Задание 4.
Проектировочный расчёт на прочность вала при изгибе с кручением

Задание и варианты

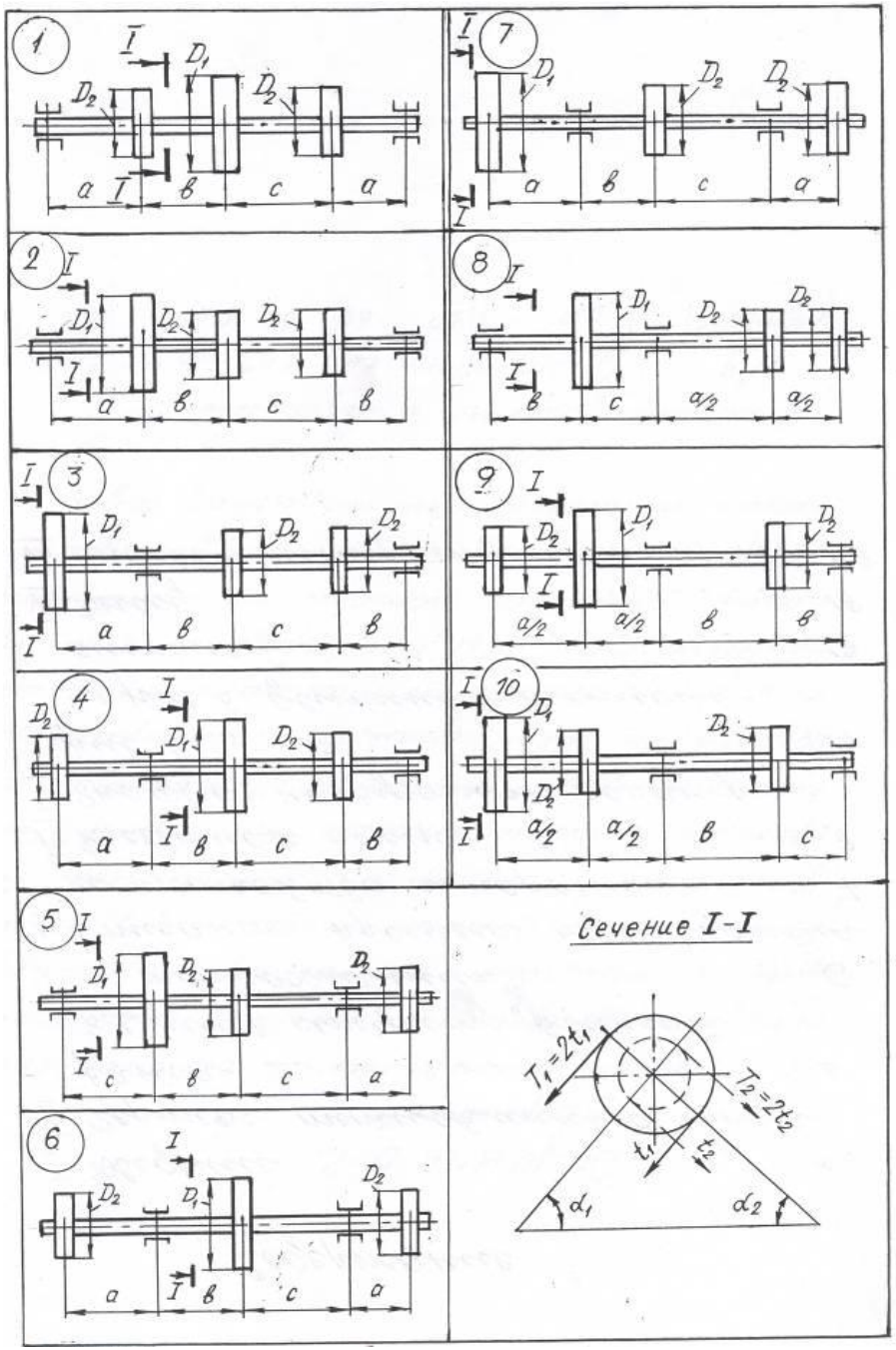
Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность P кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2, и каждый из них передает мощность $P/2$.

Требуется:

1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным P и n;
2) построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$;
3) определить окружные усилия t_1 и t_2, действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2;
4) определить усилия давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и от вертикальных сил $M_{верт}$;
7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$
8) (для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости $M_{изг}$ всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);
9) по третьей теории прочности подобрать диаметр вала при $[\sigma] = 70$ МПа, округляя его до большего значения из стандартного ряда;

Схемы вала приведены на рис. 1, индивидуальный вариант схемы выбирается по последней цифре зачётной книжки. Числовые данные приведены в табл. 1, индивидуальный вариант выбирается по предпоследней цифре зачётной книжки.

№ варианта	Мощность ***P***, кВт	Число оборотов, ***n***, об/мин	Угол наклона, α_1, град	Угол наклона, α_2, град	Размер, м				
					a	***в***	***c***	D_1	D_2
1	10	1000	10	80	1,0	1,9	1,8	1,7	0,6
2	20	900	70	20	1,2	1,7	1,8	1,6	0,7
3	30	800	30	60	1,1	1,8	1,9	1,5	0,8
4	40	700	50	40	1,3	1,6	1,5	1,4	0,9
5	50	600	40	50	1,4	1,5	1,7	1,3	1,0
6	60	500	60	30	1,5	1,4	1,6	1,2	0,9
7	70	400	20	70	1,6	1,3	1,5	1,1	0,8
8	80	300	80	10	1,7	1,2	1,4	1,0	0,7
9	90	200	90	10	1,8	1,1	1,3	0,9	0,6
10	100	100	10	70	1,9	1,0	1,2	0,8	0,5


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Сечение I-I
$T_1=2t_1$
$T_2=2t_2$
t_1
t_2
α_1
α_2

Пример расчета вала на изгиб с кручением

Расчётная схема вала ременной передачи, показана на рис. 2, произвести расчёт по условию предыдущего задания.

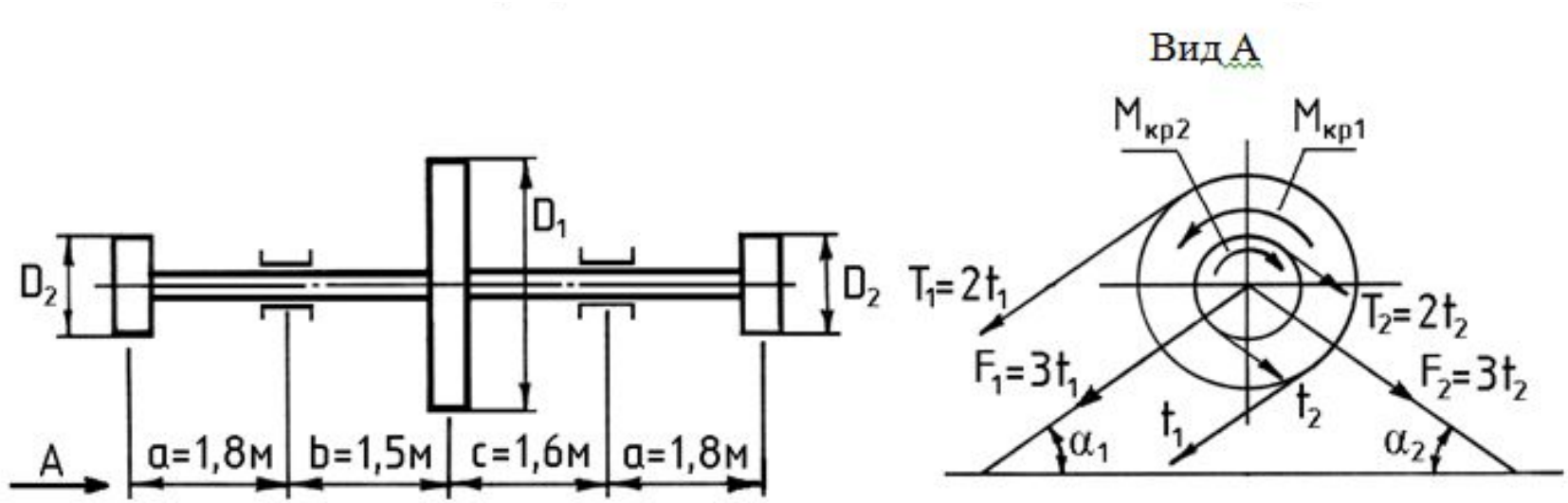


Рис. 2. Расчётная схема

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность P кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2, и каждый из них передает мощность $P/2$.

Требуется:

1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным P и n;
2) построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$;
3) определить окружные усилия t_1 и t_2, действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2;
4) определить усилия давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и от вертикальных сил $M_{верт}$;
7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой

$$M_{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$$

8) (для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости $M_{изг}$ всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);
9) по третьей теории прочности подобрать диаметр вала при $[\sigma] = 70$ МПа, округляя его до большего значения из стандартного ряда;

Исходные данные: $P = 50$ кВт; $n = 600$ об/мин; $D_1 = 1{,}5$ м; $D_2 = 0{,}6$ м; $\alpha_1 = 50°$; $\alpha_2 = 60°$; $a = 1{,}8$ м; $b = 1{,}5$ м; $c = 1{,}6$ м; $[\sigma] = 70$ МПа.

Решение:

1) Определяем крутящие моменты, приложенные к шкивам:

$$M_{кр1} = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 600} = 795{,}8\,Н \cdot м \approx 0{,}796\,кН \cdot м,$$

где $\omega = \pi n/30$ – угловая скорость вращения вала.

Учитывая, что шкивы меньшего диаметра передаётся мощность $P/2$, получим:

$$M_{кр2} = \frac{M_{кр1}}{2} = 0{,}398\ кН{\cdot}м.$$

2) По полученным значениям строим эпюру $M_{кр}$ (рис. 7.14).

На первом участке: $M_{кр\,1} = 0{,}398$ кН·м;

на втором участке: $M_{кр\,2} = -0{,}796 + 0{,}398 = -0{,}398$ кН·м.

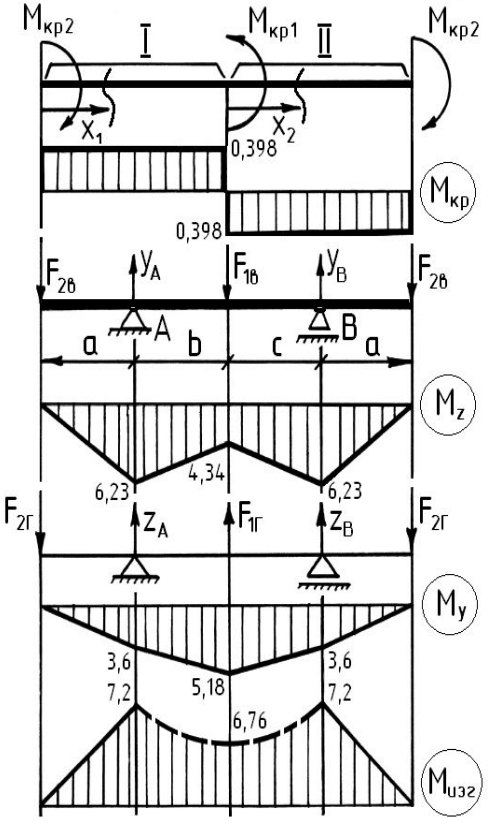


Рис. 7.14. Эпюры моментов

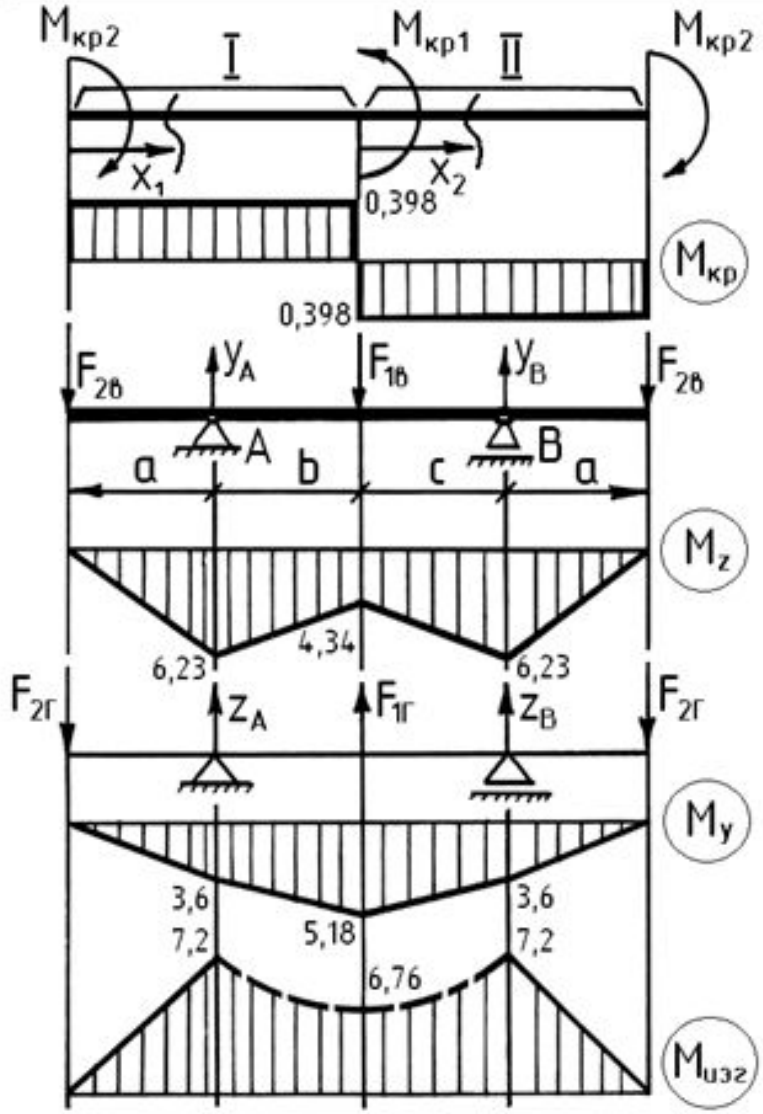


Рис. 7.14. Эпюры моментов

3) Определяем окружные усилия, действующие на шкивы, из соотношения:

$$M_{кр} = t\frac{D}{2}.$$

Получим:

$$t_1 = \frac{2M_{кр1}}{D_1} = \frac{2\cdot 0{,}796}{1{,}5} = 1{,}06 кН;$$

$$t_2 = \frac{2M_{кр2}}{D_2} = \frac{2\cdot 0{,}398}{0{,}6} = 1{,}33 кН.$$

4) Определяем усилия давления на вал в местах установки шкивов:

$F_1 = 3t_1 = 3\cdot 1{,}06 = 3{,}18$ кН; $F_2 = 3t_2 = 3\cdot 1{,}33 = 3{,}99$ кН.

5) Определяем проекции полученных сил на горизонтальную и вертикальную плоскости:

$$F_{1в} = F_1 \sin\alpha_1 = 3{,}18 \sin 50^0 = 2{,}44 кН;$$

$$F_{1г} = F_1 \cos\alpha_1 = 3{,}18 \cos 50^0 = 2{,}04 кН;$$

$$F_{2в} = F_2 \sin\alpha_2 = 3{,}99 \sin 60^0 = 3{,}46 \text{ кН};$$

Определяем реакции опор в вертикальной плоскости:

$$\sum M_A = 0: \quad y_B(b+c) + F_{2в}a - F_{2в}(b+c+a) - F_{1в}b = 0;$$

$$y_B = \frac{F_{2в}(b+c) + F_{1в}b}{b+c} = \frac{3{,}46 \cdot 3{,}1 + 2{,}44 \cdot 1{,}5}{3{,}1} = 4{,}64 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_{2в}(a+b+c) - F_{2в}a + F_{1в}c - y_A(b+c) = 0;$$

$$y_A = \frac{F_{2в}(b+c) + F_{1в}c}{b+c} = \frac{3{,}46 \cdot 3{,}1 + 2{,}44 \cdot 1{,}6}{3{,}1} = 4{,}72 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum Y = 0$:

$$y_A + y_B - F_{2в} - F_{2в} - F_{1в} = 4{,}72 + 4{,}64 - 3{,}46 - 3{,}46 - 2{,}44 = 9{,}36 - 9{,}36 = 0.$$

В горизонтальной плоскости:

$$\sum M_A = 0: \quad z_B(b+c) + F_{1г}b + F_{2г}a - F_{2г}(a+b+c) = 0;$$

$$z_B = \frac{F_{2г}(b+c) - F_{1г}b}{b+c} = \frac{2 \cdot 3{,}1 - 2{,}04 \cdot 1{,}5}{3{,}1} = 1{,}01 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -z_A(b+c) - F_{1г}c - F_{2г}a + F_{2г}(a+b+c) = 0;$$

$$z_A = \frac{F_{2г}(b+c) - F_{1г}c}{b+c} = \frac{2 \cdot 3{,}1 - 2{,}04 \cdot 1{,}6}{3{,}1} = 0{,}95 \text{ кН};$$

Проверка правильности определения реакций опор:

$$\sum Z = 0: \quad 1{,}01 + 0{,}95 + 2{,}04 - 2 \cdot 2 = 0.$$

6. Построение эпюр изгибающих моментов в вертикальной M_z и горизонтальной M_y плоскостях.

Определяем моменты в характерных сечениях (A, B, C).

В вертикальной плоскости:

$$M_z^A = M_z^B = F_{2в} = 3{,}46 \cdot 1{,}8 = 6{,}23\,\text{кН} \cdot \text{м},$$

$$M_z^C = F_{2в}(a+b) - y_a b = 3{,}46 \cdot 3{,}3 - 4{,}72 \cdot 1{,}5 = 4{,}34\,\text{кН} \cdot \text{м},$$

В горизонтальной плоскости:

$$M_y^A = M_y^B = F_{2г} a = 2 \cdot 1{,}8 = 3{,}6\ \text{кН·м};$$

$$M_y^C = F_{2г}(a+b) - z_A b = 2 \cdot 3{,}3 - 0{,}95 \cdot 1{,}5 = 5{,}18\ \text{кН·м}.$$

7. Для построения эпюры суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ вычисляем $M_{изг}$ в характерных сечениях:

$$M_{изг}^{A} = M_{изг}^{B} = \sqrt{\left(M_z^A\right)^2 + \left(M_y^A\right)^2} = \sqrt{6{,}23^2 + 3{,}6^2} = 7{,}2\,\text{кН·м};$$

$$M_{изг}^{C} = \sqrt{4{,}34^2 + 5{,}18^2} = 6{,}76\ \text{кН·м}.$$

На участках AC, CB эпюра – криволинейная, но точный вид линии в расчёте не важен, так как максимальные значения моментов будут в характерных сечениях.

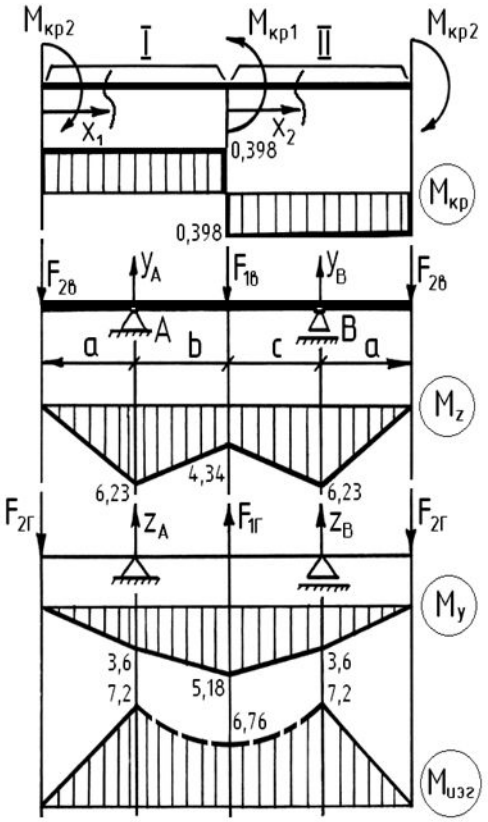


Рис. 7.14. Эпюры моментов

8. Опасными сечениями (равноопасными в данном случае) являются сечения A и B, в которых $M_{изг} = 7{,}2$ кН·м, $M_{кр} = 0{,}398$ кН м.

В опасной точке возникает плоское напряжённое состояние (рис. 7.15). Расчёт на прочность проводим по III-й теории прочности. Условие прочности по III-й теории:

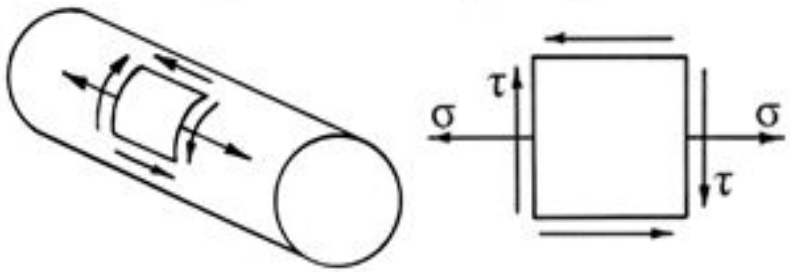


Рис. 7.15. Наряжённое состояние в опасной точке

$$\sigma_{экв.III} = \frac{M_{экв.III}}{W} \le [\sigma],$$

где момент сопротивления поперечного сечения изгибу

$$W = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$M_{экв.III} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{7{,}2^2 + 0{,}398^2} = 7{,}21 \text{ кН·м}.$$

Определяем диаметр поперечного сечения из условия прочности:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{экв.III}}{\pi\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7{,}21 \cdot 10^6}{3{,}14 \cdot 70}} = 102 \text{ мм}.$$

Округляем значение диаметра вала до стандартного ряда в большую сторону и окончательно принимаем $d = 120$ мм.