Лекция

Методы прогнозирования

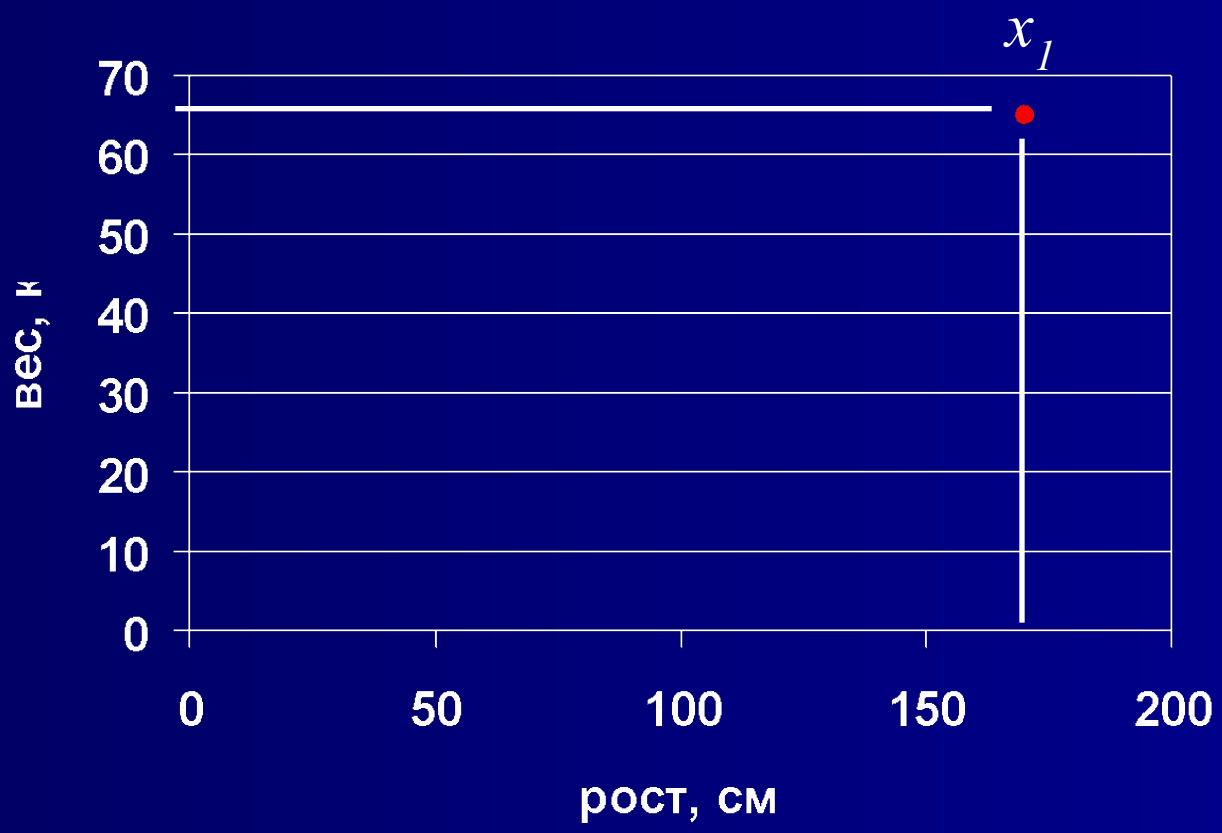
д.б.н. Койчубеков Б.К.

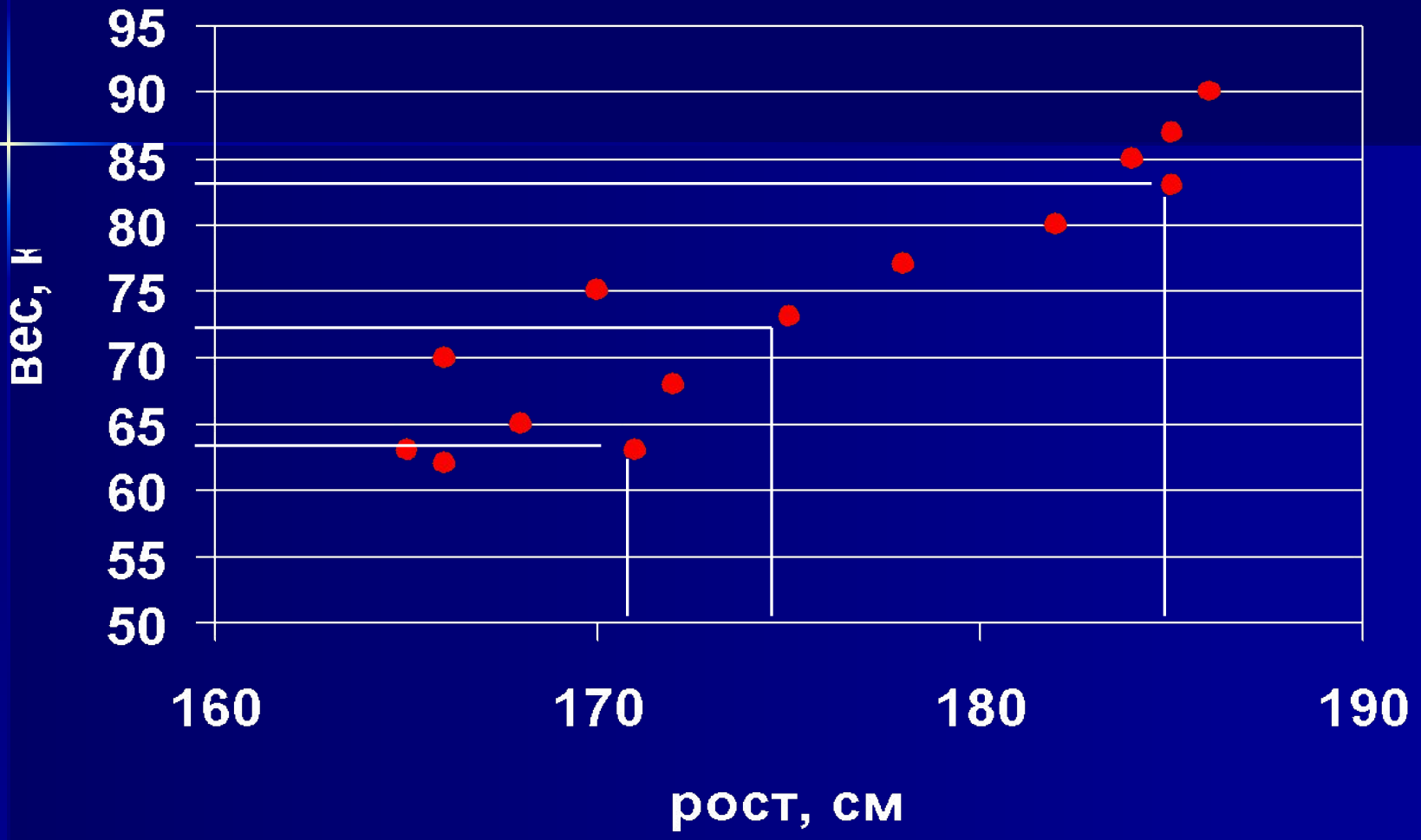
План лекции

- Понятие корреляции
- Прогнозирование на основании уравнения регрессии
- Прогнозирование на основе кривой выживаемости

Какова прогнозируемая смертность в 2015 г. и на чем основан прогноз

- Отложим на графике рост и вес каждого обследованного из 200 жителей




95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
Вес, кг
160
170
180
190
рост, см

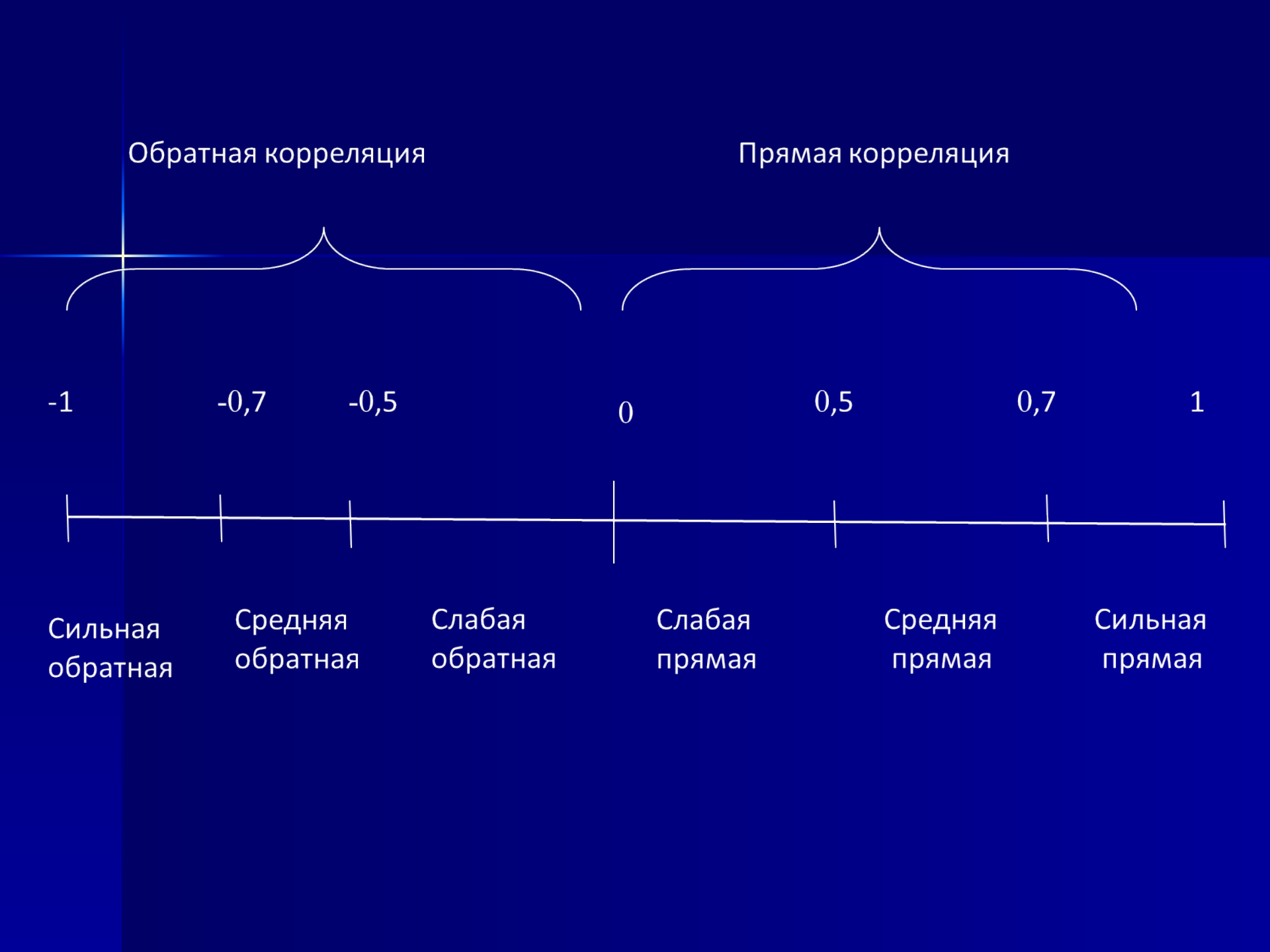
- Из графика видно, что между ростом и весом есть определенная взаимосвязь – чем выше рост, тем больше вес. Эта связь линейная.

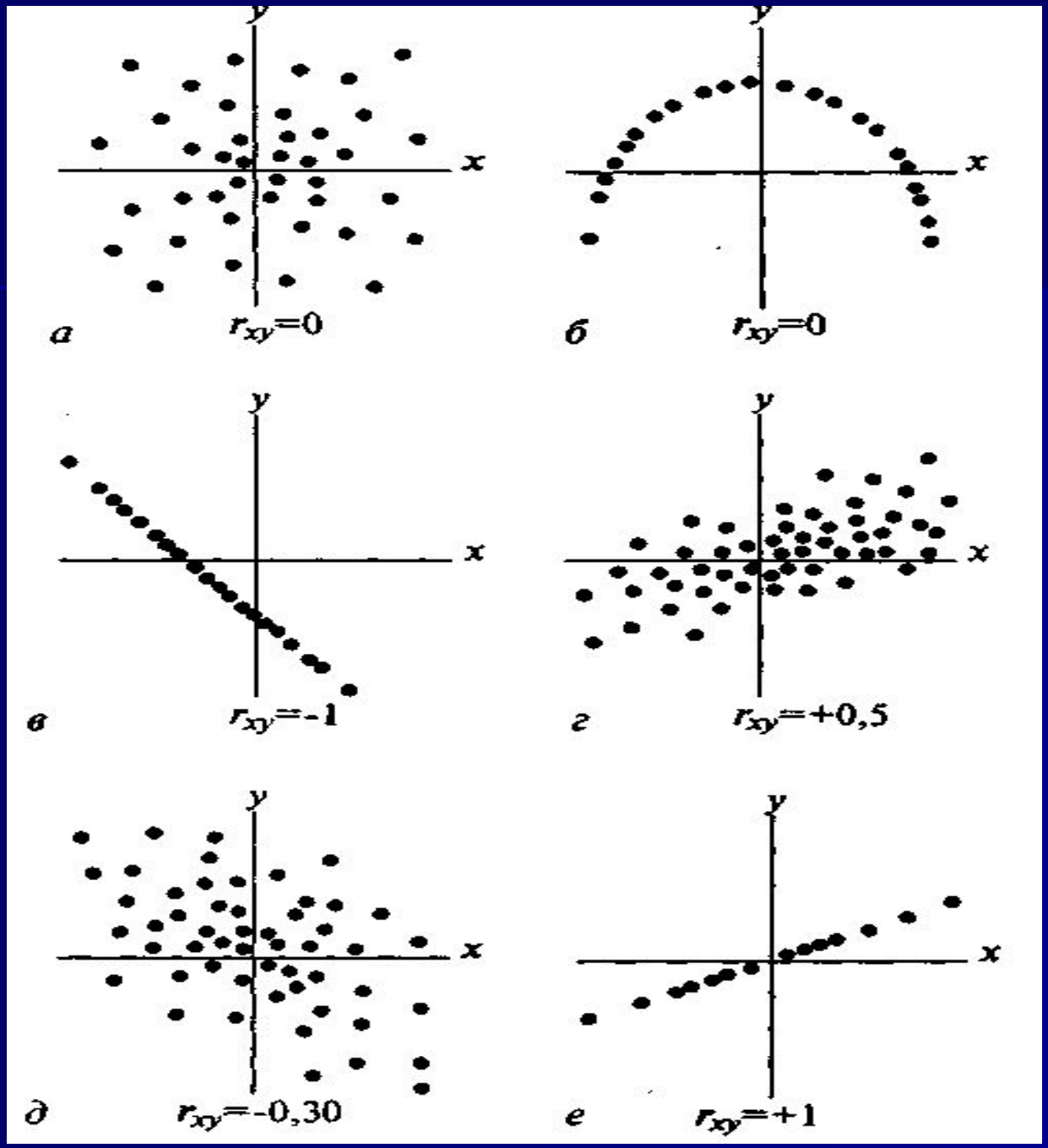
- Степень выраженности связи между вариационными рядами отражает понятие ***корреляциию***
- Связь может быть **слабой, средней, сильной.** Связь может и отсутствовать.
- Количественно взаимосвязь между случайными величинами определяет ***коэффициент корреляции - r***

- Коэффициент корреляции лежит в пределах

$$-1 \leq r \leq 1.$$

- Если $r < 0$, то это означает, что с увеличением величины X_1 соответствующие им значения X_2 второго вариационного ряда в среднем также уменьшаются.
- Если $r > 0$, то с увеличением значений одной величины другая также в среднем возрастает.
- Если $r = 0$, то это означает, что случайные величины X_1 *и* X_2 абсолютно независимы.
- При $r = 1$ между параметрами существует прямо пропорциональная функциональная зависимость (в медико-биологических исследованиях крайне редкий случай).


Обратная корреляция
Прямая корреляция
-1
-0,7
-0,5
0
0,5
0,7
1
Сильная обратная
Средняя обратная
Слабая обратная
Слабая прямая
Средняя прямая
Сильная прямая


y
x
а
r_{xy}=0
б
r_{xy}=0
в
r_{xy}=-1
г
r_{xy}=+0,5
д
r_{xy}=-0,30
е
r_{xy}=+1

Коэффициент корреляции Пирсона

- Для двух случайных величин X_1 *и* X_2 (***n*** **-**объем каждой выборки),

если они **нормально** распределены, их **линейную** взаимосвязь можно вычислить

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{X}_1) \times (x_{2i} - \overline{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{X}_1)^2 \times \sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \overline{X}_2)^2}}$$

Проверка на статистическую значимость

- ***H(0)*: $r=0$**
- Проверяется гипотеза по критерию Стъюдента:
-
- $$t = \frac{r \times \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$
- $t_{крит}$ по таблице для заданного уровня значимости **α** и числа степеней свободы $f=n-2$
- Если $|t_{выч}| \geq t_{крит}$ то принимается *H(1)* и делается вывод, что между величинами существует значимая корреляция.
- Если $|t_{выч}| < t_{крит}$ то принимается *H(0)* и делается вывод о независимости исследуемых величин (коэффициент корреляции незначим).

Если

- выборка мала
- Или распределение выборки не соответствует нормальному
- Или имеем дело с качественными ординальными величинами, то используется **коэффициент корреляции рангов** К. Спирмена

$$r_s = 1 - \frac{6 \times \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n \times (n^2 - 1)}$$

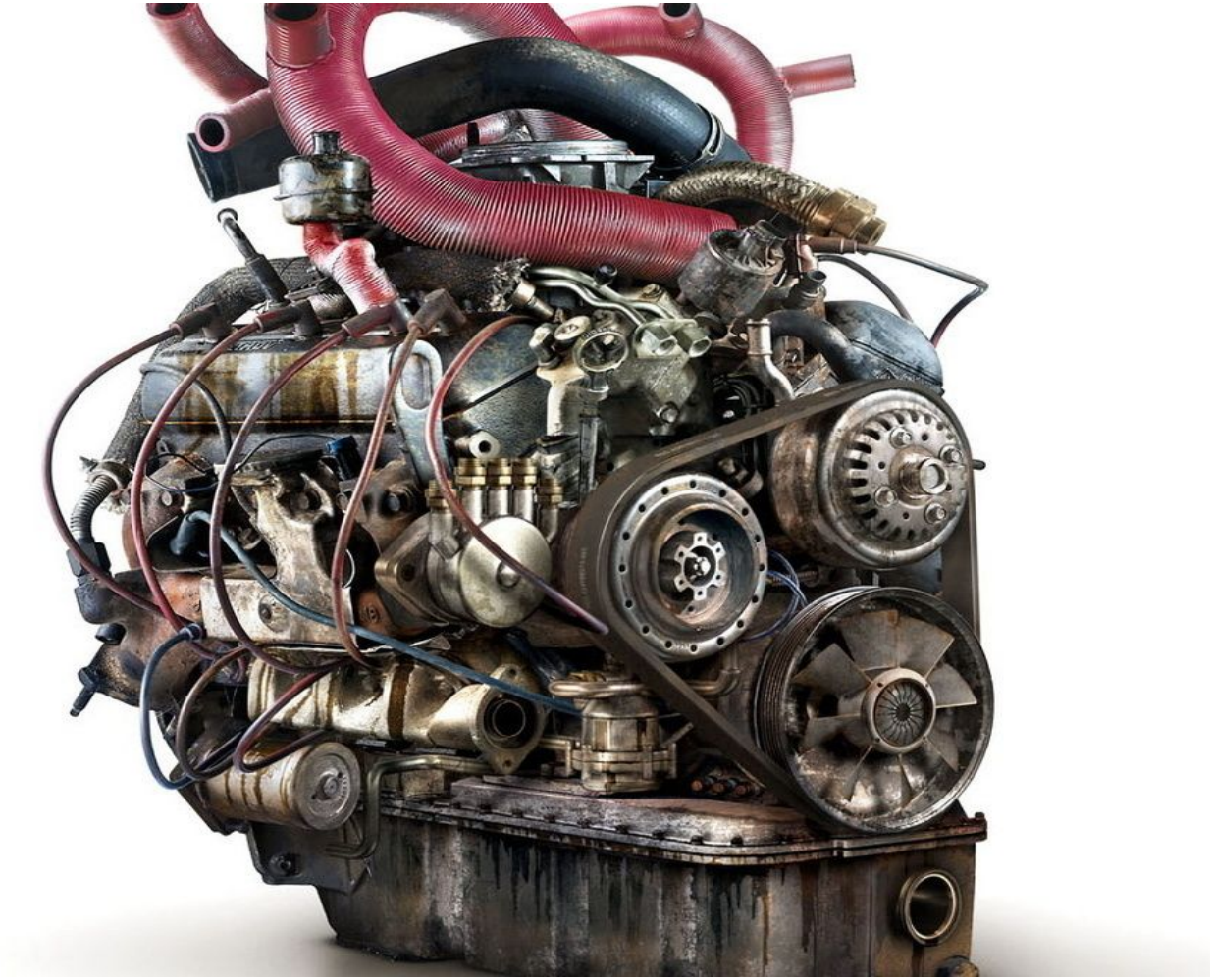
Проверка на статистическую значимость

- Для проверки гипотезы о значимости коэффициента корреляции Спирмена можно воспользоваться таблицей критических значений .
- Если вычисленный коэффициент корреляции превышает табличное значение, то связь между величинами признается достоверной.

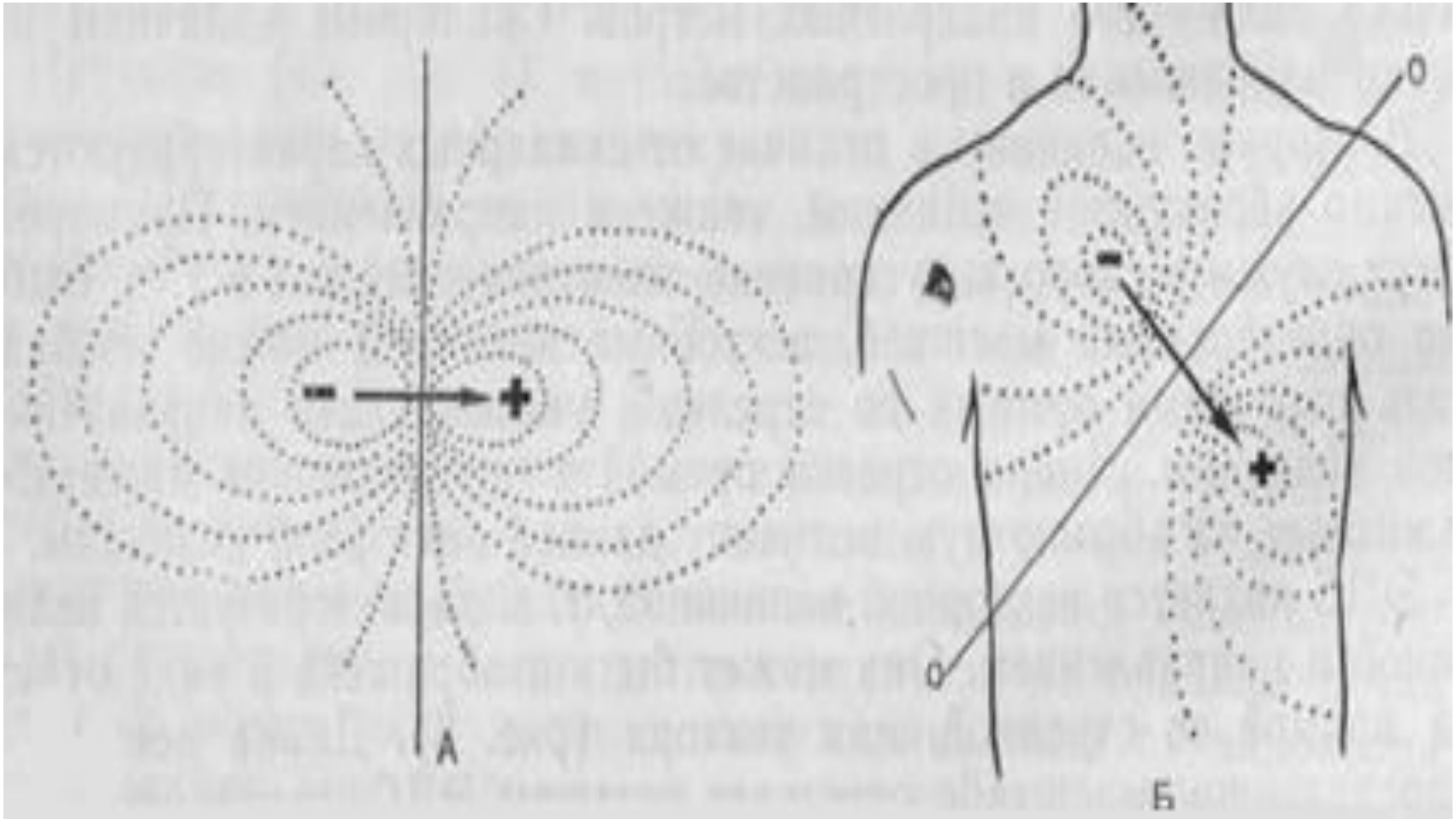
- где d_i — разность между рангами сопряженных признаков, n — число парных членов ряда.
- При полной связи ранги признаков совпадут и разность между ними будет равна 0, соответственно коэффициент корреляции будет равен 1. Если же признаки варьируются независимо, коэффициент корреляции получится равным 0

Регрессионный анализ

Механическая модель сердца



Электрическая модель сердца

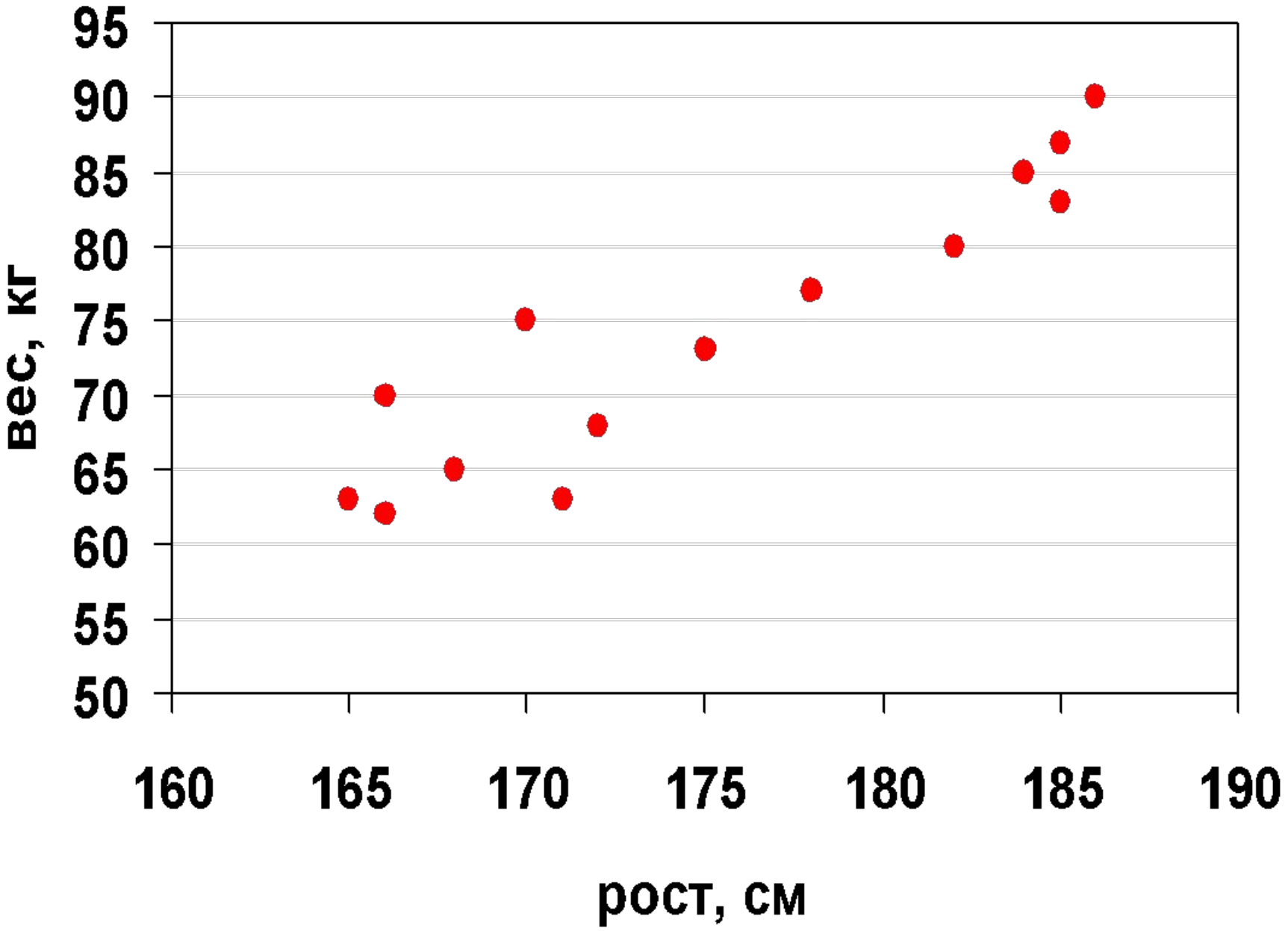


Математическая модель сердца

- **$CO=z*Q*DP*S*T*1333/((T-S)*C_{Э}$**, где:
- z - фактор поправки (отношение длины артериального русла ко всему сосудистому руслу), который лежит в пределах от 0,48 до 0,607 (для человека г в большинстве случаев около 0,6 и потому обычно берут эту величину);
- DP — истинная пульсовая амплитуда,
- S - время изгнания;
- T — время полной сердечной инволюции
- (T — S) — время диастолического периода в секундах;
- $C_{Э}$ — скорость распространения пульсовой волны по артериям эластического типа;
- Q — площадь поперечного сечения аорты.

Вернемся к нашему графику зависимости веса от роста.

Как мы уже указали есть определенная взаимосвязь между этими величинами, которая оценивается коэффициентом корреляции.


95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
вес, кг
160
165
170
175
180
185
190
рост, см

- Из графика видно, что при увеличении роста вес также увеличивается, хотя и не во всех случаях.
- Попытаемся вывести некоторую функцию, связывающую эти величины

$$y = f(x)$$

y - зависимая величина (вес)

x - независимая величина (рост)

- Наиболее простой является линейная функция, которая имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x$$

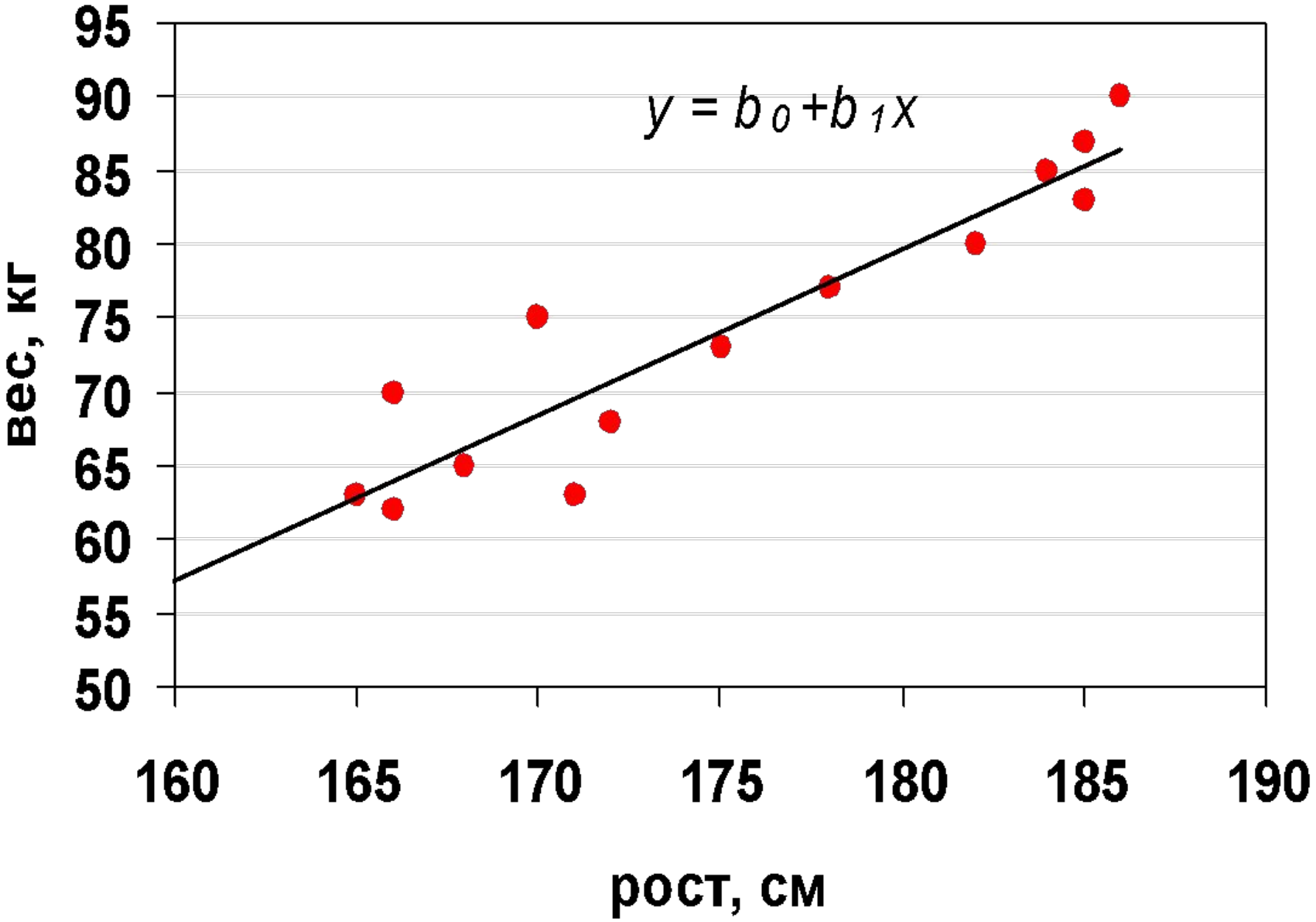
и называется уравнением регрессии

- ***b_0 и b_1*** **-** постоянные коэффициенты

b_1 **– *коэффициент регрессии***

- Иногда запись имеет вид

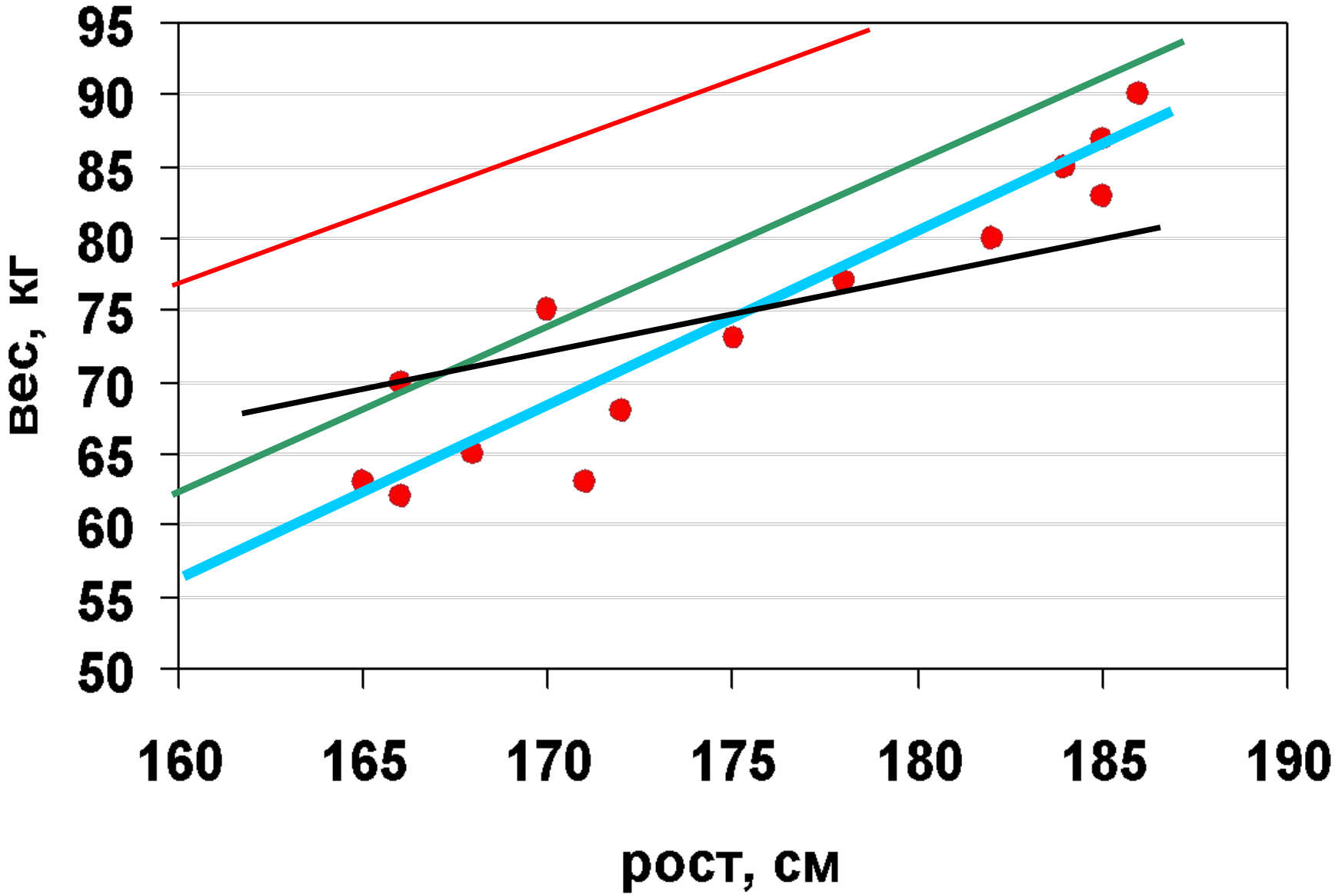
$$y = a + bx$$


y = b 0 +b 1 x
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
вес, кг
160
165
170
175
180
185
190
рост, см

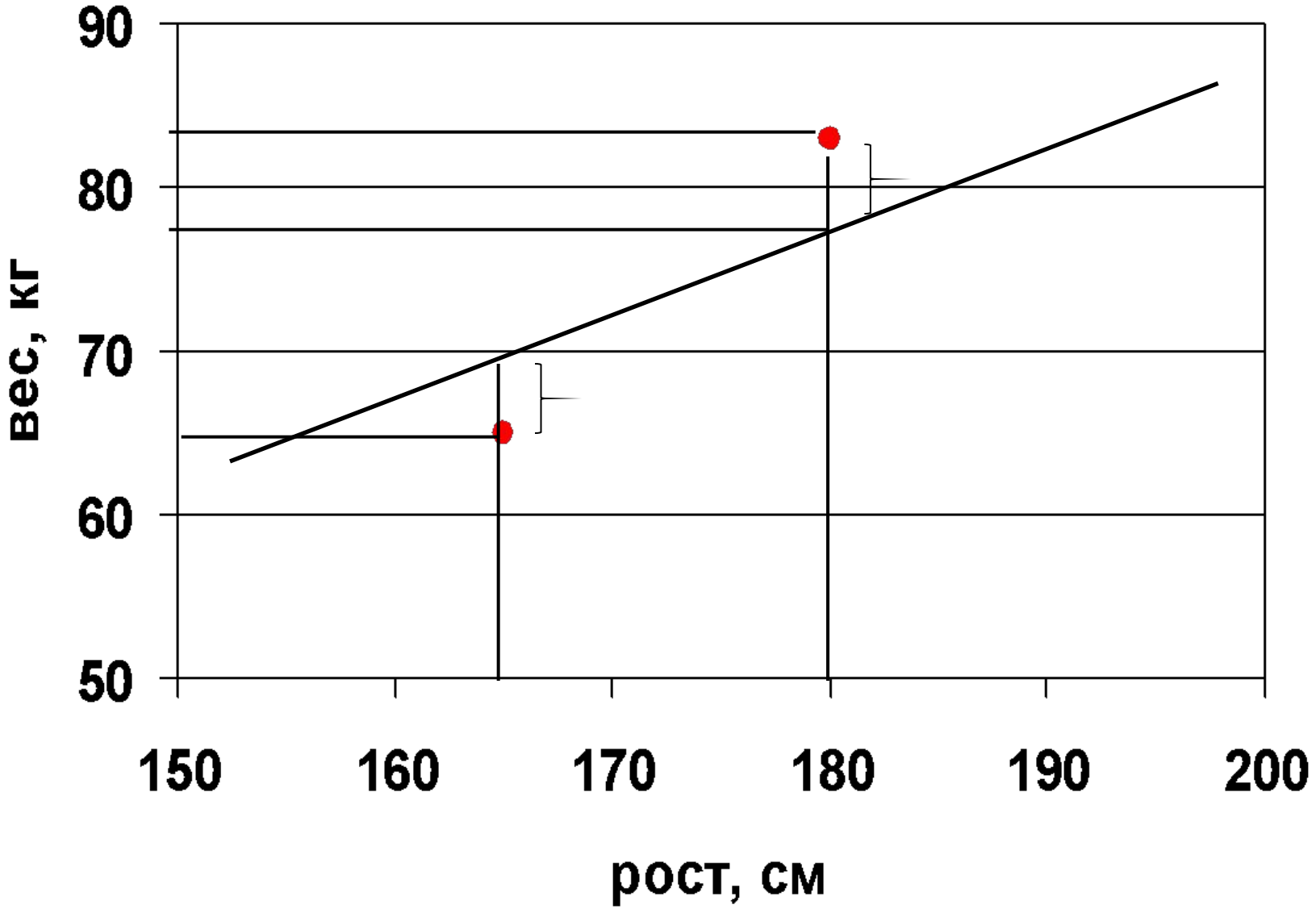
- Это функция показывает как в среднем меняется величина ***y*** при изменении величины ***x***

- Т.е. по этой функции зная величину ***x*** можно вычислить (предсказать) величину ***y***

- Через точки на графике можно провести сколь угодно много прямых


95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
вес, кг
160
165
170
175
180
185
190
рост, см

- Каждая прямая отличается от других значениями коэффициентов b_0 и b_1
- Для выбора наиболее оптимального служит метод наименьших квадратов, который позволяет выбрать такие коэффициенты b_0 *и* b_1, что прямая регрессии наилучшим образом отражает взаимосвязь между изучаемыми величинами


90
80
70
60
50
вес, кг
150
160
170
180
190
200
рост, см

- Из графика видно, что реальные данные и данные, полученные по уравнению отличаются на некоторую величину (т.е. существует отклонение)
- Необходимо выбрать такую линию, чтобы сумма всех отклонений была минимальной

- Полученная функция является математической моделью взаимосвязи двух случайных величин
- Т.к. мы рассмотрели зависимость только от одной независимой переменной x и эта зависимость носит ***линейный*** характер, то такая модель носит название ***простой линейной регрессии***

- Как оценить полученную модель, т.е. насколько хорошо модель отражает взаимосвязь между исследуемыми величинами.
- Можно использовать ***коэффициент детерминации*** $\mathbf{R^2}$

Он показывает сколько процентов исходных (выборочных) данных вписывается в полученную модель

- Если независимых переменных много

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$$

- То возможно построение уравнение множественной линейной регрессии

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \ldots + b_n x_n$$

- Например, вес зависит также от места проживания, типа питания, социального положения, наследственных факторов, хронических заболеваний и т.д.

- Возможны также нелинейные модели

$$y = b_0 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2$$

- Математические модели можно использовать для прогнозирования