Свойства дискретно-временного преобразования Фурье

Свойства ДВПФ. Линейность

Пусть дана линейная комбинация сигналов: $y(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$

где a и b - постоянные коэффициенты

Тогда спектр такого сигнала будет равен сумме спектров исходных сигналов:

$$Y(\tilde{\omega}) = aX_1(\tilde{\omega}) + bX_2(\tilde{\omega})$$

Свойства ДВПФ. Временной сдвиг

Пусть дан сигнал, задержанный на величину k_0: $y(k) = x(k - k_0)$

Спектр такого сигнала равен:

$$Y(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k - k_0)e^{-i\tilde{\omega}k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k - k_0)e^{-i\tilde{\omega}(k-k_0)}e^{-i\tilde{\omega}k_0}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-i\tilde{\omega}m}e^{-i\tilde{\omega}k_0} = X(\tilde{\omega})e^{-i\tilde{\omega}k_0}$$

Амплитудный спектр **не изменяется**: $|Y(\tilde{\omega})| = |X(\tilde{\omega})|$

А фазовый спектр **равен**: $\varphi_Y(\tilde{\omega}) = \varphi_X(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega}k_0$

Свойства ДВПФ. Спектр свёртки сигналов

Пусть дан сигнал, который сворачивает две последовательности:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m)$$

Спектр свёртки равен произведению спектров:

$$y(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m)e^{-i\tilde{\omega}k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-m)e^{-i\tilde{\omega}k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-i\tilde{\omega}m}X_2(\tilde{\omega}) = X_1(\tilde{\omega})X_2(\tilde{\omega})$$

Свойства ДВПФ. Спектр произведения сигналов

Пусть дан сигнал: $y(k) = x_1(k)x_2(k)$

Спектр произведения равен свёртке спектров:

$$y(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k)e^{-i\tilde{\omega}k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\tilde{\omega}')e^{-i\tilde{\omega}'k}d\tilde{\omega})x_2(k)e^{-i\tilde{\omega}k} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\tilde{\omega}') \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)e^{-i(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')k}d\tilde{\omega}' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\tilde{\omega}')X_2(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')d\tilde{\omega}'$$

Свойства ДВПФ. Теорема Парсеваля

Пусть дан сигнал: $y(k)$

Тогда для него будет справедливо такое утверждение: сумма квадрата функции равна сумме квадрата её преобразования:

$$\sum_{k-\infty}^{\infty} y(k)^2 = \sum_{\tilde{\omega}=-\infty}^{\infty} Y(\tilde{\omega})Y(-\tilde{\omega})$$

Свойства ДВПФ. Итоги

Данные свойства позволяют вычислять спектры различных сигналов, **не используя** прямую формулу для вычисления ДВПФ.

Название	**Временная область**	**Частотная область**
Линейность	$y(k) = ax_1(k) + bx_2(k)$	$Y(\tilde{\omega}) = aX_1(\tilde{\omega}) + bX_2(\tilde{\omega})$
Временной сдвиг	$y(k) = x(k - k_0)$	$Y(\tilde{\omega}) = X(\tilde{\omega})e^{-i\tilde{\omega}k_0}$
Спектр свёртки сигналов	$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k-m)$	$Y(\tilde{\omega}) = X_1(\tilde{\omega})X_2(\tilde{\omega})$
Спектр произведения сигналов	$y(k) = x_1(k)x_2(k)$	$Y(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\tilde{\omega}')X_2(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')d\tilde{\omega}$

Всем спасибо, все свободны

Мудрец закрытым держит рот: он знает, что и свеча от языка сгорает © Чжуан-Цзы