

Тема 5.  
Транспортная задача.

# Транспортная задача

В  $m$  пунктах производится некоторый однородный продукт в количествах соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц. Этот продукт следует доставить в  $n$  заданных пунктов назначения, потребляющих его в количествах соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц.

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из  $i$ -ого пункта производства в  $j$ -ый пункт назначения (потребления) равна  $c_{ij}$ , а соответствующее количество единиц перевозимого продукта равно  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

# Общая постановка задачи

## Производство продукции

1-ый поставщик –  $a_1$  единиц продукции  
2-ый поставщик –  $a_2$  единиц продукции  
.....  
 $i$ - ый поставщик –  $a_i$  единиц продукции  
.....  
 $m$  -ый поставщик –  $a_m$  единиц продукции



## Потребление продукции

1-ый пункт –  $b_1$  единиц продукции  
2-ый пункт –  $b_2$  единиц продукции  
.....  
 $j$ - ый пункт –  $b_j$  единиц продукции  
.....  
 $n$  -ый пункт –  $b_n$  единиц продукции



# Общая постановка задачи

## Матрица транспортных расходов

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \boxtimes & c_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ c_{m1} & \boxtimes & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$c_{ij}$  – стоимость перевозки из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт назначения

## План перевозок

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \boxtimes & x_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ x_{m1} & \boxtimes & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$x_{ij}$  – количество единиц перевозимого продукта из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт назначения

# Ограничения

План называется **допустимым**, если  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  удовлетворяют следующим естественным условиям:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

из  $i$ -го пункта производства перевозится по всем  $j=1,2,\dots,n$  пунктам назначения

в  $j$ -й пункт назначения поступила продукция из всех  $i=1,2,\dots,m$  пунктов производства

То есть, все что произведено – перевезено потребителям, а то что требовалось поставщикам – доставлено.

# Сведение к задаче линейного программирования

**Транспортная задача** состоит в отыскании среди допустимых планов перевозок оптимального, то есть такого, по которому общая стоимость перевозок минимальна. Для этого необходимо найти **минимум** целевой функции:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

Необходимое условие совместности

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

# Сведение к задаче линейного программирования

**Транспортная задача** является задачей линейного программирования и может быть решена **симплекс-методом**, но в силу специфики ограничений для ее решения созданы и менее громоздкие алгоритмы (**метод потенциалов**, венгерский метод).

В данной работе необходимо сначала решить задачу численно в Excel, а затем провести ручной счет по методу потенциалов, используя в качестве первоначального плана распределение по методу наименьшей стоимости или северо-западного угла.

# Задание

Есть три поставщика с мощностями  $a, b, c$  и пять потребителей (их спрос  $f, g, h, m, n$  соответственно). Стоимость доставки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю задается матрицей  $\begin{pmatrix} i & p & s & w & x \\ k & q & t & e & y \\ l & r & v & d & z \end{pmatrix}$ .

Найти оптимальный план поставок.

В предыдущих обозначениях:

$$a_1 = a,$$

$$a_2 = b,$$

$$a_3 = c$$

$$b_1 = f,$$

$$b_2 = g,$$

$$b_3 = h,$$

$$b_4 = m,$$

$$b_5 = n$$



# Заполняем таблицу с исходными данными в соответствии с вариантом

	A	B	C	D	E	F
1	Производители	Потребители f,g,h,m,n				
2	a,b,c	20	26	16	38	20
3	40	2	3	6	8	7
4	35	5	9	5	7	2
5	45	1	4	3	7	3

Объем потребления

Объем производства

Матрица транспортных расходов

# Проверка условия совместности

Необходимое условие совместности

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Производители	Потребители f,g,h,m,n					
2	a,b,c	20	26	16	38	20	120
3	40	2	3	6	8	7	
4	35	5	9	5	7	2	
5	45	1	4	3	7	3	
6	120						


=СУММ(B2:F2)

=СУММ(A3:A5)

# Последовательность действий

Выделяем в любом месте таблицу такого же размера, как матрица затрат

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Производ	Потребители f,g,h,m,n						
2	ители	20	26	16	38	20	120	
3	40	2	3	6	8	7		
4	35	5	9	5	7	2		
5	45	1	4	3	7	3		
6	120							
7								
8								
9								
10								
11								
12		План перевозок						
13								
14								
15								
16								
17								



# Последовательность действий

Выделяем любую пустую ячейку для искомой величины  $Z_{\min}$   
(минимальной стоимости перевозки продукции)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Производ	Потребители f,g,h,m,n					
2	ители	20	26	16	38	20	120
3	40	2	3	6	8	7	
4	35	5	9	5	7	2	
5	45	1	4	3	7	3	
6	120						
7							
8							
9					zmin=		
10							
11							
12		План перевозок					
13							
14							
15							
16							
17							

Вводим в нее формулу:

`=СУММПРОИЗВ(B3:F5;B15:F17)`

# Последовательность действий

Ставим курсор на ячейку сверху от верхней левой ячейки таблицы плана перевозок (ячейка **B14**)

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Производ	Потребители f,g,h,m,n						
2	ители	20	26	16	38	20	120	
3	40	2	3	6	8	7		
4	35	5	9	5	7	2		
5	45	1	4	3	7	3		
6	120							
7								
8								
9					zmin=	0		
10								
11								
12			План перевозок					
13								
14		=СУММ(B15:B17)						
15								
16								
17								

Вводим в нее формулу:

=СУММ(B15:B17)

# Последовательность действий

	A	B	C	D	E	F	G
1	Производ	Потребители f,g,h,m,n					
2	ители	20	26	16	38	20	120
3	40	2	3	6	8	7	
4	35	5	9	5	7	2	
5	45	1	4	3	7	3	
6	120						
7							
8							
9					zmin=	0	
10							
11							
12		План перевозок					
13							
14		0	0	0	0	0	
15							
16							
17							

Протягиваем формулу из ячейки B14 до F14

# Последовательность действий

Ставим курсор на ячейку **слева** от верхней левой ячейки таблицы плана перевозок (**ячейка A15**)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Произво	Потребители f,g,h,m,n					
2	дители	20	26	16	38	20	120
3	40	2	3	6	8	7	
4	35	5	9	5	7	2	
5	45	1	4	3	7	3	
6	120						
7							
8							
9					zmin=	0	
10							
11							
12		План перевозок					
13							
14		0	0	0	0	0	
15	=СУММ(B15:F15)						
16							
17							

Вводим в нее формулу:



# Последовательность действий

	A	B	C	D	E	F	G	
1	Произво	Потребители f,g,h,m,n						
2	дители	20	26	16	38	20	120	
3	40	2	3	6	8	7		
4	35	5	9	5	7	2		
5	45	1	4	3	7	3		
6	120							
7								
8								
9					zmin=	0		
10	Протягиваем формулу							
11	из ячейки A15 до A17							
12		План перевозок						
13								
14		0	0	0	0	0		
15	0							
16	0							
17	0							
18								



# Поиск решения (Вкладка Данные → Поиск решения)

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:  ←

До:  Максимум  Минимум  Значения:

Изменяя ячейки переменных:  
 ←

В соответствии с ограничениями:

$A\$15:A\$17 = A\$3:A\$5$   
 $B\$14:F\$14 = B\$2:F\$2$   
 $B\$15:F\$17 = \text{целое}$   
 $B\$15:F\$17 \geq 0$

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:  Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Добавление ограничения

Ссылка на ячейки:  Ограничение:

←

# Указание на форму отчета

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение

Восстановить исходные значения

Вернуться в диалоговое окно параметров

Отчеты со

**Отчеты**

Результаты

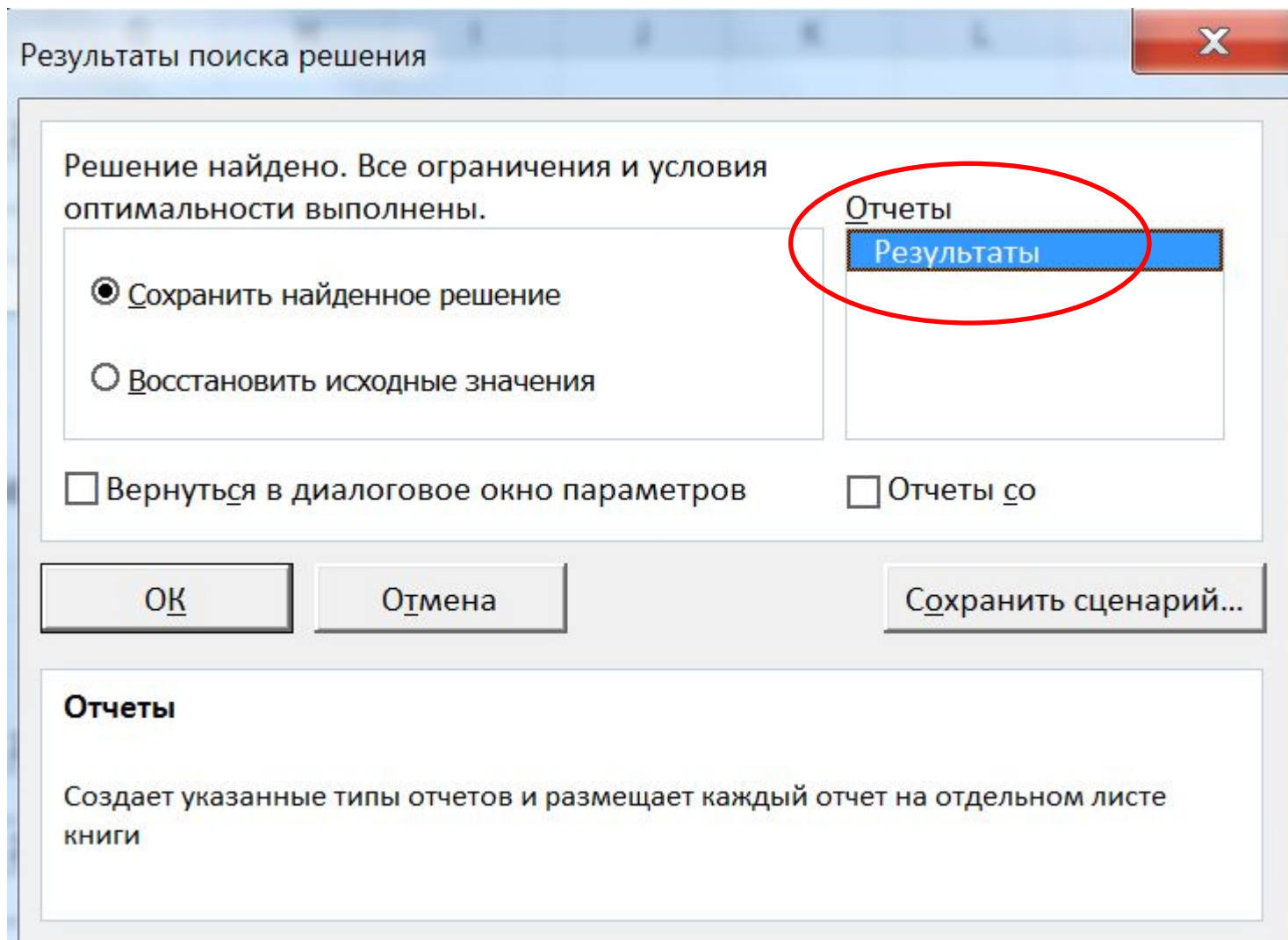
ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

**Отчеты**

Создает указанные типы отчетов и размещает каждый отчет на отдельном листе книги



# Результат

	A	B	C	D	E	F	G
1	Произво	Потребители f,g,h,m,n					
2	дители	20	26	16	38	20	120
3	40	2	3	6	8	7	
4	35	5	9	5	7	2	
5	45	1	4	3	7	3	
6	120						
7							
8							
9					zmin=	466	
10							
11							
12		План перевозок					
13							
14		20	26	16	38	20	
15	40	3	26	0	11	0	
16	35	0	0	0	15	20	
17	45	17	0	16	12	0	

Минимальная стоимость перевозки

Оптимальный план

# Задание для ручного счета

На основе лекционного материала:

1. составить первоначальный план распределения двумя способами
  - а) **методом наименьшей стоимости**
  - б) **методом северо-западного угла**
2. Используя **метод потенциалов**, найти оптимальный план. В качестве первоначального плана использовать распределение, полученное методу **наименьшей стоимости**.