

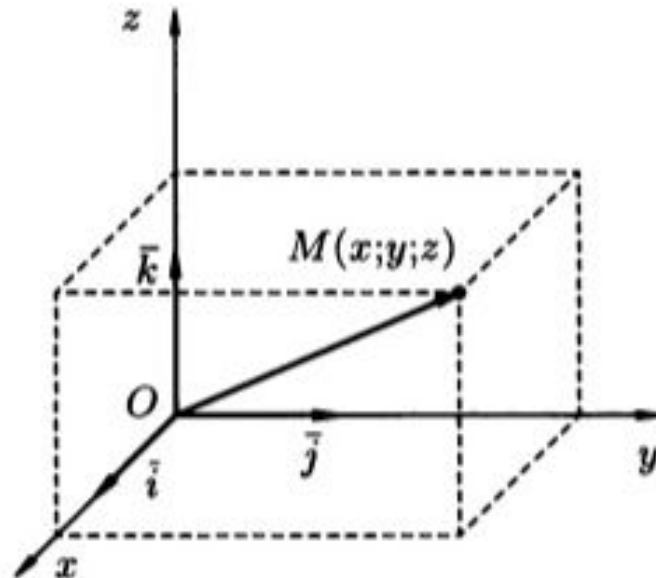
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямоугольная система координат. Основные задачи

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке O — начале координат. Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ox), другую — *осью ординат* (Oy), третью — *осью аппликат* (Oz). На каждой из осей выбраны *единичные векторы*, которые обозначают соответственно \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Если M — произвольная точка пространства, то вектор \overline{OM} называется *радиусом-вектором* точки M .



\Rightarrow Координатами точки M в системе координат $Oxyz$ называются координаты радиус-вектора \overline{OM} . Если $\overline{OM} = (x; y; z)$ то координаты точки M записывают так: $M(x; y; z)$; здесь число x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата точки M . Каждой тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует одна и только одна точка пространства, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

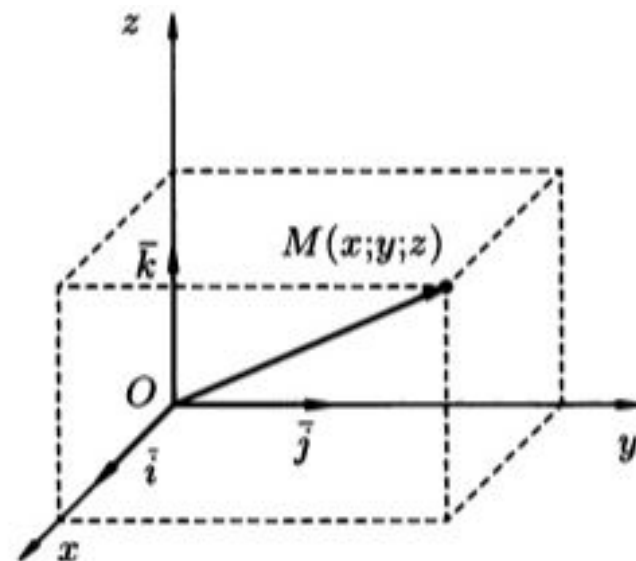
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты $(x; y; z)$ точки M , делящей в заданном отношении λ ($\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$) отрезок AB , ($A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$), определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получают формулы для определения координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$



Пример 1. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух точек $A(2; 3; 1)$ и $B(-1; 5; -2)$.

○ Точка M , лежащая на оси Oy , имеет координаты $M(0; y; 0)$. По условию задачи $|AM| = |BM|$. Найдем расстояния $|AM|$ и $|BM|$, используя формулу:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|AM| = \sqrt{(0 - 2)^2 + (y - 3)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14};$$

$$|BM| = \sqrt{(0 + 1)^2 + (y - 5)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Отсюда находим, что $4y = 16$, т. е. $y = 4$. Искомая точка есть $M(0; 4; 0)$. ●



Пример 2. Отрезок AB разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2; 4; 1)$ и $B(2; -4; -3)$.
 ○ Обозначим точки деления отрезка AB в следующем порядке: C и D . По условию задачи $|AC| = |CD| = |DB|$. Поэтому точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

находим координаты точки C :

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \quad y_C = \frac{4 + \frac{1}{2} \cdot (-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$z_C = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

Имеем, $C\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

По формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

находим координаты

точки D — середины отрезка CB :

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} = \frac{2}{3}, \quad y_D = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}, \quad z_D = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{2} = -\frac{5}{3},$$

т. е. точка D имеет координаты $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. ●



УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

⇒ Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, *сфера* радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R .

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x , y и z — их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.



☞ **Уравнением данной поверхности** в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x , y и z , которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x , y и z в уравнении поверхности называются **текущими координатами** точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки M_1 в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют — не лежит.



Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу R , т. е. $O_1M = R$. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

или

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если центр сферы O_1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Если же дано уравнение вида $F(x; y; z) = 0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.



Выражение «вообще говоря» означает, что в отдельных случаях уравнение $F(x; y; z) = 0$ может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается».

Так, уравнению $2x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z . Уравнению $0 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = 0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y = 0, z = 0$, а x — любое число).

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически. Отсюда вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Найти уравнение этой поверхности.
2. Дано уравнение $F(x; y; z) = 0$. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.



Уравнения линии в пространстве

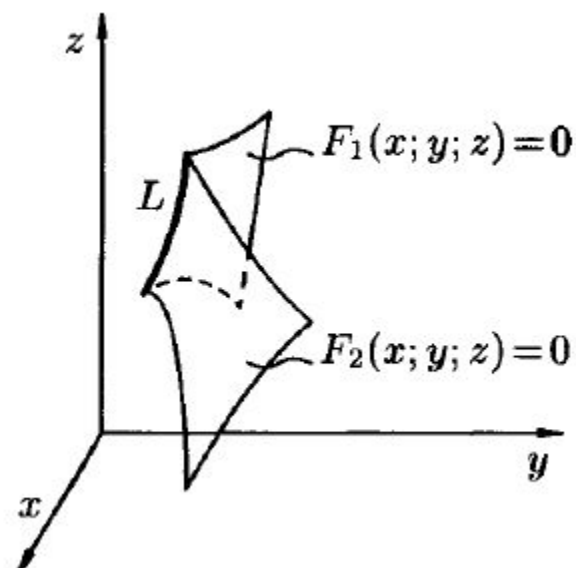
Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x; y; z) = 0$ и $F_2(x; y; z) = 0$ — уравнения двух поверхностей, определяющих линию L , то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$$



Уравнения системы называются **уравнениями линии в пространстве**. Например, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ есть уравнения оси Ox .



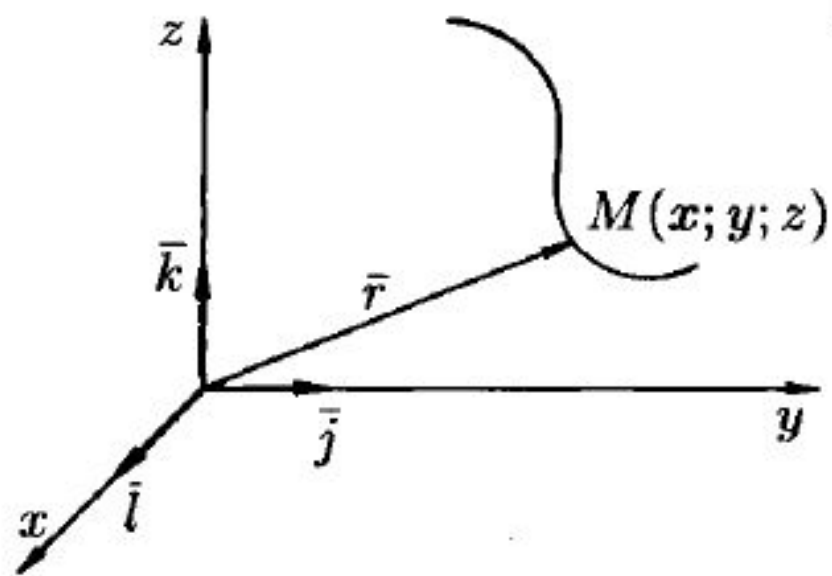
Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки. В этом случае ее задают *векторным уравнением*

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

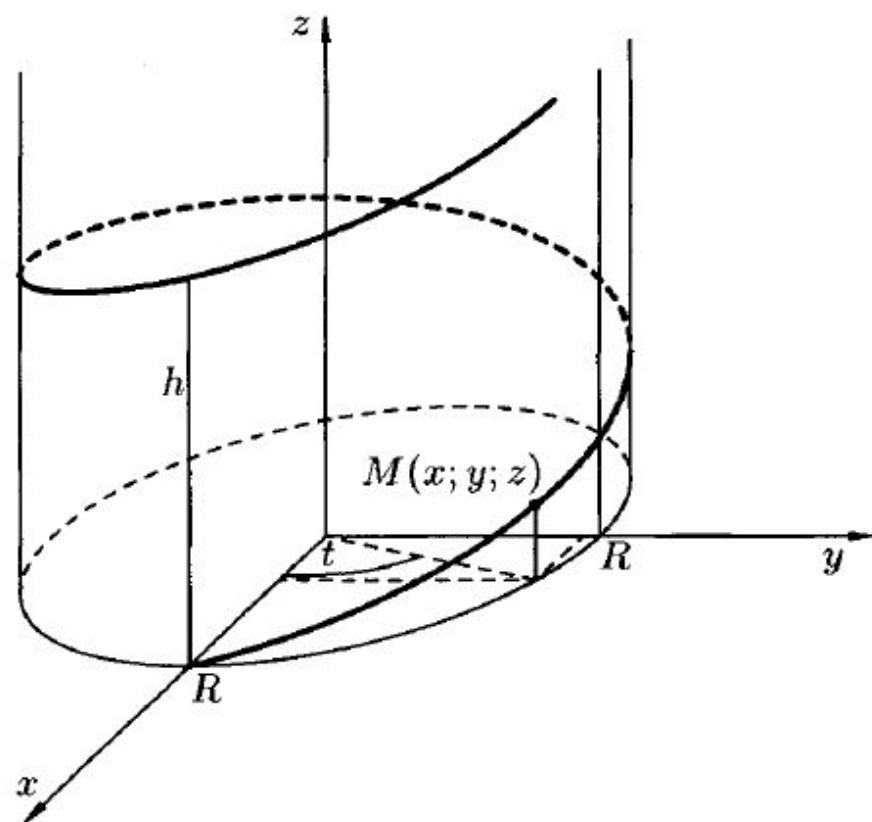
проекций вектора на оси координат.



Например, параметрические уравнения *винтовой линии* имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = \frac{h}{2\pi} t. \end{cases}$$

Если точка M равномерно движется по образующей кругового цилиндра, а сам цилиндр равномерно вращается вокруг оси, то точка M описывает винтовую линию.



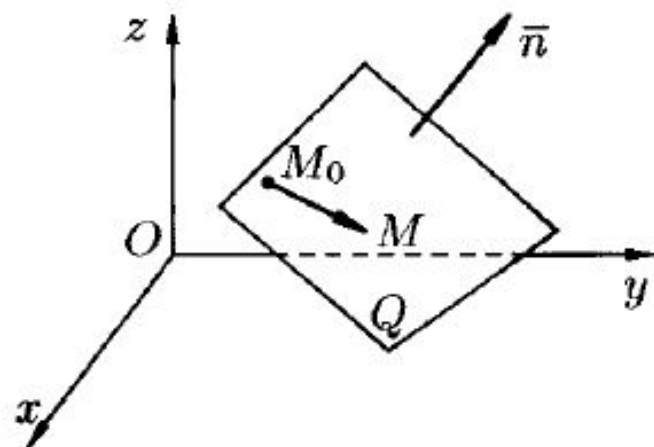
Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение плоскости Q . Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$



При любом расположении точки M на плоскости Q векторы \vec{n} и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению, координаты точек, не лежащих на плоскости Q , этому уравнению не удовлетворяют (для них $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

⇒ Уравнение называется **уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$** . Оно первой степени относительно текущих координат x , y и z . Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ называется **нормальным вектором плоскости**.



Придавая коэффициентам A , B и C уравнения

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0 .

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение — *уравнением связки плоскостей*.



Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с **тремя переменными** x , y и z :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A , B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение в виде

$$A(x - 0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z - 0) = 0.$$

Сравнивая уравнение с уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

видим, что уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и

$$A(x - 0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z - 0) = 0$$
 являются

уравнением плоскости с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_1\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$.

Итак, уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$

определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость.

Уравнение называется *общим уравнением плоскости*.



Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0; 0; 0)$. Следовательно, в этом случае плоскость проходит через начало координат.

2. Если $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz . Следовательно, плоскость параллельна оси Oz ; если $B = 0$ — параллельна оси Oy , $A = 0$ — параллельна оси Ox .

3. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0; 0; 0)$ параллельно оси Oz , т. е. плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz . Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy .

4. Если $A = B = 0$, то уравнение принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость параллельна плоскости Oxy . Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz .

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это уравнение плоскости Oxy . Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz ; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz .



Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q , проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q , следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*



Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox , Oy и Oz соответственно отрезки a , b и c , т. е. проходит через три точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$.

Подставляя координаты этих точек в уравнение

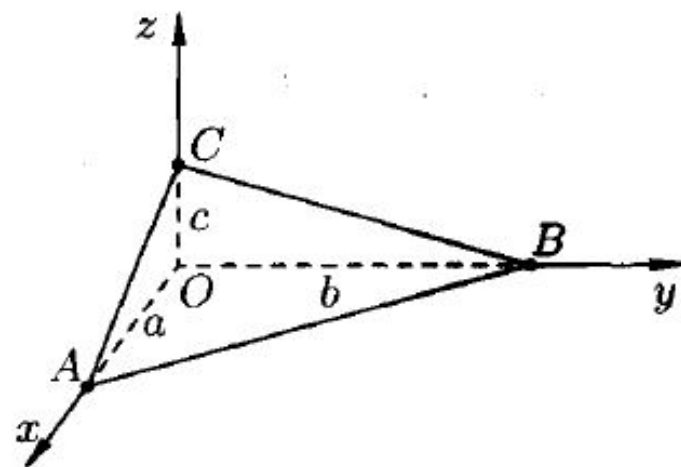
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$


, получаем

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



 Уравнение называется **уравнением плоскости в отрезках на осях**. Им удобно пользоваться при построении плоскости.



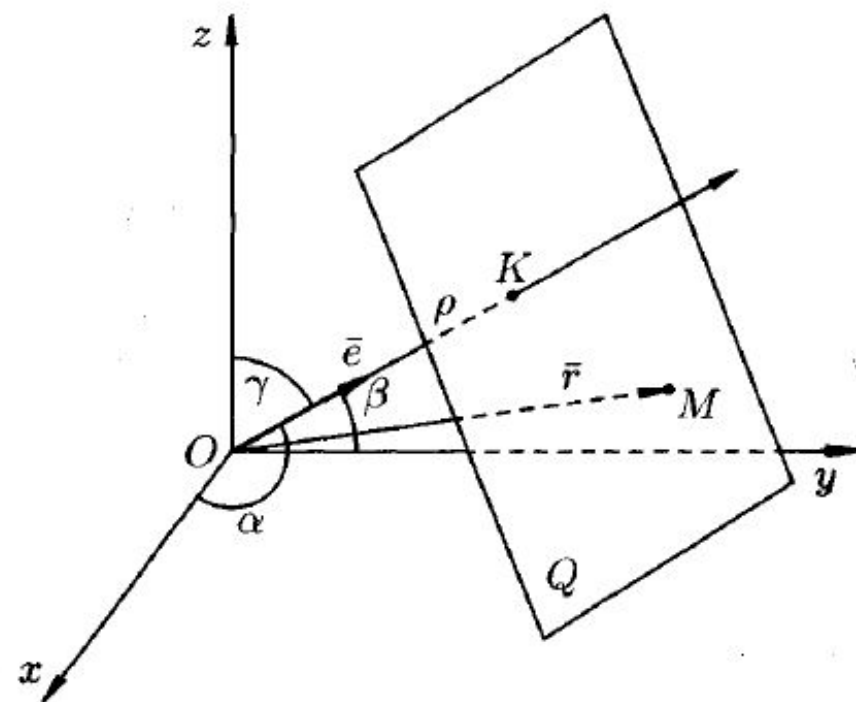
Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора \bar{e} , имеющего направление перпендикуляра OK , опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором \bar{e} с осями Ox, Oy и Oz . Тогда $\bar{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и соединим ее с началом координат. образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y; z)$.


При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора \bar{r} на направление вектора \bar{e} всегда равно p : $\text{пр}_{\bar{e}} \bar{r} = p$, т. е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.}$$



Уравнение $\boxed{\vec{r} \cdot \vec{e} - p = 0.}$ называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме*. Зная координаты векторов \vec{r} и \vec{e} , уравнение перепишем в виде

$$\boxed{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.}$$

 Уравнение называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме*.

Отметим, что общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

можно привести к нормальному уравнению так, как это делалось для уравнения

прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаком свободного члена D общего уравнения плоскости



ПЛОСКОСТЬ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2 :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

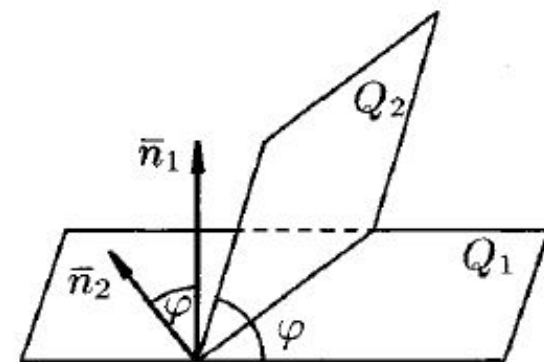
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

⇨ Под *углом между плоскостями* Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов

Поэтому $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ или

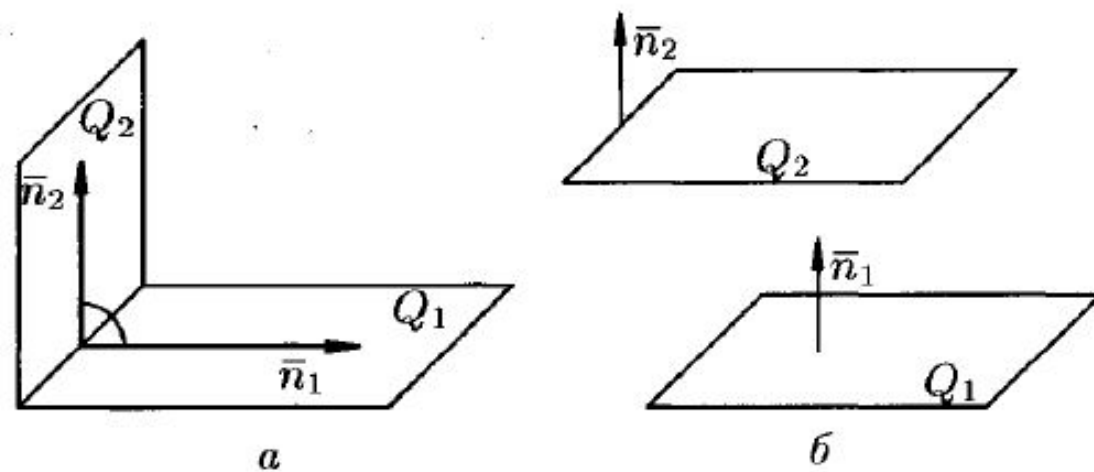
$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны, то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, т. е. $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2 .

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали \bar{n}_1 и \bar{n}_2 (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2 .



Пример 1. Найти величину острого угла между плоскостями:

$$11x - 8y - 7z - 15 = 0 \text{ и } 4x - 10y + z - 2 = 0;$$

○ Воспользовавшись формулой

$$\cos \varphi = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|11 \cdot 4 - 8 \cdot (-10) - 7 \cdot 1|}{\sqrt{121 + 64 + 49} \cdot \sqrt{16 + 100 + 1}} = \\ &= \frac{117}{\sqrt{234} \cdot \sqrt{117}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \varphi &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

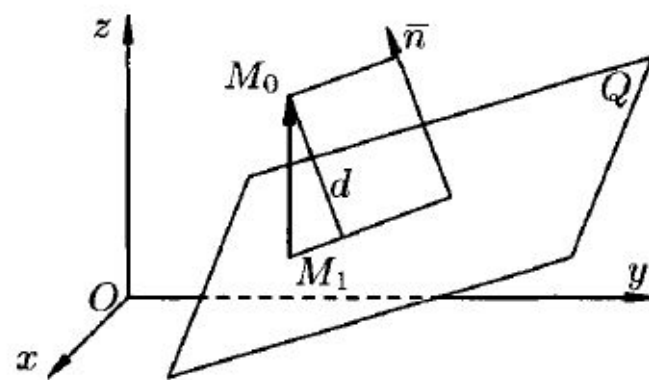
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q , на направление нормального вектора $\vec{n} = (A; B; C)$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_1M_0}| &= \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



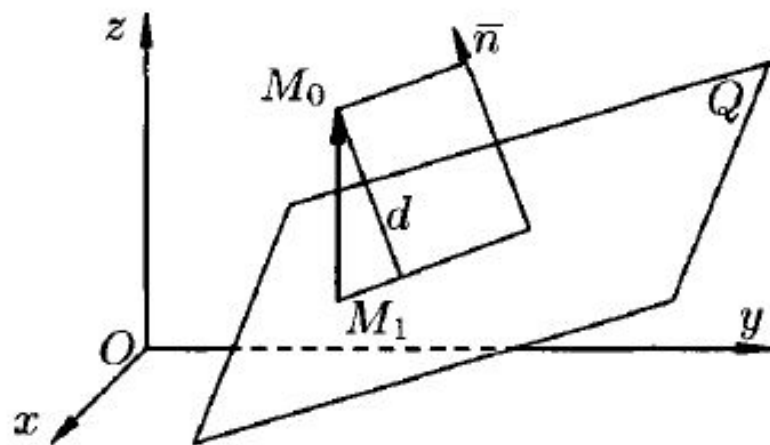
А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q , то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q

задана уравнением $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$



УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Векторное уравнение прямой

⇒ Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор \vec{S} , параллельный этой прямой. Вектор \vec{S} называется *направляющим вектором прямой*. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через \vec{r}_0 и \vec{r} . Очевидно, что три вектора \vec{r}_0 , \vec{r} и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M}.$$

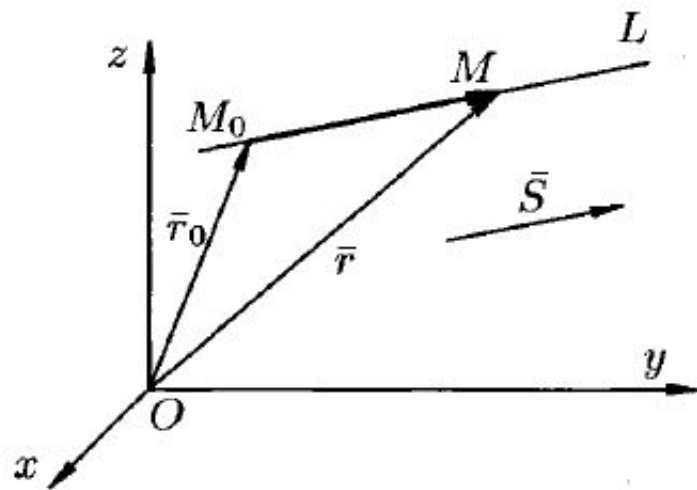


Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L , параллелен направляющему вектору \vec{S} , поэтому $\overline{M_0M} = t\vec{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overline{M_0M}$ можно записать в виде

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}.}$$

⇒ Полученное уравнение называется **векторным уравнением прямой**.



Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}$ можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.



Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(2; -1; -3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси Oy ;

3) прямая перпендикулярна плоскости $3x + y - z - 8 = 0$.

○ 1) Так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{s} = (2; -4; 1)$. Согласно формулам

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

имеем искомое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

2) В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\vec{s} = (0; 1; 0)$, совпадающий с ортом \vec{j} . Искомое уравнение прямой есть

$$x = 2 + 0 \cdot t, \quad y = -1 + 1 \cdot t, \quad z = -3 + 0 \cdot t,$$

т.е. $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -3. \end{cases}$

3) Вектор $\vec{n} = (3; 1; -1)$ перпендикулярен плоскости $3x + y - z - 8 = 0$. Следовательно, в качестве вектора \vec{s} можно взять вектор \vec{n} , т.е. $\vec{s} = (3; 1; -1)$. Тогда параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$, примут вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$$



Канонические уравнения прямой

Пусть $\vec{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L , параллелен вектору \vec{S} . Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\vec{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$



Уравнения называются **каноническими уравнениями прямой** в пространстве.



Замечания: 1) Уравнения можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой, исключив параметр t . Из уравнений находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2; -4; 1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора \vec{S} на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.



Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно вектору $\bar{a} = (3; -6; 5)$;

○ В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку M_0 возьмем вектор \bar{s} равный вектору \bar{a} , т. е. $\bar{s} = (3; -6; 5)$. Тогда, по формуле

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, канонические уравнения

прямой примут вид

$$\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 3}{-6} = \frac{z + 2}{5} .$$



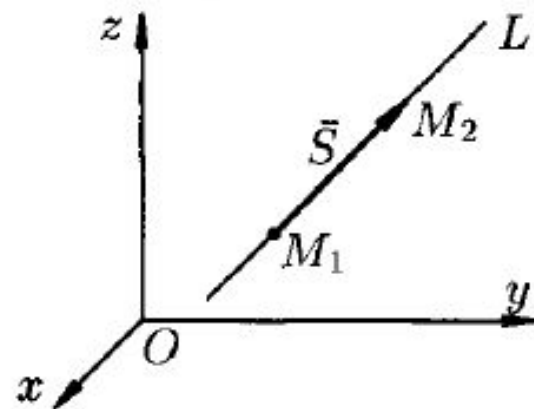
Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки


Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора \vec{S} можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\vec{S} = \overline{M_1M_2}$. Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

, уравнения прямой L имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



 Уравнения называются *уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.*



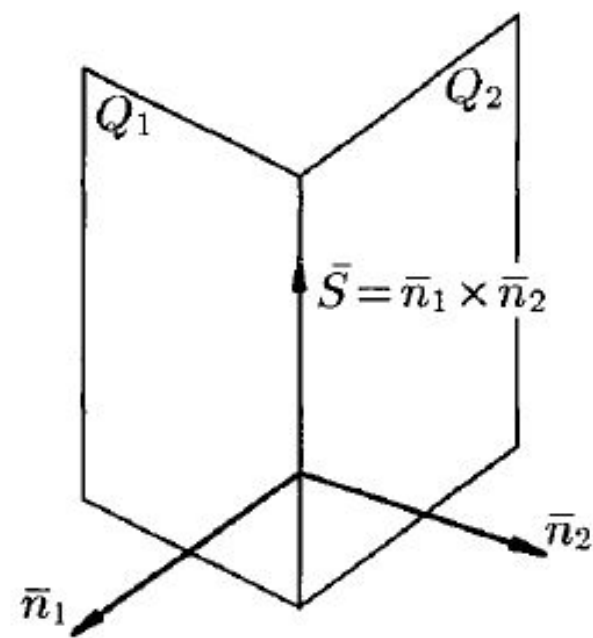
Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы.

Уравнения называют *общими уравнениями прямой*.



От общих уравнений можно перейти к каноническим уравнениям. Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений, придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам \bar{n}_1 и \bar{n}_2 , то за направляющий вектор \bar{S} прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Пример 1. Написать канонические уравнения прямой L , заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

○ Решение: Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим

точку $M_1(-2; 1; 0) \in L$. Положим $y = 0$ и решим систему $\begin{cases} x - z = -1, \\ 2x - 3z = -5. \end{cases}$

Находим вторую точку $M_2(2; 0; 3)$ прямой L . Записываем уравнение прямой L , проходящей через точки M_1 и M_2 :

$$\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{3}.$$



Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

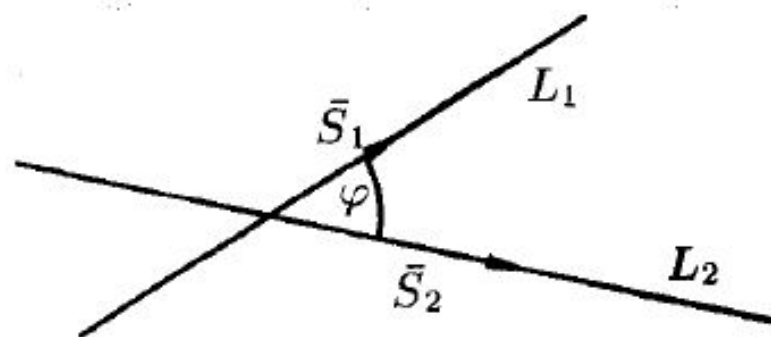
$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $S_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Поэтому,

по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем

$$\cos \varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|} \text{ или}$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \cdot \text{следует взять по модулю.}$$

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то в этом и только в этом случае имеем $\cos \varphi = 0$. Следовательно, числитель дроби равен нулю, т. е. $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то параллельны их направляющие векторы \vec{S}_1 и \vec{S}_2 . Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.



Пример 2. Найти угол между прямыми

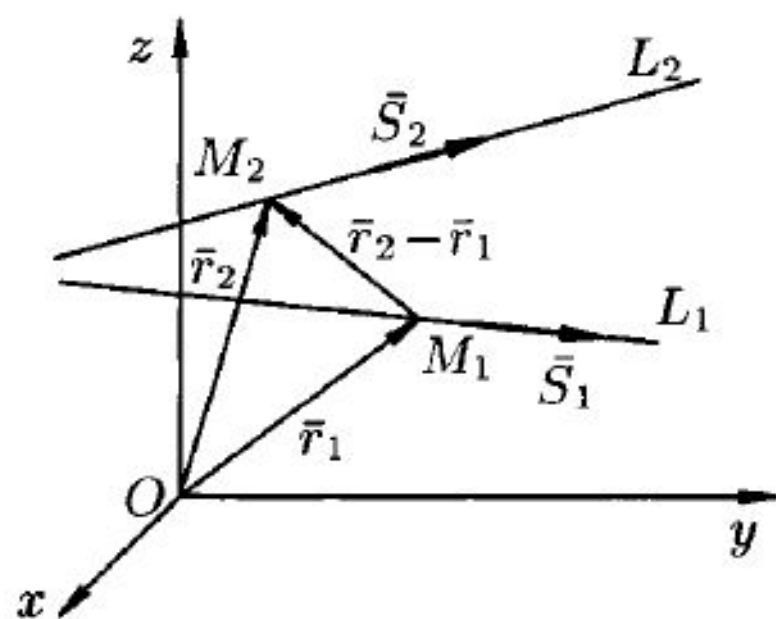
$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

○ Решение: Очевидно, $\vec{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\vec{S}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\vec{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90^\circ$. ●



Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями



$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Их направляющие векторы соответственно $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через \vec{r}_1 ; прямая L_2 проходит

через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через \vec{r}_2 .



Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы \vec{S}_1 , \vec{S}_2 и $\overline{M_1 M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\vec{S}_1\vec{S}_2 = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\vec{S}_2 \neq \lambda\vec{S}_1$, либо параллельны, если $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2$.



Установить взаимное расположение прямых:

$$1) \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \text{ и } \begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases}$$

$$2) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1} \text{ и } \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

○ 1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\bar{s}_1 = (4; 3; -2)$, $\bar{s}_2 = (-8; -6; 4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2; 0; -1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2 = 5 - 8t, \\ 0 = 4 - 6t, \\ -1 = 3 + 4t. \end{cases}$$

Получаем $t = \frac{3}{8}$ — из первого уравнения, $t = \frac{2}{3}$ — из второго, $t = -1$ — из третьего. Это означает, что точка $(2; 0; -1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\bar{s}_1 = (2; -3; 1)$ и $\bar{s}_2 = (3; 2; 4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{принадлежности двух}$$

прямых одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2 , через которые проходят данные прямые:

$M_1(0; 1; -2)$, $M_2(-4; -3; 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -4 - 0 & -3 - 1 & 1 - (-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -4 \cdot (-14) + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 13 = 115 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, данные прямые — скрещивающиеся. ●



Прямая и плоскость в пространстве.

Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

☞ Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L , а через θ — угол между векторами $\vec{n} = (A; B; C)$ и $\vec{S} = (m; n; p)$

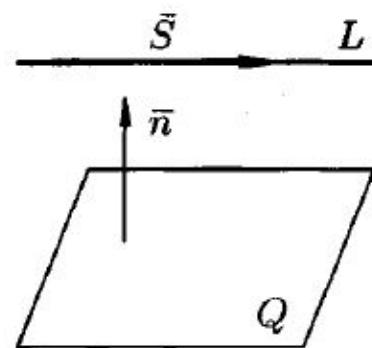
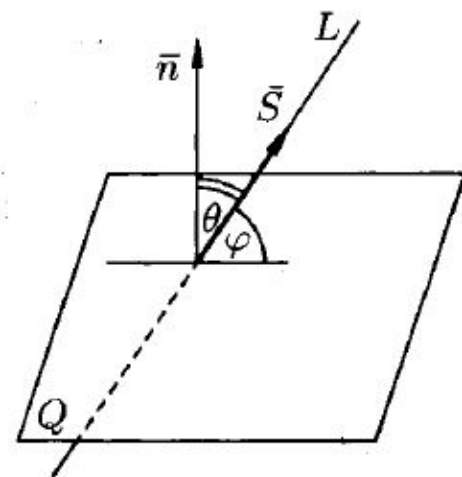
Тогда $\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{S}|}$. Найдем синус угла φ , считая $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$:
 $\sin \varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$. И так как $\sin \varphi \geq 0$, получаем

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q* , то векторы \vec{n} и \vec{S} перпендикулярны, а потому $\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

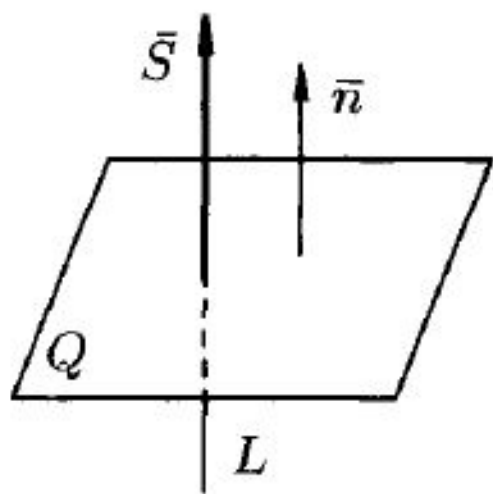
☞ является *условием параллельности* прямой и плоскости.



Если прямая L перпендикулярна плоскости Q , то векторы \bar{n} и \bar{S} параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются условиями перпендикулярности прямой и плоскости



Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для этого надо решить систему уравнений. Проще всего

это сделать, записав уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x , y и z в уравнение плоскости, получаем уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$



Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства находим значение t :

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$);

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t , любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

☞ является **условием принадлежности прямой плоскости**.



Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

○ Точка M_2 , симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2 , для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости — это вектор-нормаль этой плоскости $\vec{n} = (1; -2; 1)$. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1 , имеет вид

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} (=t) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 5 + t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью находим, решая систему

$$\begin{cases} x = 3 + t, & y = 4 - 2t, & z = 5 + t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Из равенства $(3+t) - 2(4-2t) + (5+t) - 6 = 0$ вытекает равенство $6t - 6 = 0$, т. е. $t = 1$. Следовательно, $x = 3 + 1 = 4$, $y = 4 - 2 = 2$, $z = 5 + 1 = 6$, т. е. $N(4; 2; 6)$ — точка пересечения прямой и плоскости. А так как N — середина отрезка M_1M_2 , то

$$x_N = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, \quad y_N = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}, \quad z_N = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}.$$

Имеем

$$4 = \frac{3 + x_{M_2}}{2}, \quad 2 = \frac{4 + y_{M_2}}{2}, \quad 6 = \frac{5 + z_{M_2}}{2}.$$

Отсюда находим $x_{M_2} = 5$, $y_{M_2} = 0$, $z_{M_2} = 7$, т. е. точка M_2 имеет координаты $(5; 0; 7)$. ●



Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

$$1) \begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ и } 5x - 6y + 2z - 10 = 0;$$

$$2) \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \text{ и } 3x + y - 4z - 15 = 0.$$

○ 1) Имеем $\bar{s} = (-4; 1; 2)$, $\bar{n} = (5; -6; 2)$. Как видно координаты направляющего вектора \bar{s} прямой и нормального вектора \bar{n} плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости. Найдем значение выражения

$$At + Bn + Cp:$$

$$At + Bn + Cp = 5 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

2) Здесь $\bar{s} = (3; -1; 2)$, $\bar{n} = (3; 1; -4)$, $M_0(-1; 2; -4)$, $At + Bn + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия принадлежности прямой плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Условия выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости*. ●

