Раздел 2.
Векторная алгебра.

Лекции №4, 5.

План

1. Векторы
2. Линейные операции над векторами
3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов
4. Базис на плоскости и в пространстве
5. Проекция вектора на ось
6. Декартов прямоугольный базис. Декартова прямоугольная система координат
7. Деление отрезка в данном отношении
8. Направляющие косинусы вектора
9. Скалярное произведение векторов
10. Векторное произведение векторов
11. Смешанное произведение векторов

1. Векторы

Определение 1. Скаляр– это любое действительное число.

Определение 2. Вектор – это направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, у которого указано, какой конец отрезка является началом, а какой конец отрезка – концом вектора. В соответствии с этим считается, что вектор направлен от своего начала к своему концу.

Для обозначения вектора, у которого точка A – начало, а точка B – конец, используется символ $\overline{AB}$. Могут обозначаться векторы и малыми буквами $\overline{a}$ или a.

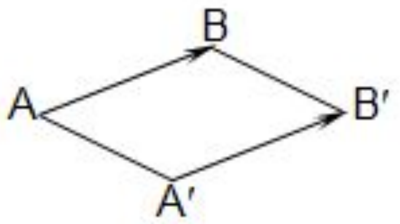

Рисунок 1. Параллельный перенос

Определение3. Параллельным переносом вектора $\overline{AB}$ называется такое его преобразование, при котором вектор $\overline{AB}$ занимает положение $\overline{A'B'}$, так что четырехугольник $ABA'B'$ есть параллелограмм (Рис.1).

Приложить вектор к точке O– это значит произвести такой параллельный перенос этого вектора, чтобы его начало попало в точку O.

Определение 4. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* (или *одинаково направленными*), если при приложении к одной точке они лежат на одной прямой, а их концы находятся по одну сторону от точки приложения. Обозначают сонаправленность знаком $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Очевидно, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$.

Определение 5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *противоположно направленными*, если при приложении к одной точке они лежат на одной прямой, а их концы находятся по разные стороны от точки приложения. Обозначают противоположную направленность знаком $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Очевидно, если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$.

Определение 6. Векторы называются коллинеарными, если они одинаково или противоположно направлены. Обозначают коллинеарность векторов знаком $\|$.

Очевидно, векторы *коллинеарны* тогда и только тогда, когда они лежат на одной или на параллельных прямых.

Определение 7. Векторы называются *компланарными*, если при приложении к одной точке они лежат в одной плоскости.

Определение 8. Длиной (модулем) $|\overline{AB}|$ вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка, изображающего тот вектор.

Определение 9. Два вектора называются *равными*, если у них равны длины и совпадают направления.

Определение 10. Ортом данного ненулевого вектора называется вектор, который направлен одинаково с данным вектором и имеет длину, равную единице.

Определение 11. Нулевым вектором $\bar{0}$ называется точка.

Направление нулевого вектора не определено, его длина равна 0. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору и компланарным любой плоскости. Часто нулевой вектор рассматривают как направленный отрезок, у которого начало и конец совпадают.

Определение 12. Углом между двумя ненулевыми векторами называется меньшая часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки и направленными одинаково с данными векторами.

Ясно, что радианная мера φ угла между двумя векторами всегда заключена между 0 и $\varphi: 0 \le \varphi \le \pi$.

2. Линейные операции над векторами

Для векторов вводятся две линейные операции.

Определение 1. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.2).

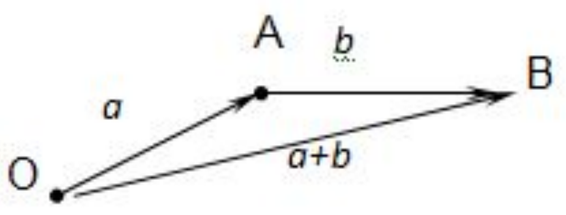

Рисунок 2. Сумма векторов

Приложим вектор к точке O, получим вектор $\overline{OA} = \vec{a}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к точке A, получим вектор $\overline{AB}$. Вектор $\overline{OB}$ назовём суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

Определение 2. Пусть задан вектор $\vec{a}$ и число λ. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, определяемый следующим образом: длина $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda \geq 0$ и $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Противоположным к вектору $\vec{a}$ называется вектор $(-\vec{a})$, имеющий такую же, как и вектор $\vec{a}$ длину, но противоположное вектору $\vec{a}$ направление. Нетрудно видеть, что $(-\vec{a}) = (-1)\cdot\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ назовём сумму векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Теорема 1. $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ при некотором λ.

3. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение 1. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если

$$\left(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0\right) \Rightarrow \left(\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0\right)$$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми.

Теорема 1 (Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов).

1) Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима $\Leftrightarrow$ один из этих векторов есть линейная комбинация остальных.

2) Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ есть нулевой, то они составляют линейно зависимую систему.

Теорема 2. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 3. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Теорема 4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

4. Базис на плоскости и в пространстве

Определение 1. Упорядоченная система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимых векторов лежащих на данной прямой (в данной плоскости, пространстве) называется базисом на этой прямой (на этой плоскости, в пространстве), если любой вектор, лежащий на данной прямой (в данной плоскости, пространстве) представим в виде линейно комбинации векторов этой линейно независимой системы.

Теорема 1. Любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой, образует базис на этой прямой.

Теорема 2. Любая пара неколлинеарных векторов, лежащих в данной плоскости, образует базис на этой плоскости.

Теорема 3. Любая тройка некомпланарных векторов образует базис в пространстве.

Определение 2. Представление вектора в виде линейной комбинации элементов некоторого базиса называется разложением данного вектора по этому базису. Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ базис и $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, то числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе.

Теорема 4. Разложение вектора по базису единственно.

Теорема 5. При сложении векторов одноименные координаты складываются. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Теорема 6.

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

5. Проекция вектора на ось

Определение 1. Осью называется прямая l, на которой задан ненулевой вектор $\vec{e}$, длина которого принята за единицу, а направление считается положительным направлением на прямой. Вектор $\vec{e}$ называется *единичным* вектором (ортом) оси.

Определение 2. Проекцией точки M на ось l называется основание перпендикуляра, M_1 опущенного из этой точки на ось l.

Определение 3. Векторной проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется вектор $\overline{A_1B_1}$, началом и концом которого являются соответственно проекция A_1 начала A и проекция B_1 конца B.

Орт оси образует базис на этой оси. Очевидно, что *координата* x вектора $\vec{a}$, лежащего на этой оси, равна

$$x = \begin{cases} |\vec{a}|, & \text{если } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e} \\ -|\vec{a}|, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e} \end{cases},$$

и $\vec{a} = x\vec{e}$.

Определение 5. Скалярной проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется координата его проекции $\overline{A_1B_1}$ на эту ось.

Теорема 1. Скалярная проекция вектора на ось равна длине этого вектора на косинус угла между этим вектором и ортом оси.

Теорема 2. Скалярная проекция линейной комбинации векторов на ось равна той же линейной комбинации их скалярных проекций.

6. Декартов прямоугольный базис. Декартова прямоугольная система координат

Геометрически построение разложений вектора по базису на плоскости или в пространстве приводит к построению параллелограммов и параллелепипедов. Естественно выбирать такой базис, для которого подобное построение наиболее просто.

Удобнее выбирать такой базис, в котором векторы попарно перпендикулярны (или, как говорят в векторной алгебре, попарно ортогональны) и имеют длины, равные единице.

Пусть. А – произвольная точка плоскости. Вектор $\overline{OA}$ называется радиусом –вектором точки A, а его координаты - координатами точки A. принято писать $A(x, y)$. Нетрудно видеть, что абсцисса x точки A есть скалярная проекции вектора $\overline{OA}$ на ось OX, а ордината y точки A есть скалярная проекция вектора $\overline{OA}$ на ось OY.

Теорема 1. Если заданы координаты точек. А и B, т.е. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ равны $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ соответственно: $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$.

В пространстве прямоугольную систему координат образует упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в общей точке. О, называемой *началом системы координат*. Также как в плоском случае радиусом-вектором точки A называется вектор $\overline{OA}$, а координаты вектора $\overline{OA}$ называются координатами точки A. Теперь у каждой точки три координаты-абсцисса, ордината и аппликата, которые равны скалярным проекциям вектора $\overline{OA}$ на оси OX, OY и OZ соответственно.

Как и в плоском случае, для того чтобы найти координаты вектора с заданными началом и концом, нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала: если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Используя прямоугольные координаты, легко получить формулу вычисления длины вектора.

В пространстве, если $\vec{a} = \{x, y, z\}$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Легко получить и формулу длины отрезка с концами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Так как

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

то

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

7. Деление отрезка в данном отношении

Задача о делении отрезка в данном отношении заключается в следующем. Пусть задан ненулевой отрезок AB. Требуется на отрезке AB найти точку M так, чтобы для заданного числа λ выполнялось условие $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$.

Введём систему координат $OXYZ$.

Теорема 1. Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда искомая точка M имеет координаты $M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

Особый интерес представляет случай, когда точка M является серединой отрезка AB, т.е. $\lambda = 1$. В этом случае мы получаем формулы $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$, т.е. координаты середины отрезка являются полусуммами координат концов отрезка.

В плоском случае точка M имеет только две координаты, которые находятся по тем же формулам.

8. Направляющие косинусы вектора

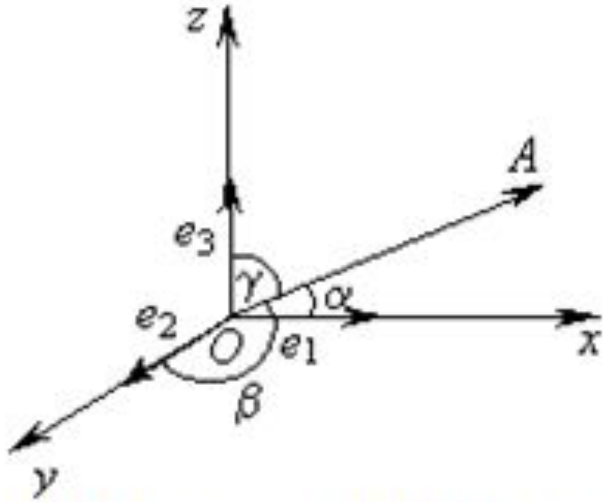

Рисунок 3 – Направляющие косинусы вектора

Пусть задана система координат $OXYZ$ и вектор $\vec{a} = \overline{OA} = \{x, y, z\}$ (рис.3).

Пусть $\alpha = \left(\vec{a}, \hat{\vec{e}_1}\right)$, $\beta = \left(\vec{a}, \hat{\vec{e}_2}\right)$, $\gamma = \left(\vec{a}, \hat{\vec{e}_3}\right)$- углы между вектором a и ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x = |\vec{a}| \cos\alpha \\ y = |\vec{a}| \cos\beta \\ z = |\vec{a}| \cos\gamma \end{cases}.$$

Возводя правые и левые части этих равенств в квадрат и складывая, получим равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, называемое *теоремой о направляющих косинусах.*

9. Скалярное произведение векторов

Определение 1. Скалярным произведением любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

где $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$-угол между этими векторами.

К понятию скалярного произведения мы приходим, изучая работу постоянной силы, действующей на прямолинейно перемещающуюся точку M. Как известно из физики, работа A силы $\overline{F}$ на перемещении $\overline{s}$ определяется равенством $A = |\overline{F}||\overline{s}|\cos\varphi$, где φ - угол, который составляет сила $\overline{F}$ с перемещением $\overline{s}$ точки M.

Условимся считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору.

Теорема 1.

1) $(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны);

2) $(\vec{a},\vec{b})>0 \Leftrightarrow \varphi$ – острый;

3) $(\vec{a},\vec{b})<0 \Leftrightarrow \varphi$ – тупой;

4) $(\vec{a},\vec{a})=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\geq 0$, $(\vec{a},\vec{a})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.

Теорема 2. (Законы скалярного произведения).

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (коммутативность);

2) $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$ (однородность);

3) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b})$ (аддитивность).

Свойства 2 и 3 называются линейностью скалярного произведения по первому аргументу.

Введём теперь систему координат $OXYZ$. Очевидно, для ортов координатных осей справедливы равенства:

$$\vec{i}^{\,2}=1,\quad \vec{j}^{\,2}=1,\quad \vec{k}^{\,2}=1,\quad (\vec{i},\vec{j})=0,\quad (\vec{i},\vec{k})=0,\quad (\vec{j},\vec{k})=0.$$

Теорема 3. Пусть $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$. Тогда

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Следствие 1. Пусть φ- угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, каждый из которых отличен от нуля. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

10. Векторное произведение векторов

Как понятие скалярного произведения возникает из понятия работы, так понятие векторного произведения возникает из понятия момента силы.

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O. Пусть к точке M этого тела приложена сила $\overline{F}$. Из физики известно, что воздействие этой силы $\overline{F}$ на тело с неподвижной точкой O характеризуется особой векторной величиной $\overline{L_0}$, которая называется моментом силы $\overline{F}$ относительно точки O. Модуль момента равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OM}$ и $\overline{F}$. Направлен момент $\overline{L_0}$ по перпендикуляру к плоскости, проходящей через точку O и силу $\overline{F}$, в ту сторону, откуда вращение тела вокруг точки O, вызываемое силой $\overline{F}$, видно происходящим против хода часовой стрелки. Момент силы $\overline{F}$ относительно точки O и называется векторным произведением вектора $\overline{OM}$, соединяющего точку O с точкой M приложения силы, и вектора силы $\overline{F}$.

Определение 1. Рассмотрим в пространстве упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой (левой), если наименьший поворот вектора $\vec{a}$ до совмещения его с вектором $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против хода (по ходу) часовой стрелки.

Определение 2 .Пусть имеется упорядоченная пара векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ равно нулю. В противном случае векторным произведением $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{n}$, длина и направление которого задаются условиями:

$$|\vec{n}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi, \quad \varphi = \left(\hat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$$

$$n \perp a, \; n \perp b.$$

a, b, n – правая тройка.

Из определения векторного произведения следует, что модуль векторного произведения $\vec{n} = \left|\vec{a}, \vec{b}\right|$ ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из определения векторного произведения также следует, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Теорема 1 (Законы векторного произведения).

1) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность);

2) $[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}]=[\vec{a}_1,\vec{b}]+[\vec{a}_2,\vec{b}]$ (аддитивность).

3) $[\alpha\vec{a},\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$..

Свойства 2) и 3) называются линейностью векторного произведения по первому аргументу.

Следствие 1. $[\alpha\vec{a},\beta\vec{b}]=\alpha\beta[\vec{a},\vec{b}]$.

Введём теперь СК $OXYZ$. Очевидно, для ортов координатных осей справедливы равенства:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Теорема 2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами: $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда вектор $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=\{x, y, z\}$, где

$$x=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad z=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Для вычисления координат x, y, z можно использовать разложение по первой строке определителя матрицы, составленной из базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Следствие 2. Зная координаты векторного произведения, можно получить формулу для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\square}=|[\vec{a},\vec{b}]|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Замечание 2. Векторы $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ можно рассматривать лежащими на плоскости *OXY*. Тогда координаты $z_1 = z_2 = 0$, и для площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы получаем формулу:

$$S_{\square} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = | x_1 y_2 - x_2 y_1 |.$$

11. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим упорядоченную тройку векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Определение 1. Смешанным произведением $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, определяемое следующим образом: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, т.е. векторно перемножаем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и полученный вектор скалярно умножаем на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение есть скаляр. Выясним его геометрический смысл.

Определение 2. Объёмом ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называется число, обозначаемое $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$, и равное объёму этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая, и со знаком минус, если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

Геометрический смысл смешанного произведения даёт следующая терема.

Теорема 1. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = <\vec{a},\vec{b},\vec{c}>$.

Наряду с параллелепипедом можно рассматривать ориентированный тетраэдр (рис.4), и тогда для объёма $V_{ор}$ ориентированного тетраэдра будет справедлива формула

Рисунок 4. Ориентированный тетраэдр.

$$V_{ор} = \frac{1}{6}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Введём прямоугольную систему координат $OXYZ$.

Теорема 2. Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta,$$

т.е. смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равно определителю матрицы, строками которой являются координаты векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Знак определителя определяет ориентацию тройки: "+" – правая, "–" – левая ориентация.

Пример Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(5;\ 6;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 10)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, совпадающие со сторонами треугольника

$$\overline{AB}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k},\quad \overline{AC}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+9\mathbf{k}.$$

Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах, то площадь треугольника будет равна половине модуля векторного произведения $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

Находим сначала

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 9\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 9\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 9\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=$$
$$=31\mathbf{i}-17\mathbf{j}-21\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|31\mathbf{i}-17\mathbf{j}-21\mathbf{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{31^2+17^2+21^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1691}\ \textit{кв. ед.}$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение геометрического вектора
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются компланарными?
4. Условия равенства двух векторов.
5. Как определяется длина вектора?
6. Какой вектор называется ортом?
7. Как определяется вектор суммы двух векторов?
8. Как определяется произведение вектора $\vec{a}$ на число λ?
9. Условие коллинеарности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
10. Дайте определения линейно зависимой и независимой систем векторов.
11. Что называется базисом? Как определяются координаты вектора?
12. Как определяется векторная проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l?
13. Что такое направляющие косинусы вектора? Приведите теорему о направляющих косинусах.
14. Дайте определение скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
15. Приведите основные свойства скалярного произведения $(\vec{a},\vec{b})$.

16. Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.

17. Как найти скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$, если известны координаты векторов: $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

18. Какая тройка векторов называется правой, а какая - левой?

19. Дайте определение векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

20. Геометрический смысл модуля векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$.

21. Записать формулы для нахождения координат вектора $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$, зная координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

22. Приведите основные свойства векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

23. Дайте определение смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

24. Приведите основные свойства векторного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

25. Геометрический смысл смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

26. Условие компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, М: Гос. изд-во Юрайт, 2017.
2. Егоров В.В., Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф., Головачёва В.Н. Математика. Часть I (для студентов горного профиля), изд-во КарГТУ, 2015.
3. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2016.
4. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 2: Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
5. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 3: Функции многих переменных. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
6. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 4: Ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2018.

7. Мустафина Л.М., Швейдель А.П. Индивидуальные задания для СРС и СРСП по математике для студентов технических специальностей. Часть II, Изд-во КарГТУ, Караганда, 2010.

8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, Спб.: Лань, 2019.

9. Рябушко А.П., Индивидуальные задания по высшей математике: Т-1,2, 3, Минск: Высшая школа, 2013.

10. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, т.1-2., М.: Мир и образование, 2016.

11. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие, Спб.: Лань, 2019.

12. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, Спб.: Лань, 2010.

13. Демидович Б.П. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений, М.: Транспортная компания, 2016.

Список дополнительной литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т.1-3. Спб.: Лань, 2018.

2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, М.: Айрис-пресс, 2013.