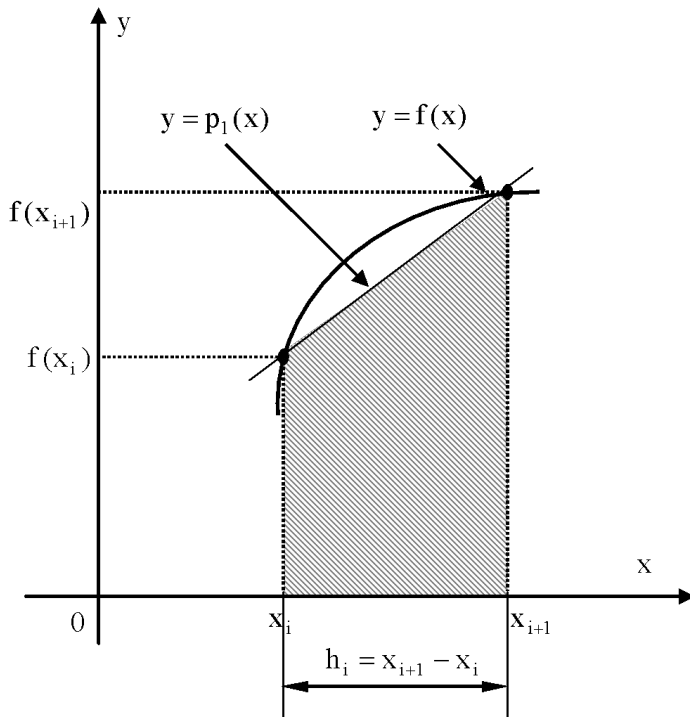
↓

$$D_i(f) = (x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot f(x_i)$$

$$e_D(f) = I(f) - D(f), \quad |e_D(f)| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

7.5.2 Regula trapezului

□ f aproximată printr-o dreaptă pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$



$$I_i(f) \cong T_i(f) = h_i \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

$$I(f) \cong T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} T_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.$$

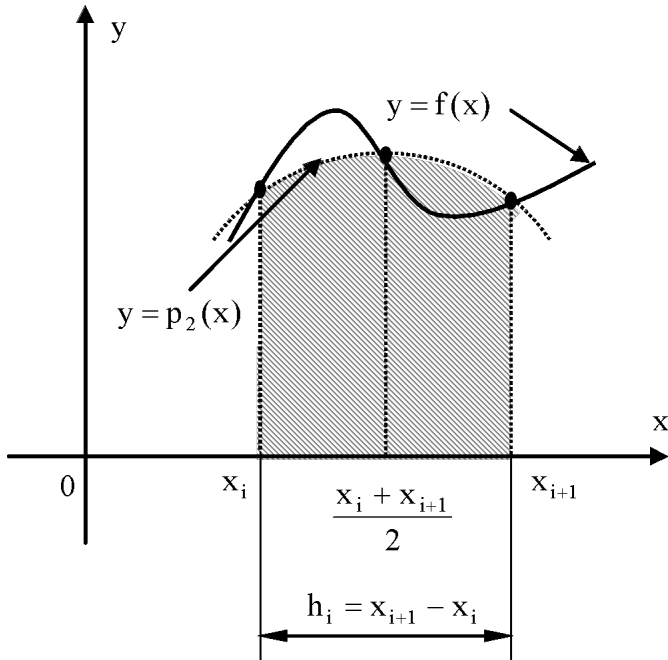
$$e_T(f) = I(f) - T(f)$$

$$|e_T(f)| \leq \frac{b-a}{24} \cdot h^2 \cdot f''(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

7.5.3 Regula Simpson

□ f aproximată printr-un polinom de gradul al doilea ce trece prin punctele:

$$\{x_i, f(x_i)\}, \left\{ \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right\}, \{x_{i+1}, f(x_{i+1})\}$$



$$S_i(f) = \frac{1}{6} \cdot h_i \cdot \left[f(x_i) + 4 \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right], \quad i = 0, \dots, n-1,$$

$$I(f) \cong S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6} \cdot h_i \cdot \left[f(x_i) + 4 \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right].$$

$$e_S(f) = I(f) - S(f), \quad |e_S(f)| \cong \frac{1}{2850} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} h_i^5 \cdot f^{(4)}\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

☞ f nu este cunoscută analitic



se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$$



$$S_i(f) = \frac{2}{3} \cdot D_i(f) + \frac{1}{3} \cdot T_i(f)$$

☞ se consideră divizarea intervalului $[a, b]$ ca fiind formată din puncte echidistante:

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$



dezvoltări particulare:

- n - impar

regula 1/3 Simpson

$$S(f) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4 \cdot f_1 + f_2 + f_2 + 4 \cdot f_3 + f_4 + \dots) \\ = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \dots + 4 \cdot f_{n-3} + 2 \cdot f_{n-2} + 4 \cdot f_{n-1} + f_n).$$

- n - par

regula 3/8 Simpson

$$S(f) = \frac{3 \cdot h}{8} \cdot (f_0 + 3 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + 3 \cdot f_4 + 3 \cdot f_5 + \dots \\ + 2 \cdot f_{n-3} + 3 \cdot f_{n-2} + 3 \cdot f_{n-1} + f_n).$$

7.5.4 Cuadratura bazată pe interpolarea cu funcții spline cubice

□ se utilizează rezultatele aproximării funcției f prin interpolare cu funcții spline cubice (naturale)

$$I(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{4} \cdot h_i^4 \cdot a_i + \frac{1}{3} \cdot h_i^3 \cdot b_i + \frac{1}{2} \cdot h_i^2 \cdot c_i + h_i \cdot d_i \right]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

👉 ținând cont de expresiile coeficienților a_i, b_i, c_i, d_i :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \left[h_i \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2} + h_i^3 \cdot \frac{b_i + b_{i+1}}{12} \right]$$

față de formula trapezului, apare în plus termenul $h_i^3 \cdot (b_i + b_{i+1})/12$

crește precizia
aproximării

Cap. 8 Ecuații diferențiale ordinare cu condiții inițiale

8.1 Formularea problemei

8.1.1 Ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi

- fie o funcție reală de două variabile reale:

$$f = f(t, y(t))$$

$t \in [a, b]$ - *variabilă independentă*

$$y : [a, b] \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}, \quad f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

$y = y(t)$ - *variabilă dependentă*

- se consideră ecuația diferențială de ordinul întâi de forma:

problema Cauchy

{

→

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y_0 = y(t_0), \quad t_0 \in [a, b], y_0 \in I \tag{2}$$

$t_0 = a$

condiția inițială

- Problema de calcul → determinarea soluției (aproximative), $y(t)$, a ecuației diferențiale (1), cu condiția inițială (2), pentru orice valoare a argumentului $t \in [a, b]$

Teoremă:

Fie ecuația (1) și condiția inițială (2). Dacă sunt îndeplinite condițiile:

- funcția f este continuă în raport cu argumentul $t \in [a, b]$
- funcția f este lipschitziană în raport cu argumentul $y \in I$, anume $\exists L > 0$ astfel încât este îndeplinită relația:

$$\forall t \in [a, b], \forall y_1, y_2 \in I, \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

atunci există și este unică o soluție a problemei Cauchy.

👉 metodele numerice de rezolvare a problemei Cauchy discretizează intervalul $[a, b]$ într-o rețea de puncte distincte și anume:

$$\Delta_{[a, b]} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_N = b$$

👉 prin anumite formule de recurență se calculează y_i , drept aproximații ale soluției exacte $y(t_i)$, având drept punct de start valoarea precizată y_0 : $y(t_i) \cong y_i, i = \overline{1, N}$



$\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ ← soluția numerică a problemei Cauchy

$h_i = t_{i+1} - t_i, i = 0, 1, \dots, N-1$ ← pași de integrare

$[t_0, t_N]$ ← pas de observare

8.1.2 Ecuații diferențiale ordinare de ordin superior

👉 ecuații diferențiale ordinare de ordinul

n

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t), \quad (3)$$

$$a_i, b_0 \in \mathfrak{R}, i = 0, 1, \dots, n; \quad a_n \neq 0$$

$y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0), \quad t_0 \in [a, b]$ ← condițiile inițiale cunoscute

$u(t)$ ← cunoscută analitic sau printr-un șir de valori

- pentru rezolvarea numerică a acestei ecuații → se transformă într-un sistem de n ecuații diferențiale ordinare, fiecare ecuație fiind de ordinul întâi



metodele pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi se extind la cazul sistemelor de ecuații diferențiale

👉 ecuația (3) se rescrie sub forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = -\frac{a_0}{a_n} \cdot y(t) - \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{dy(t)}{dt} - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \frac{b_0}{a_n} \cdot u(t)$$



$$\alpha_k = a_{n-k} / a_n, k = 1, \dots, n; \quad \beta_n = b_0 / a_n$$

notații:

👉 se definesc urmatoarele variabile de lucru:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = \dot{x}_{n-1}(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -\alpha_n \cdot x_1(t) - \alpha_{n-1} \cdot x_2(t) - \dots - \alpha_1 \cdot x_n(t) + \beta_n \cdot u(t) \end{array} \right.$$

$$y(t) = x_1(t)$$

notații:

$$\begin{cases} g(t, \underline{x}(t)) = x_1(t); & f_i(t, \underline{x}(t)) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ f_n(t, \underline{x}(t)) = -\alpha_n \cdot x_1(t) - \dots - \alpha_1 \cdot x_n(t) + \beta_n \cdot u(t) \\ \underline{x}(t) = [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T, & \underline{f}(t, \underline{x}(t)) = [f_1(t, \underline{x}(t)) \quad \dots \quad f_n(t, \underline{x}(t))]^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}(t)), \\ y(t) = g(t, \underline{x}(t)), \end{cases}$$

(3)

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}^{[0]} = [x_1^{[0]} \quad \dots \quad x_n^{[0]}]^T = [y(t_0) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0)]^T$$

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \\ y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t) \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\underline{b} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \beta_n]^T, \quad \underline{c}^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{1 \times n}$$