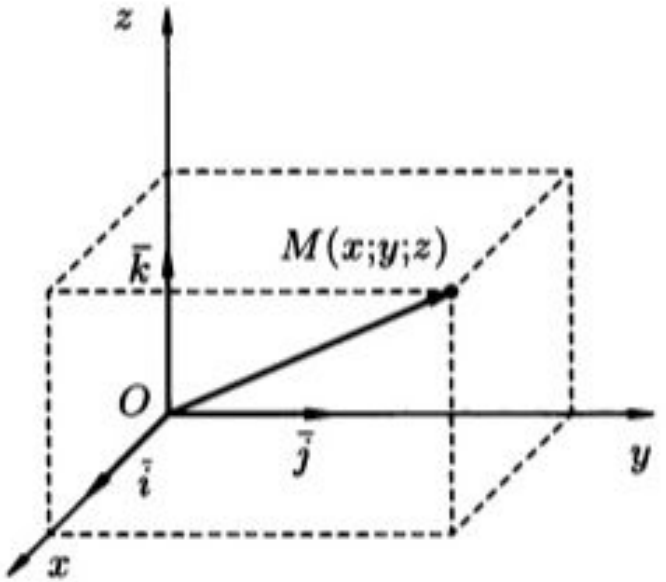
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

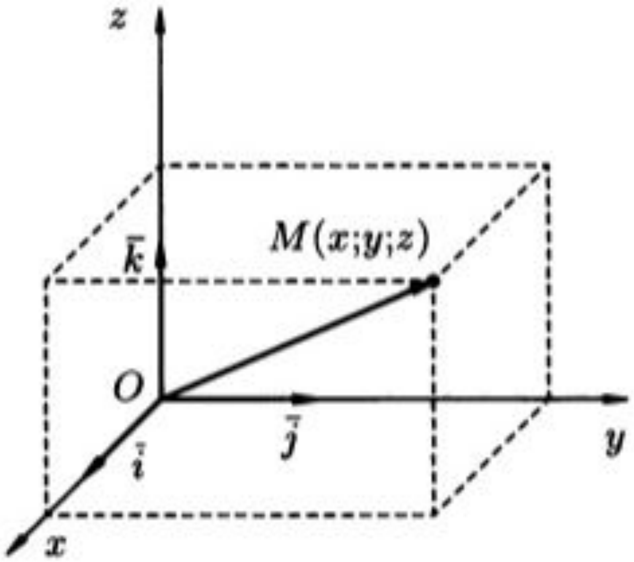
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямоугольная система координат. Основные задачи

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке O — *начале координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ox), другую — *осью ординат* (Oy), третью — *осью аппликат* (Oz). На каждой из осей выбраны *единичные векторы*, которые обозначают соответственно $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Если M — произвольная точка пространства, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.



⇒ *Координатами точки* M в системе координат $Oxyz$ называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$. Если $\overline{OM} = (x; y; z)$ то координаты точки M записывают так: $M(x; y; z)$; здесь число x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата* точки M. Каждой тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует одна и только одна точка пространства, и наоборот.



Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты $(x; y; z)$ *точки* M, *делящей в заданном отношении* λ $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}\right)$ *отрезок* AB, $(A(x_1; y_1; z_1),\ B(x_2; y_2; z_2))$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы для определения координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример 1. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(2;3;1)$ и $B(-1;5;-2)$.

Точка M, лежащая на оси Oy, имеет координаты $M(0;y;0)$. По условию задачи $|AM| = |BM|$. Найдем расстояния $|AM|$ и $|BM|$, используя формулу:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$|AM| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14}\,;$$

$$|BM| = \sqrt{(0+1)^2 + (y-5)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}\,.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}\,.$$

Отсюда находим, что $4y = 16$, т. е. $y = 4$. Искомая точка есть $M(0;4;0)$.

Пример 2. Отрезок AB разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2;4;1)$ и $B(2;-4;-3)$.

Обозначим точки деления отрезка AB в следующем порядке: C и D. По условию задачи $|AC| = |CD| = |DB|$. Поэтому точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}}$$

находим координаты точки C:

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \quad y_C = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$z_C = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Имеем, $C\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

По формулам $$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

находим координаты точки D — середины отрезка CB:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} = \frac{2}{3}, \quad y_D = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}, \quad z_D = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{2} = -\frac{5}{3},$$

т. е. точка D имеет координаты $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, ***сфера*** радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z — их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки M_1 в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют — не лежит.

Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу R, т. е. $O_1M = R$. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

или

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если центр сферы O_1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Если же дано уравнение вида $F(x; y; z) = 0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.

Выражение «вообще говоря» означает, что в отдельных случаях уравнение $F(x;y;z)=0$ может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается».

Так, уравнению $2x^2+y^2+z^2+1=0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0\cdot x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y=0$, $z=0$, а x — любое число).

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически. Отсюда вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Найти уравнение этой поверхности.

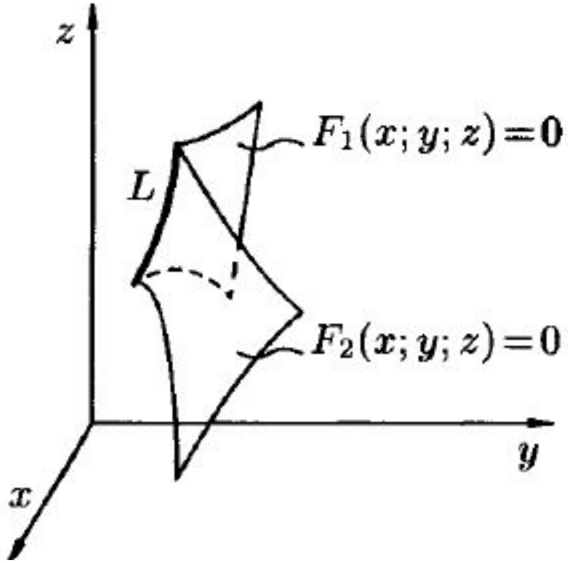
2. Дано уравнение $F(x;y;z)=0$. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x;y;z)=0$ и $F_2(x;y;z)=0$ — уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

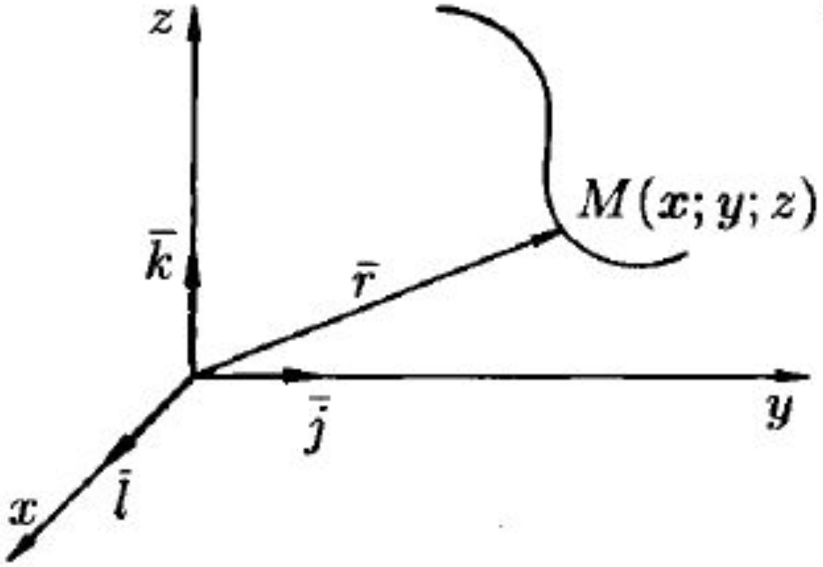
$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0. \end{cases}$$



Уравнения системы называются ***уравнениями линии в пространстве***. Например, $\begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases}$ есть уравнения оси Ox.

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки. В этом случае ее задают *векторным уравнением*

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$



или *параметрическими уравнениями*

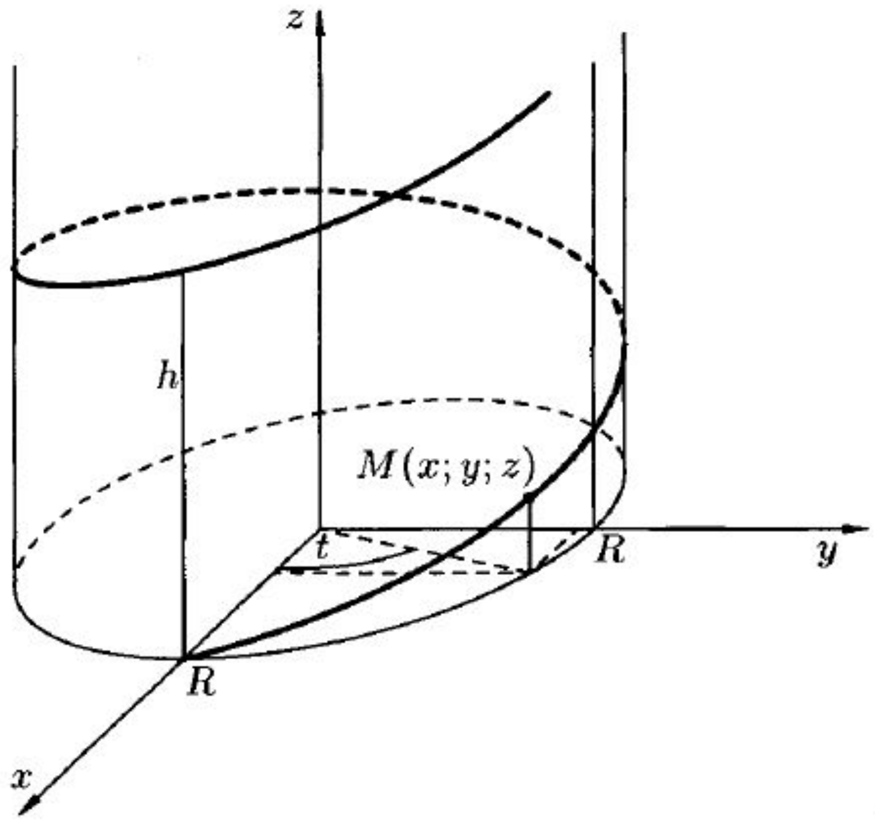
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора на оси координат.

Например, параметрические уравнения ***винтовой линии*** имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t. \end{cases}$$

Если точка M равномерно движется по образующей кругового цилиндра, а сам цилиндр равномерно вращается вокруг оси, то точка M описывает винтовую линию .



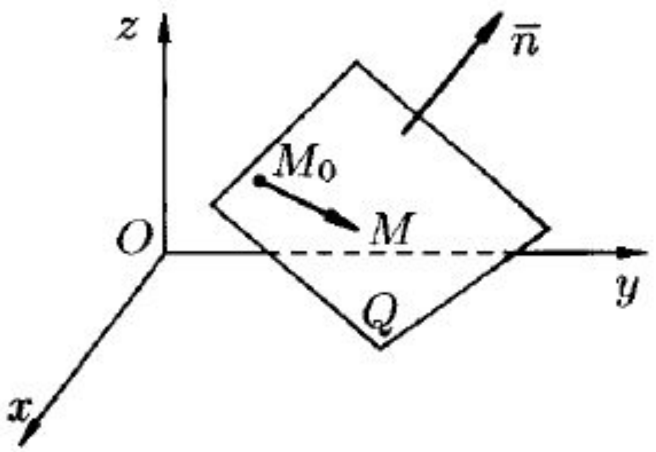
Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости . Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$



При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению, координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\overline{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\overline{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости.***

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0.

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение — *уравнением связки плоскостей*.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение в виде

$$\boxed{A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0.}$$

Сравнивая уравнение с уравнением

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

видим, что уравнения $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ и $\boxed{A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0}$ являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_1\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$.

Итак, уравнение $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость.

Уравнение называется ***общим уравнением плоскости***.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если* $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат.*

2. *Если* $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A;B;0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B = 0$ — параллельна оси Oy, $A = 0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. *Если* $A = B = 0$, то уравнение принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A = B = D = 0$, то уравнение примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

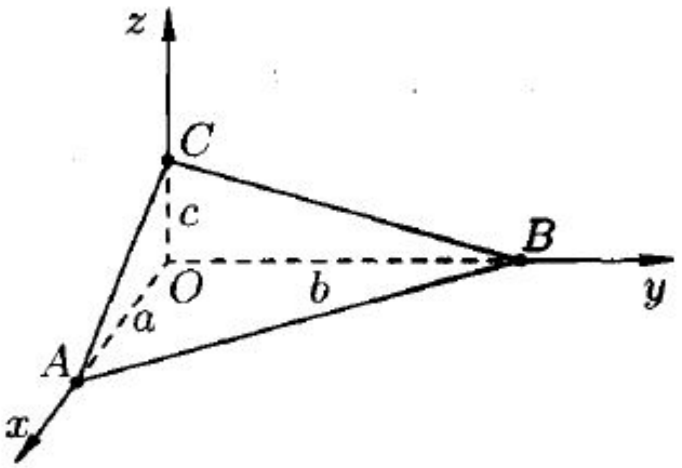
Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Уравнение есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственн отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$.



Подставляя координаты этих точек в уравнение

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

, получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.}$$

Уравнение называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях***. Им удобно пользоваться при построении плоскости.

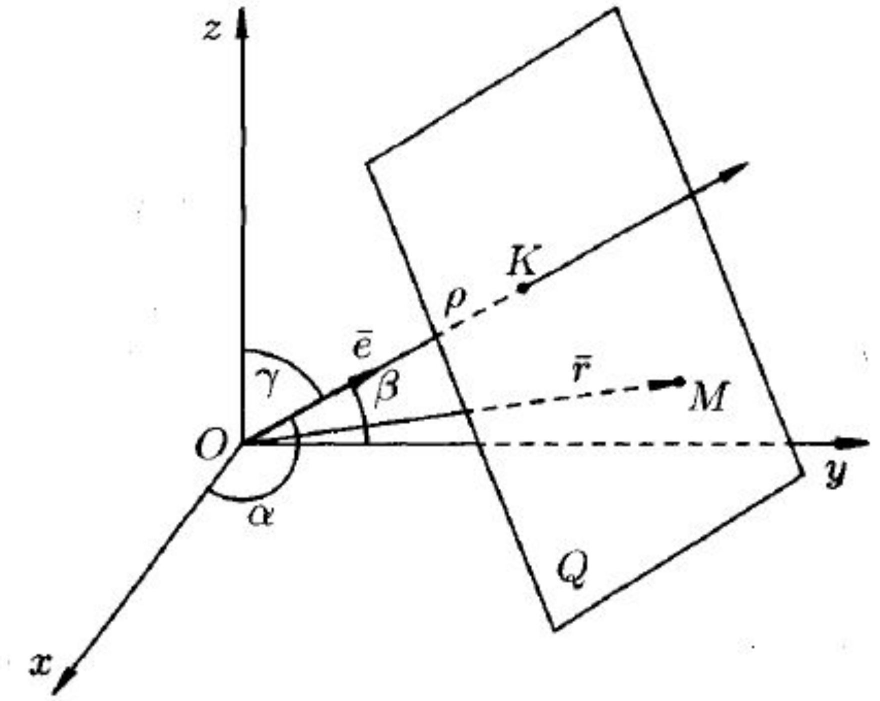
Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и соединим ее с началом координат. Образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y; z)$.

При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$ всегда равно p: $\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{r} = p$, т. е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.}$$



Уравнение $\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.}$ называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме*. Зная координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{e}$, уравнение перепишем в виде

$$\boxed{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.}$$

Уравнение называется ***нормальным уравнением плоскости в координатной форме***.

Отметим, что общее уравнение плоскости

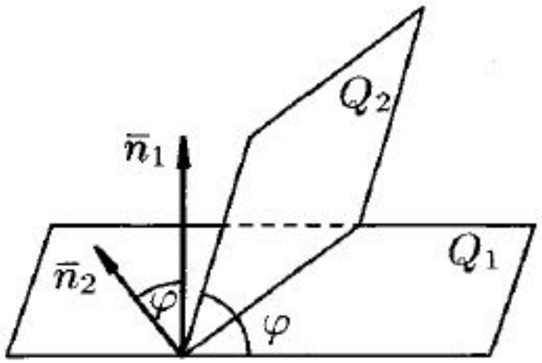
$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ можно привести к нормальному уравнению так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

ПЛОСКОСТЬ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов

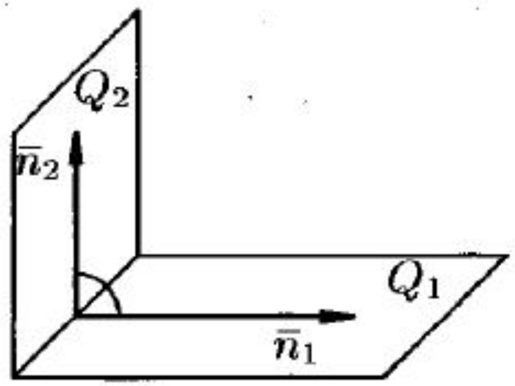
Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

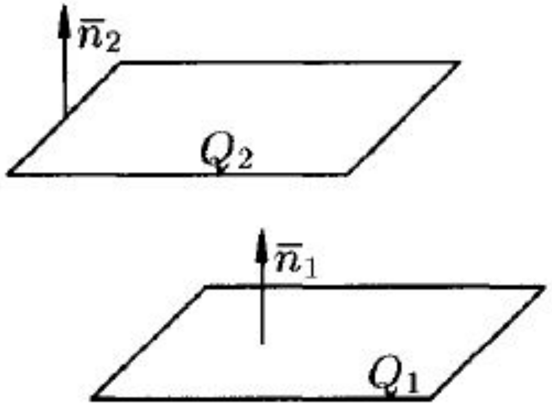
Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны, то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.



а



б

Пример 1. Найти величину острого угла между плоскостями:

$11x - 8y - 7z - 15 = 0$ и $4x - 10y + z - 2 = 0$;

Воспользовавшись формулой

$$\cos\varphi = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|11 \cdot 4 - 8 \cdot (-10) - 7 \cdot 1|}{\sqrt{121 + 64 + 49} \cdot \sqrt{16 + 100 + 1}} =$$

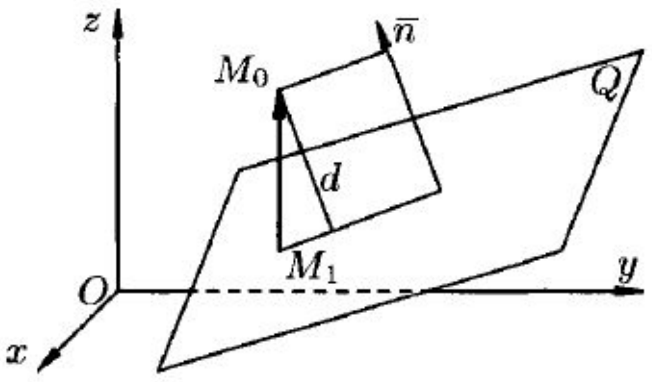
$$= \frac{117}{\sqrt{234} \cdot \sqrt{117}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$



Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$

Следовательно,

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\, \overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

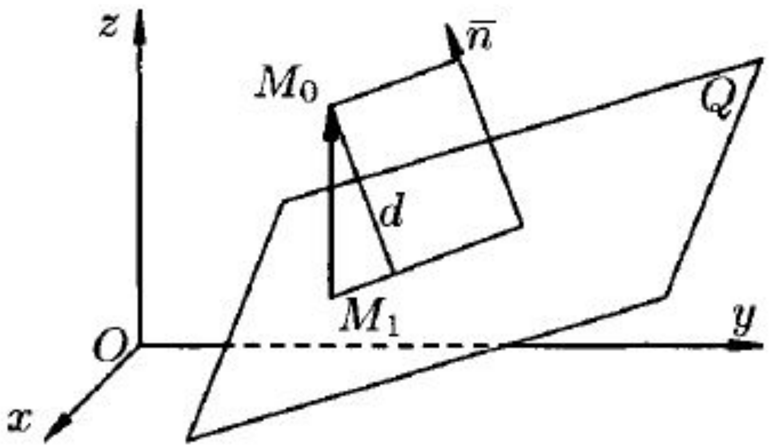
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$



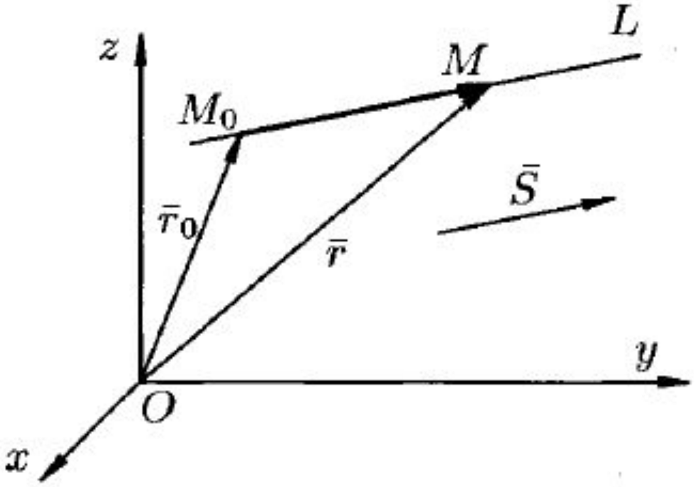
УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}.$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой .



Уравнение $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.}$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}$ можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$$

Они называются *параметрическими уравнениями* ***прямой*** в пространстве.

Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(2;-1;-3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=2-4t, \\ z=t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси Oy;

3) прямая перпендикулярна плоскости $3x+y-z-8=0$.

❍ 1) Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\bar{s}=(2;-4;1)$. Согласно формулам $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ имеем искомое уравнение прямой

$$\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-1-4t, \\ z=-3+t. \end{cases}$$

2) В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\bar{s}=(0;1;0)$, совпадающий с ортом $\bar{j}$. Искомое уравнение прямой есть

$$x=2+0\cdot t\,, \qquad y=-1+1\cdot t\,, \qquad z=-3+0\cdot t\,,$$

т. е. $\begin{cases} x=2, \\ y=-1+t, \\ z=-3. \end{cases}$

3) Вектор $\bar{n}=(3;1;-1)$ перпендикулярен плоскости $3x+$ $+y-z-8=0$. Следовательно, в качестве вектора $\bar{s}$ можно взять вектор $\bar{n}$, т. е. $\bar{s}=(3;1;-1)$. Тогда параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x+y-z-8=0$, примут вид

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+t, \\ z=-3-t. \end{cases}$$

●

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0 M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0 M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.}$$

Уравнения называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой, исключив параметр t. Из уравнений находим

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z=1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z-1=0$.

Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно

вектору $\bar{a} = (3; -6; 5)$;

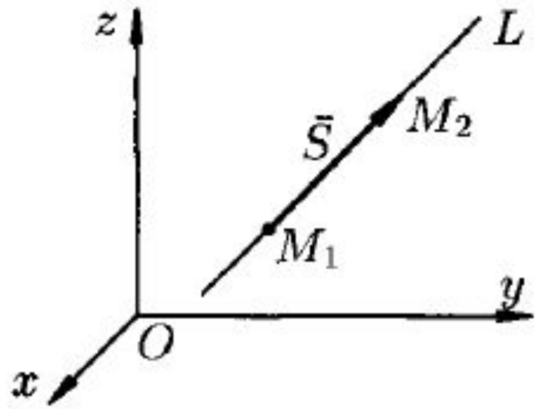
В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку M_0 возьмем вектор $\bar{s}$ равный вектору $\bar{a}$, т. е. $\bar{s} = (3; -6; 5)$. Тогда, по формуле

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, канонические уравнения

прямой примут вид

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{5}.$$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки



Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$. Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.}$$

, уравнения прямой L имеют вид

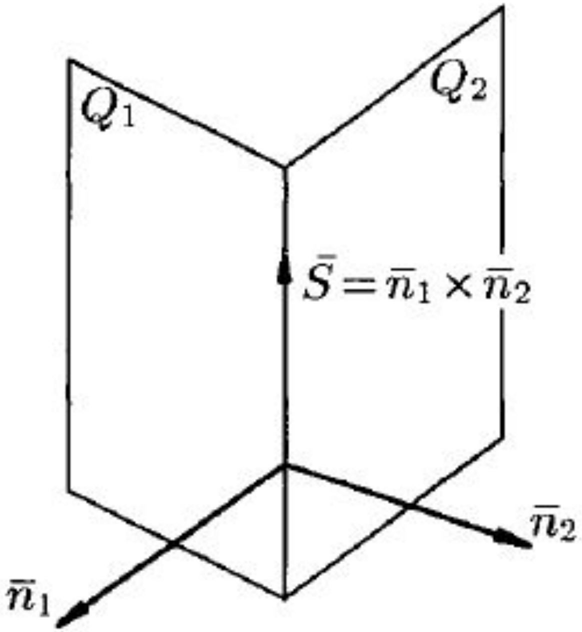
$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.}$$

Уравнения называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы.

Уравнения называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений можно перейти к каноническим уравнениям. Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений, придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение: Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2; 1; 0) \in L$. Положим $y = 0$ и решим систему $\begin{cases} x - z = -1, \\ 2x - 3z = -5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2; 0; 3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Прямая линия в пространстве. Основные задачи

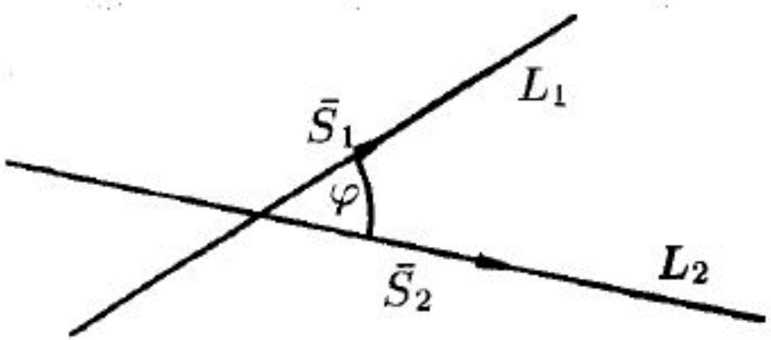
Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$



Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=$ $=(m_2;n_2;p_2)$ Поэтому,

по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем

$\cos\varphi=\dfrac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{|\bar{S}_1|\cdot|\bar{S}_2|}$ или $\boxed{\cos\varphi=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.}$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.}$$

следует взять по модулю.

Если *прямые* L_1 *и* L_2 *перпендикулярны*, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi = 0$. Следовательно, числитель дроби равен нулю, т. е. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Если *прямые* L_1 *и* L_2 *параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

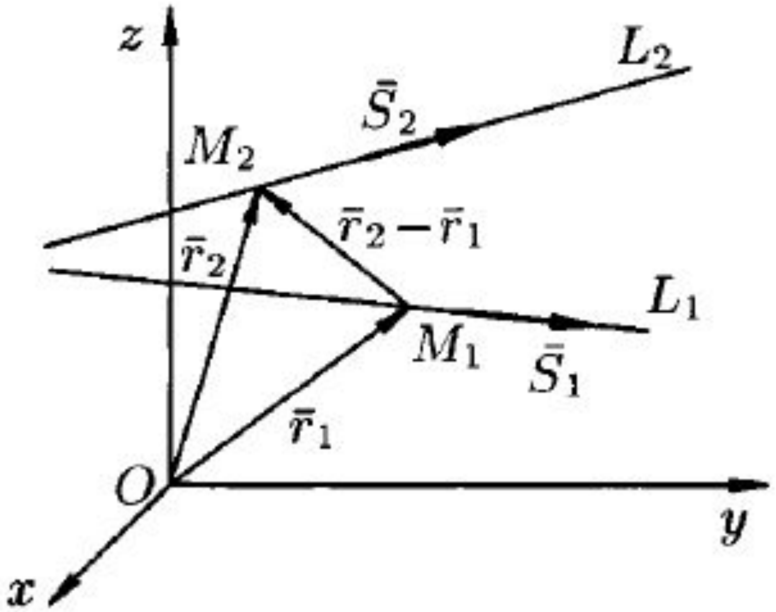
Пример 2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3x + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90°$.

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями



$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $\bar{S}_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $\bar{S}_2=(m_2;n_2;p_2)$

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$.

Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2 \neq \lambda\bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

Установить взаимное расположение прямых:

1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t; \end{cases}$

2) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$.

1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\bar{s}_1=(4;3;-2)$, $\bar{s}_2=(-8;-6;4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8}=\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2;0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2=5-8t, \\ 0=4-6t, \\ -1=3+4t. \end{cases}$$

Получаем $t=\frac{3}{8}$ — из первого уравнения, $t=\frac{2}{3}$ — из второго, $t=-1$ — из третьего. Это означает, что точка $(2;0;-1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\bar{s}_1=(2;-3;1)$ и $\bar{s}_2=(3;2;4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

принадлежности двух прямых одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2, через которые проходят данные прямые: $M_1(0;1;-2)$, $M_2(-4;-3;1)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=$$

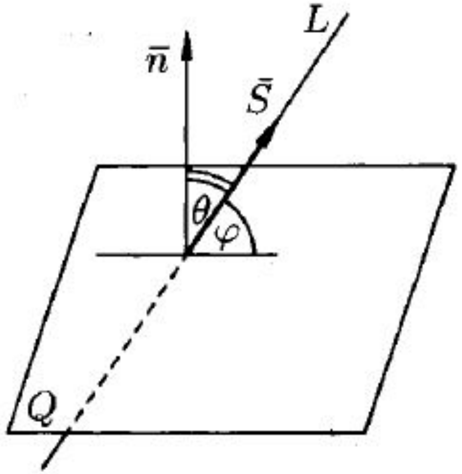
$$=-4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot(-14)+4\cdot 5+3\cdot 13=115\neq 0.$$

Следовательно, данные прямые — скрещивающиеся. ●

Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

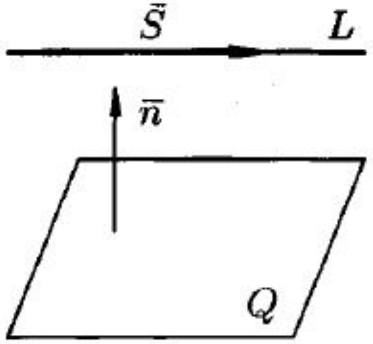


Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$

Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{S}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$



Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны, а потому $\bar{S}\cdot\bar{n} = 0$, т. е.

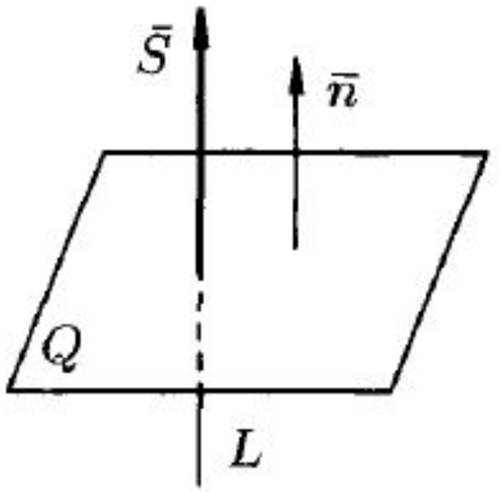
$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

Если *прямая* L *перпендикулярна плоскости* Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости



Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Для этого надо **решить** систему уравнений . Проще всего это сделать, **записав** уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости получаем уравнение $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$ или

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства находим значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$);

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***

Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

◐ Точка M_2, симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2, для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости — это вектор-нормаль этой плоскости $\bar{n}=(1;-2;1)$. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1, имеет вид

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-5}{1}(=t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=3+t, \\ y=4-2t, \\ z=5+t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью находим, решая систему

$$\begin{cases} x=3+t,\ y=4-2t,\ z=5+t, \\ x-2y+z-6=0. \end{cases}$$

Из равенства $(3+t)-2(4-2t)+(5+t)-6=0$ вытекает равенство $6t-6=0$, т. е. $t=1$. Следовательно, $x=3+1=4$, $y=4-2=2$, $z=5+1=6$, т. е. $N(4;2;6)$ — точка пересечения прямой и плоскости. А так как N — середина отрезка M_1M_2, то

$$x_N=\frac{x_{M_1}+x_{M_2}}{2}, \quad y_N=\frac{y_{M_1}+y_{M_2}}{2}, \quad z_N=\frac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2}.$$

Имеем

$$4=\frac{3+x_{M_2}}{2}, \quad 2=\frac{4+y_{M_2}}{2}, \quad 6=\frac{5+z_{M_2}}{2}.$$

Отсюда находим $x_{M_2}=5$, $y_{M_2}=0$, $z_{M_2}=7$, т. е. точка M_2 имеет координаты $(5;0;7)$. ●

Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ и $5x - 6y + 2z - 10 = 0$;

2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ и $3x + y - 4z - 15 = 0$.

1) Имеем $\bar{s} = (-4; 1; 2)$, $\bar{n} = (5; -6; 2)$. Как видно координаты направляющего вектора $\bar{s}$ прямой и нормального вектора $\bar{n}$ плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости. Найдем значение выражения $Am + Bn + Cp$:

$$Am + Bn + Cp = 5 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

2) Здесь $\bar{s} = (3; -1; 2)$, $\bar{n} = (3; 1; -4)$, $M_0(-1; 2; -4)$, $Am + Bn + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия принадлежности прямой плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Условия выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости.*