УРОК АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА 11 КЛАСС

Тема урока: Свойства корня n- ой степени

Учитель математики
МБУ СОШ №15 г. Тольятти
Михайленко Л.Л.

СВОЙСТВА КОНЯ П - ОЙ СТЕПЕНИ

Теорема 1. *Корень n-й степени ($n = 2, 3, 4, \ldots$) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\sqrt[n]{ab} = x$, $\sqrt[n]{a} = y$, $\sqrt[n]{b} = z$. Нам надо доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z выполняется равенство $x = yz$.

Так как $\sqrt[n]{ab} = x$, то $x^n = ab$. Так как $\sqrt[n]{a} = y$, то $y^n = a$. Так как $\sqrt[n]{b} = z$, то $z^n = b$.

Итак, $x^n = ab$, $y^n = a$, $z^n = b$, тогда $x^n = y^n z^n$, т. е. $x^n = (yz)^n$. Но если степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то равны и основания степеней; значит, из равенства $x^n = (yz)^n$ следует, что $x = yz$, а это и требовалось доказать.

ЗАМЕЧЕНИЕ 1:

Теорема 1 остается справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 2:

Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как это принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a и b — неотрицательные числа, то справедливо равенство* $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. *Если* $a \geqslant 0$, $b > 0$ *и* n *— натуральное число, большее* 1, *то справедливо равенство*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень из частного равен частному корней.*

П р и м е р 1. Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60. \quad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е 3. Можно, конечно, этот пример решить по-другому, особенно если у вас под рукой есть микрокалькулятор: перемножить числа 125, 64 и 27, а затем извлечь кубический корень из полученного произведения. Но, согласитесь, данное выше решение «интеллигентнее».

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $5\frac{1}{16}$ в неправильную дробь: $5\frac{1}{16} = \frac{81}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5. \qquad \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; **б)** $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3}$.

Решение. Первое свойство корней означает, что $\sqrt[3]{ab}$ можно представить в виде $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ и, наоборот, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ можно заменить выражением $\sqrt[3]{ab}$. То же относится и ко второму свойству корней. Учитывая это, выполним вычисления.

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6.$

б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 2.$ ■

Пример 4. Выполнить действия:

а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b}$;   б) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b} = \sqrt[4]{ab^2}$.

б) Теорема 1 позволяет нам перемножать только корни одинаковой степени, т. е. только корни с одинаковым показателем. Здесь же предлагается умножить корень второй степени из числа a на корень третьей степени из того же числа. Как это делать, мы пока не знаем. Вернемся к этой проблеме позднее. ■

Продолжим изучение свойств радикалов.

Теорема 3. *Если $a > 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, *чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Это следствие теоремы 1. В самом деле, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}.$

Теорема 4. *Если $a \geqslant 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[10]{a}$; $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$, $\sqrt[nk]{a} = y$. Тогда $x^n = \sqrt[k]{a}$, откуда следует, что $(x^n)^k = a$, т. е. $x^{nk} = a$. Далее, из $\sqrt[nk]{a} = y$ следует, что $y^{nk} = a$. Таким образом, $x^{nk} = y^{nk}$, значит, $x = y$, что и требовалось доказать.

Замечание 4.

Чему вы научились благодаря доказанным теореции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). А как обстоит дело со сложением и вычитанием корней? Никак. Об этом мы говорили еще в 8-м классе по поводу операции извлечения квадратного корня. Например, вместо $\sqrt[3]{8+27}$ нельзя написать $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}$. В самом деле, $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$, а $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27} = 2+3=5$. Но ведь очевидно, что $\sqrt[3]{35} \neq 5$. Будьте внимательны!

Теорема 5. *Если $a \geqslant 0$ и если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится, т. е.*

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Например:

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 3);

$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого равенства буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}.$$

Обозначим правую часть доказываемого равенства буквой y: $\sqrt[n]{a^{k}} = y$. Тогда по определению корня должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведем обе части последнего равенства в одну и ту же степень p, получим: $y^{np} = a^{kp}$.

Итак, $x^{np} = a^{kp}$, $y^{np} = a^{kp}$.

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволит нам решить ту проблему, с которой мы столкнулись выше при решении примера 4б, где требовалось выполнить умножение корней с разными показателями:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

1) По теореме 5 в выражении $\sqrt{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 2), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 3:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

2) По теореме 5 в выражении $\sqrt[3]{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 3), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 2:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

3) Поскольку получили корни одной и той же шестой степени, их можно перемножить:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Несколько сложнее обстоит дело в случае корней четных степеней. Пусть a и b — отрицательные числа, а n — четное число. В этом случае нельзя писать $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (например, нельзя писать $\sqrt{(-5)(-6)} = \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6}$). Здесь можно рассуждать так: a и b — отрицательные числа, следовательно, $ab > 0$. Но тогда $ab = |ab| = |a| \cdot |b|$. Значит, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|ab|} = \sqrt[n]{|a| \cdot |b|}$. Так как $|a| > 0$ и $|b| > 0$, то по теореме 1

$$\sqrt[n]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

Итак, если n — четное число, а числа a и b имеют одинаковые знаки, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$ и аналогично $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$.

Очень внимательно следует относиться к свойству 5, о котором шла речь в теореме 5. Нельзя применять ее бездумно. Пусть, например, нужно упростить выражение $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^2}$. Если формально разделить показатели корня и подкоренного выражения на 2, получится выражение, не имеющее смысла: $\sqrt{\sqrt{3} - 2}$ (квадратный корень из отрицательного числа). Правильнее в подобных случаях рассуждать так:

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt[4]{|\sqrt{3} - 2|^2} = \sqrt{|\sqrt{3} - 2|} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Еще один пример: нужно умножить $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ на $\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}$. Формальное применение теоремы 5 приведет к неправильному результату $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2(\sqrt{3}+2)}$, поскольку в результате перемножения отрицательного и положительного числа получилось положительное число. Правильнее в подобных случаях рассуждать так:

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{3}+2}=$$

$$=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+2)}=-\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}.$$

Обратите внимание: все опасности, связанные с применением свойства 5, относятся к случаю умножения или деления показателей корня и подкоренного выражения на одно и то же четное число (с нечетными множителями никаких неприятностей не происходит).

СПАСИБО ЗА УРОК