1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

Определитель ***– это число, характеризующее квадратную матрицу.***

Обозначается:

$$|A| \qquad \Delta \qquad \det A$$

Определителем первого порядка матрицы

$$A = (a_{11})$$

называется число a_{11}

То есть: $\boxed{|A| = |a_{11}| = a_{11}}$

<u>Определителем второго порядка</u> **называется число, которое определяется по правилу:**

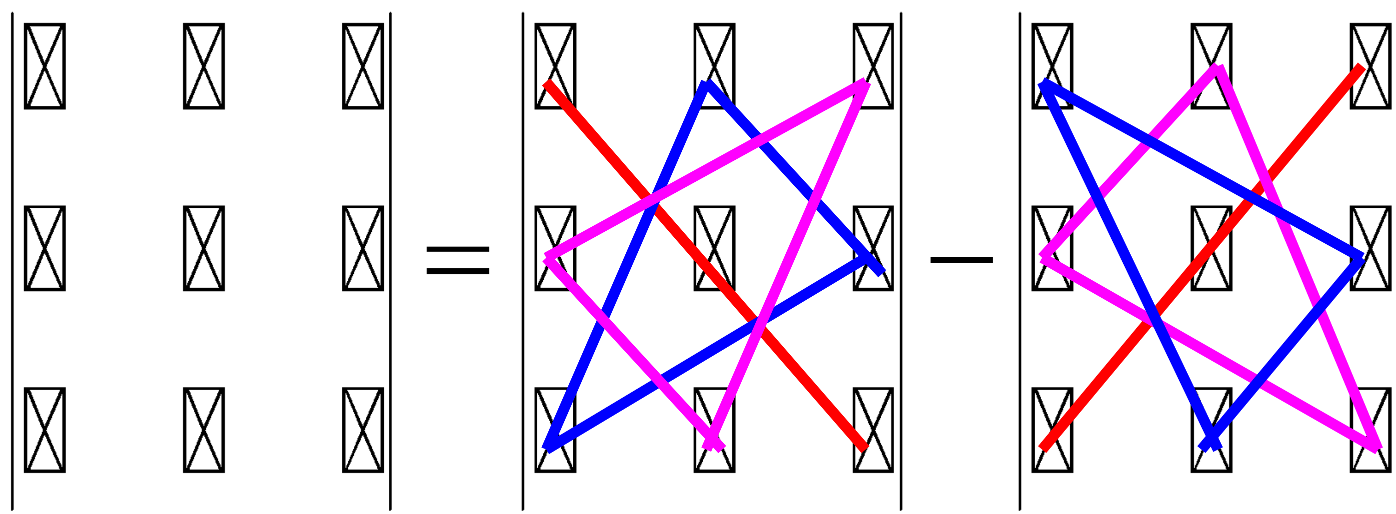
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>Определителем третьего порядка</u> **называется число, которое определяется по правилу:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников:



Пример.

Вычислить определители матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

***<u>Минором</u>* некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.**

Минор элемента определителя a_{ij}

обозначается как M_{ij}

Алгебраическим дополнением ***некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.***

$$A_{ij} = (-1)^S M_{ij}$$

$$S = i + j$$

В частности, минор элемента a_{11}

определителя третьего порядка найдется по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Его алгебраическое дополнение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

Свойства определителей

1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$$|A| = \left|A^T\right|$$

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5$$

2

Перестановка двух строк или столбцов определителя эквивалентна умножению его на (-1).

Например:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 1 + 1 - 2 - 2 = -5$$

3

Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 12 - 12 - 4 + 4 = 0$$

4

Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 2 - 2 + 4 - 2 = 4$$

Выносим из второй строки множитель 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 1 + 1 - 1 + 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

5

Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответственные элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

<u>Например</u>:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

Первую строку умножаем на 2 и складываем со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 4 + 1 + 8 - 3 = 5$$

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Пример.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Раскладываем определитель по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = A_{32} + A_{33}$$

=

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+6+16-24-3-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+12-16-2-3 = -3$$

Подставляем полученный результат:

$$= 6 + (-3) = 3$$