

# Иркутский национальный исследовательский технический университет



А-50 ЛИСКА (изделие «А», по кодификации НАТО: *Mainstay* — «Оплот») — самолёт дальнего радиолокационного обнаружения и управления. Вместе



**Первый полет – 19 декабря 1978 г. ; экипаж – 5 чел.; тактический экипаж – 10 чел.; произведено – 31 шт.; стоимость 330 млн. долл.; объем топлива – 109 тонн; тяга (мощность):  $4 \times 12\,000$  кгс; длина – 48 м; высота – 14,8 м**



**Дальность обнаружения воздушных целей:**

- факелы баллистических нестратегических ракет: 800 км (оптическими средствами)
- бомбардировщиков: до 650 км
- истребителей: 300 км
- крылатых ракет (ЭПР = 1 м<sup>2</sup>): 215 км



- **Дальность обнаружения наземных целей:**
  - **одиночной цели типа пусковой установки оперативно-тактических ракет: до 300 км**
  - **групповой цели типа «колонна танков»: до 250 км**
- **Дальность обнаружения морских целей (с ЭПР 250 м<sup>2</sup>): до радиогоризонта**
- **Количество сопровождаемых воздушных целей: до 300**



• **Диапазон частот:**

- радиотехнической разведки: 0,5~18 ГГц
- радиоразведки: 50~500 МГц

• **Количество управляемых истребителей:**

- командное наведение: 12
- бортовое наведение: 3

# Модуль военно-технической (военно-специальной) подготовки

## Раздел №1. «Воздушные суда, их вооружение и оборудование»

### Тема № 4. Основы радиоэлектроники

Лекция №12. Представление синусоидальных величин комплексными числами. Общие понятия о цепях постоянного, синусоидального и несинусоидального токов. Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением. Электрическая цепь синусоидального тока с катушкой индуктивности. Электрическая цепь синусоидального тока с конденсатором. Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением и катушкой индуктивности. Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением и конденсатором

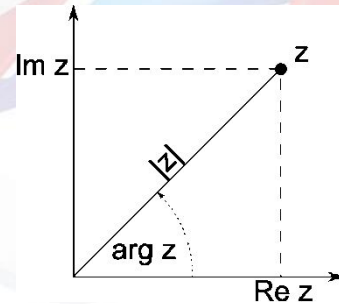
лектор - кандидат физико-математических наук, доцент,  
полковник запаса

**Кобзарь Владимир Анатольевич**

# Применение комплексных чисел для расчетов сложных цепей гармонического тока

**Модуль и аргумент комплексного числа**

Пусть  $z=x+jy$  — комплексное число, где  $x$  и  $y$  — вещественные числа. Числа  $x$  и  $y$  называются соответственно вещественной и мнимой частями  $z$ .



## Переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной

Пусть комплекс сопротивления дан в алгебраической форме записи:

**Модуль комплекса сопротивления  $Z$**

**Аргумент (угол) комплекса сопротивления  $Z$**

Тогда комплекс сопротивления  $Z$  в показательной форме (в форме записи в полярных координатах) будет

$$Z = R + jX = 4 + j3$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{3}{4} = 36,87^\circ$$

$$\underline{Z} = 4 + j3 = 5e^{j36,87^\circ}$$

## Переход от показательной формы записи комплексного числа к алгебраической

Пусть комплексное сопротивление дан в показательной форме записи

$$\underline{Z} = 5e^{j36,87^\circ} = 5 \angle 36,87^\circ = Z \angle \varphi_z$$

Резистивное сопротивление

$$R = Z \cos \varphi = 5 \cos 36,87^\circ = 4$$

Реактивное сопротивление комплекса  $Z$

$$X = Z \sin \varphi = 5 \sin 36,87^\circ = 3$$

Комплексное сопротивление запишется

$$\underline{Z} = R + jX = 4 + j3$$

В общем виде запись 2-х вышеприведенных примеров выглядит:

$$\underline{Z} = 4 + j3 = 5 \cos 36,87^\circ + j5 \sin 36,87^\circ = 5e^{j36,87^\circ}$$



## Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел  $z_1=x_1+jy_1$  и  $z_2=x_2+jy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)$$

## Вычитание комплексных чисел

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+j(y_1-y_2)$$

## Умножение комплексных чисел

$$z=z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$j^2 = -1.$$

## Деление комплексных чисел

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Умножение и деление комплексных чисел удобнее производить в показательной форме записи

### Умножение

При умножении комплексных чисел модули этих комплексных чисел перемножаются, а аргументы (углы) складываются

Пусть

$$Z = 8 \cdot \angle^{j30}$$

$$I = 6 \cdot \angle^{j-15}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } U &= Z \cdot I = \\ &= 8 \cdot \angle^{j30} \cdot 6 \cdot \angle^{j-15} = 48 \cdot \angle^{j15}. \end{aligned}$$

# Представление синусоидальных величин КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

В электротехнике для расчета синусоидальных цепей используется так называемый *комплексный метод расчета* (или операторный метод), основанный на законах Кирхгофа.

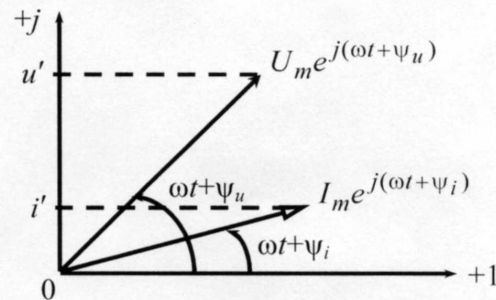
Сущность комплексного метода заключается в замене синусоидальных функций времени векторами, расположенными на комплексной плоскости.

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

Формула Эйлера

Такая замена позволяет применить к решению задач электротехники хорошо разработанный аппарат алгебры комплексных чисел.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



$$I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i) = i'' + j i'$$

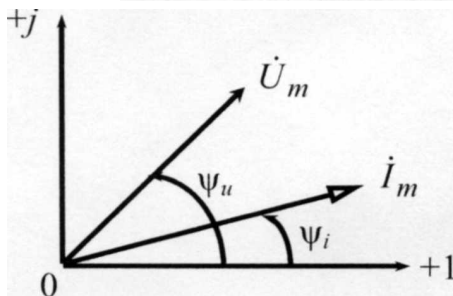
$$U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + j U_m \sin(\omega t + \psi_u) = u'' + j u'$$

$$I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$$

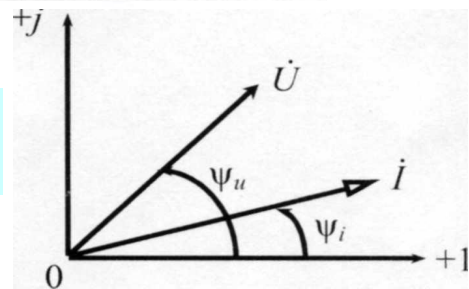
$$U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m \cdot e^{j\psi_u} \cdot e^{j\omega t} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$$

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\psi_i}$$

$$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\psi_u}$$



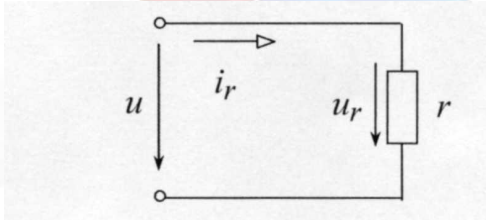
$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



**Пример перехода от оригинала- синусоидальной функции к ее изображению в виде комплексных токов и напряжений**

$$u = 282 \sin(\omega t + 45^\circ), \quad \dot{U}_m = 282 e^{j45^\circ}, \quad \dot{U} = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 200 e^{j45^\circ}$$

# Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением



$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$u_r - u = 0 \quad (2) \quad \text{Закон Кирхгофа}$$

$$u_r = i \cdot r \quad (3)$$

$$i = \frac{u_r}{r} \quad \text{Закон Ома мгновенных значений}$$

$$ir = U_m \cdot \sin \omega t \Rightarrow i = \frac{U_m}{r} \cdot \sin \omega t = I_m \sin \omega t \quad (4),$$

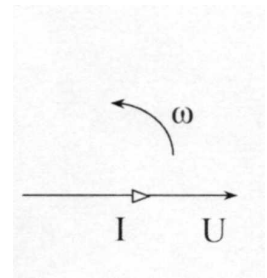
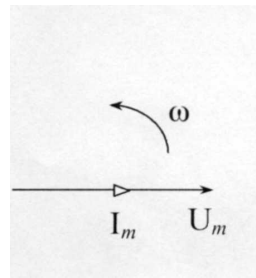
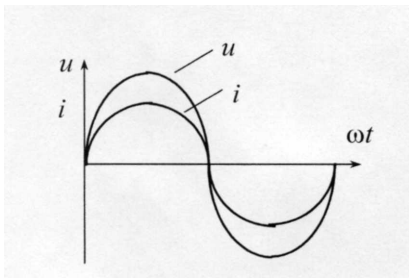
$$\text{где } I_m = \frac{U_m}{r} \quad \text{закон Ома амплитудных значений}$$

Поделив на  $\sqrt{2}$ , получим,

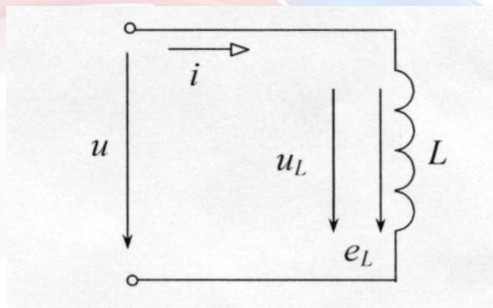
$$I = \frac{U}{r} \quad \text{закон Ома действующих значений}$$

**Сравнивая выражения (1) и (4), видим, что напряжение и ток имеют одинаковые начальные фазы**

**Временной график и векторная диаграмма напряжения и тока для резистора**



# Электрическая цепь синусоидального тока с катушкой индуктивности



$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

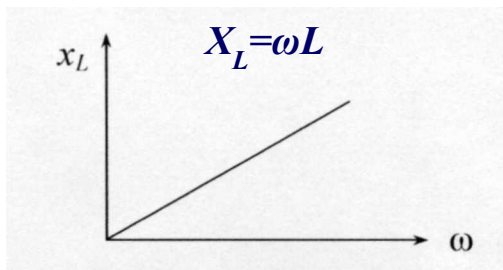
$$u_L - u = 0 \quad (2) - \text{Закон Киргофа}$$

$$u_L = -e_L = -\frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (3), - e_L \text{ ЭДС самоиндукции}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L} \Rightarrow i = \int \frac{u_L}{L} dt, \text{ подставив из (1) } u(2)$$

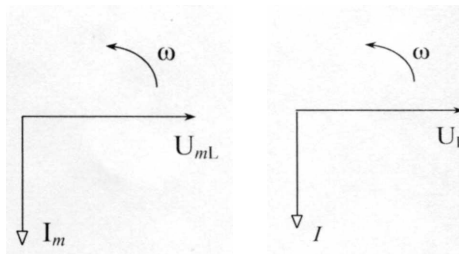
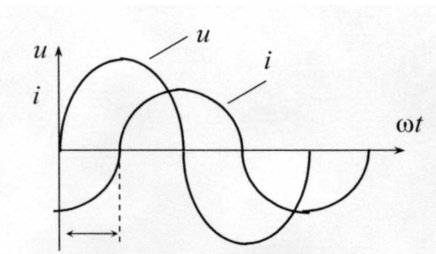
$$i = \int \frac{U_m \cdot \sin \omega t}{L} dt = \frac{-U_m}{\omega L} \cos \omega t = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (3).$$

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{X_L}, \text{ где } X_L - \text{индуктивное сопротивление}$$



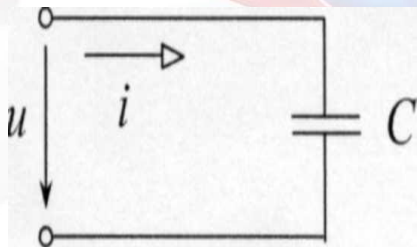
$$I_m = \frac{U_m}{X_L} \quad \text{и} \quad I = \frac{U}{X_L} \quad \text{Законы Ома для амплитудных и действующих значений}$$

**Сравнивая (1) и (3) видно, что ток в катушке индуктивности отстает от приложенного напряжения на  $\pi/2$ .**



**Временной график и векторные диаграммы напряжения и тока для цепи с катушкой индуктивности**

# Электрическая цепь синусоидального тока с конденсатором



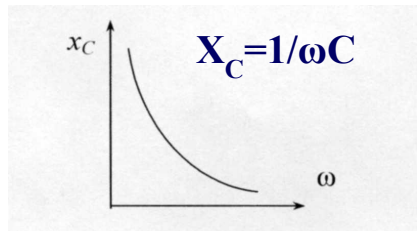
$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{dU_m \cdot \sin \omega t}{dt} = CU_m \frac{d \sin \omega t}{dt} \quad (2),$$

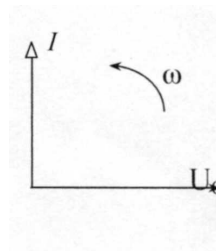
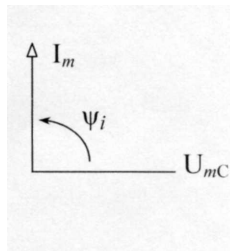
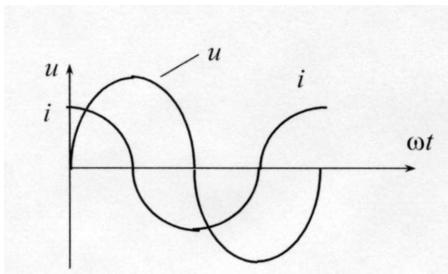
продифференцировав (2) получаем

$$i = CU_m \omega \cos \omega t = CU_m \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

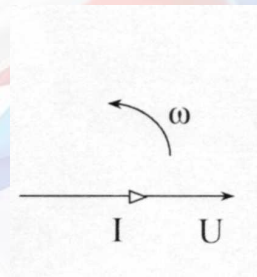
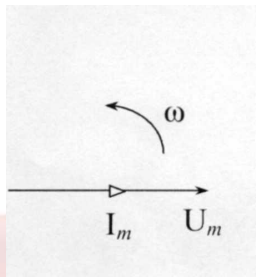
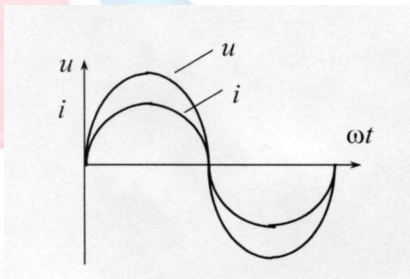
$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C} = \frac{U_m}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \text{ — емкостное сопр.}$$



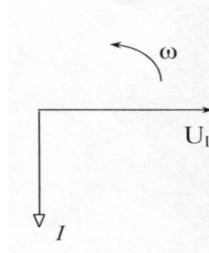
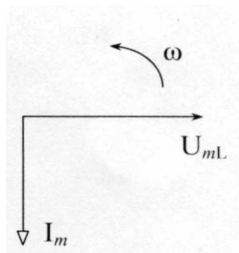
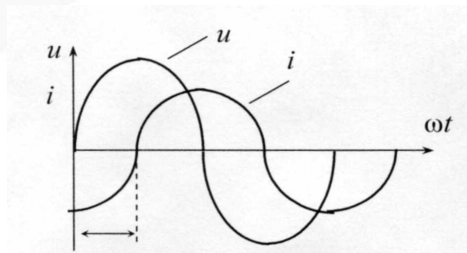
**Сравнив выражения (1) и (3), можно сделать вывод о том, что на участке цепи с конденсатором ток опережает напряжение на угол  $90^\circ$**



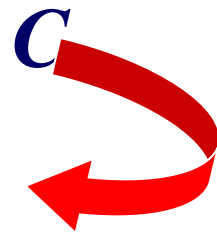
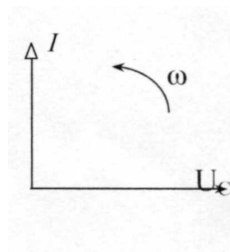
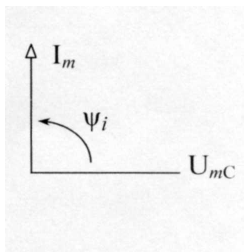
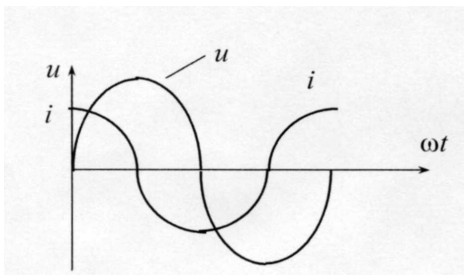
**Временной график и векторные диаграммы напряжения и тока для цепи с конденсатором**



**R**

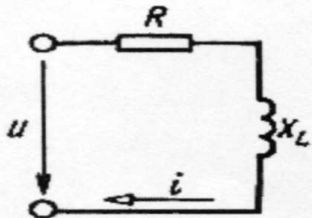


**L**  
Графики и векторные диаграммы



**C**

# Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением и катушкой индуктивности

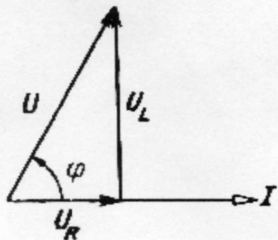


$$i = I_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$U_R = U_{Rm} \cdot \sin \omega t \quad (2)$$

$$U_L = U_{Lm} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

**Треугольник напряжений**

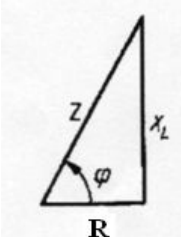


$$U = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

**Треугольник сопротивлений**



$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} - \text{ полное сопротивление цепи}$$

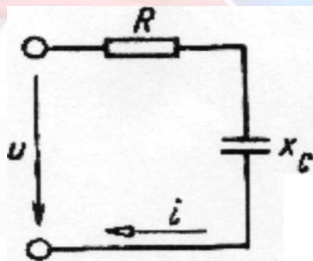
$$I = U / Z \quad \text{закон Ома}$$

$$\text{tg} \varphi = X_L / R \quad \text{или} \quad \cos \varphi = R / Z$$

Для последовательной цепи принято отсчитывать угол  $\varphi$  от вектора тока  $I$ . Поскольку вектор  $U$  сдвинут по фазе относительно вектора  $I$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки, этот угол имеет положительное значение



# Электрическая цепь синусоидального тока с сопротивлением и конденсатором

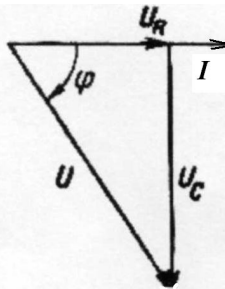


$$i = I_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$U_R = U_{Rm} \cdot \sin \omega t \quad (2)$$

$$U_C = U_{Cm} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

**Треугольник напряжений**

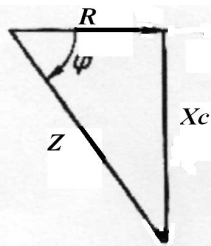


$$U = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_C^2} = I \sqrt{R^2 + X_C^2},$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

**Треугольник сопротивлений**

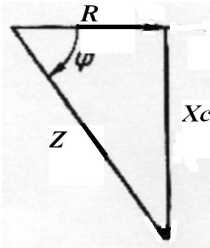
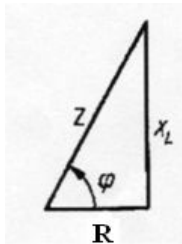
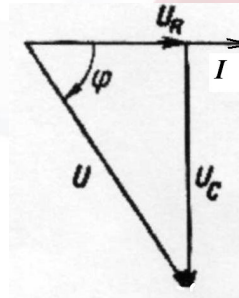
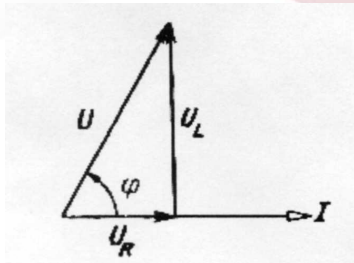
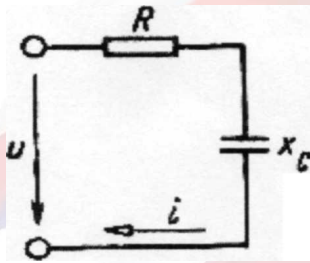
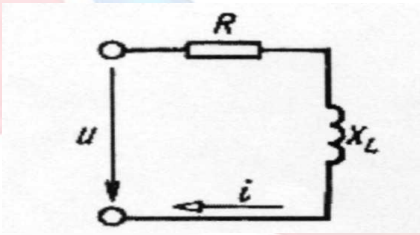


$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} - \text{ полное сопротивление цепи}$$

$$I = U / Z \quad \text{закон Ома}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -X_C / R \quad \text{или} \quad \cos \varphi = R / Z$$

Для последовательной цепи принято отсчитывать угол  $\varphi$  от вектора тока  $I$ . Поскольку вектор  $U$  сдвинут по фазе относительно вектора  $I$  на угол  $\varphi$  по часовой стрелке, то угол имеет отрицательное значение



$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$I = U / Z \quad \text{закон Ома}$$

$$\text{tg} \varphi = X_L / R \quad \text{или} \quad \cos \varphi = R / Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$I = U / Z \quad \text{закон Ома}$$

$$\text{tg} \varphi = -X_C / R \quad \text{или} \quad \cos \varphi = R / Z$$

# ВЫВОДЫ



**В электрической цепи синусоидального тока при наличии реактивных элементов (катушки индуктивности и конденсатора) напряжения и токи не синфазны.**

## Задание на самостоятельную работу

1. Как осуществляется переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и обратно?
2. Что называют суммой (разностью) двух комплексных чисел ?
3. Как осуществить умножение и деление комплексных чисел в показательной форме записи?
4. Какой вид имеет временной график и векторная диаграмма напряжения и тока для резистора?
5. Какой вид имеет временной график и векторные диаграммы напряжения и тока для цепи с катушкой индуктивности?
6. Какой вид имеет временной график и векторные диаграммы напряжения и тока для цепи с конденсатором?
7. Какой вид имеет векторная диаграмма напряжения и тока для цепи с катушкой индуктивности и сопротивлением?
8. Какой вид имеет векторная диаграмма напряжения и тока для цепи с конденсатором и сопротивлением?