

## 2. Дифференцируемость функций нескольких переменных

### 2.1 Частные производные функций нескольких переменных.

Пусть задана функция  $n$ -переменных  $u = f(x)$ ,  $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ ; пусть  $x^0$  – внутренняя точка множества  $M$ . Придадим  $k$ -тому аргументу приращение  $\Delta x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и рассмотрим частное приращение  $\Delta_k u$  функции  $f(x)$  по  $k$ -му аргументу, где

$$\Delta_k u = f(x_1^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k},$$

то этот предел называется частной производной первого порядка функции  $f(x)$  в точке  $x = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  по аргументу  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Частная производная обозначается следующими способами:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, \quad f'_{x_k}(x^0), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x=x^0}.$$

**Пример.** Найти частные производные в точке  $(0, 1)$  функции двух переменных

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2).$$

**Решение.** Найдем частную производную по переменной  $x$ . Для этого нужно рассмотреть функцию  $f(x, 1) = x + 1 + \ln(x + 1)$  одного переменного  $x$ . Производная этой функции при  $x = 0$  равна  $(1 + \frac{1}{x+1})|_{x=0} = 2$ . Таким образом, получаем

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial x} = 2.$$

Для того, чтобы найти производную по аргументу  $y$ , нужно рассмотреть функцию  $f(2, y)$ , найти производную этой функции по  $y$  и подставить значение  $y = 1$ . В результате получим, что

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} = 4.$$

Пример. Найти область определения функции  $f(x, y, z)$  и вычислить частные производные первого порядка в произвольной точке области определения, если

$$f(x, y, z) = xe^{yz} + \ln(x - y + z)$$

Решение. Функция определена в области  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \mid x - y + z > 0\}$ . Фиксирую переменные  $y, z$ , находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

Фиксируя переменные  $x, z$ , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{1}{x - y + z}.$$

Наконец, фиксируя переменные  $y, z$ , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

### Задачи.

59. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных  $f(x, y)$ . Вычислить их значения в точке  $(x^0, y^0)$ , если

а)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (1, 1);$

б)  $f(x, y) = e^{-xy}, \quad (0, 1);$

в)  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad (1, 1);$

г)  $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 - x^3 + y^3 + 2xy + 1, \quad (0, 0);$

д)  $f(x, y) = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}, \quad (1, 1);$

е)  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1, 0);$

ж)  $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1, 1).$

61. Доказать, что функция  $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$  удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

## 2.2 Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал.

Определение. Функция  $u = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $(x_0, y_0)$ , если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где  $A, B$  – числа, не зависящие от  $\Delta x, \Delta y$ ;  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$   
и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

**Определение.** Пусть функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда главную линейную относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в точке  $(x_0, y_0)$  называют полным дифференциалом и обозначают  $du$ , то есть

$$du = A\Delta x + B\Delta y.$$

**Определение.** Дифференциалом независимой переменной  $x$  или  $y$  называют ее приращение и обозначают  $dx$  или  $dy$  соответственно, то есть по определению  $dx = \Delta x$  и  $dy = \Delta y$ .



**Определение.** Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества  $M$ , то говорят, что она дифференцируема на множестве  $M$ .

**Теорема.** Если функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ , то есть существуют такие  $A, B$ , не зависящие от  $\Delta x, \Delta y$ , что  $\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ , то

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Таким образом, дифференциал функции  $u = f(x, y)$  может быть вычислен по формуле

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Следствие. Если хотя бы одна частная производная первого порядка функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  не существует, то функция не дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ .

Заметим, что обратное, вообще говоря, не верно, то есть из существования всех частных производных первого порядка не следует ее дифференцируемость.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

**Теорема.** Пусть функция  $f(x, y)$  имеет все частные производные первого порядка в точке  $(x_0, y_0)$ ; пусть все эти частные производные непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ .

**Теорема.** Пусть функции  $u(x), v(x)$  дифференцируемы в окрестности некоторой точки  $x^0$ . Тогда функции  $u \pm v, uv, u/v$  (в последнем случае предполагается, что  $v \neq 0$ ) дифференцируемы в этой окрестности и справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = vdu \pm udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

**Пример.** Найти полный дифференциал функции

$$u(x, y) = x^2y - y^2x$$

в любой точки области определения этой функции. Вычислить его значение в точке  $(1, 1)$ .

Решение. Областью определения функции  $u(x, y)$  является вся плоскость. Найдем частные производные первого порядка функции  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy.$$

Очевидно, что эти частные производные непрерывны во всех точках области определения. Следовательно, функция  $u(x, y)$  дифференцируема и

$$du = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Отсюда получаем, что  $du(1, 1) = dx - dy$ .

Пример. Исследовать функцию

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

на дифференцируемость в точке  $(0, 0)$ .

Решение. Найдем приращение функции  $f$  в точке  $(0, 0)$

$$\Delta f(0, 0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$$

и вычислим частные производные в этой точке. Так как  $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ , то  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ . Предположим, что функция  $f(x, y)$  дифференцируема в  $(0, 0)$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 0) &= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = \\ &= o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}.$$

Покажем, что предел

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

не существует. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Рассмотрим две последовательности точек, сходящиеся к  $(0, 0)$ :

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

В первом случае предел значений функции

$$\frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

переменных  $(\Delta x, \Delta y)$  равен  $\sqrt{2}/2$ , а во втором – 0. Это означает, что указанный выше предел функции не существует.

Следовательно, предположение о том, что функция  $f(x, y)$  дифференцируема, не верно.

Пример. Найти дифференциал функции

$$u = \frac{xy}{z} + xy.$$

Решение. Функция определена в любой точке  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  за исключением плоскости  $z = 0$ . Пользуясь правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций, получаем

$$\begin{aligned} du &= d\left(\frac{xy}{z} + xy\right) = d\left(\frac{xy}{z}\right) + d(xy) = \frac{zd(xy) - xydz}{z^2} + ydx + xdy = \\ &= \frac{yzdx + xzdy - xydz}{z^2} + ydx + xdy = \left(\frac{y}{z} + y\right)dx + \left(\frac{x}{z} + x\right)dy - \frac{xy}{z}dz. \end{aligned}$$

Пример. Пусть функция  $f(u, v)$  дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$ ,

$$u = xy, \quad v = x^2 + y^2.$$

Выразить  $f'_x$  и  $f'_y$  через  $f'_u$  и  $f'_v$ .

Решение. По формулам дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

## Задачи.

67. Найти дифференциал функции  $f(x, y)$ ; вычислить его значение в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$\text{а) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1, 0);$$

$$\text{б) } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (0, 1);$$

$$\text{в) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 1);$$

$$\text{г) } f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad (1, 1);$$

$$\text{д) } f(x, y) = e^{xy}, \quad (0, 0);$$

$$\text{е) } f(x, y) = x^y + y^x, \quad (1, 1);$$



68. Найти дифференциал функции  $f(x, y, z)$ , если

$$\text{а) } f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = \frac{x - y}{y + z};$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xyz);$$

## 2.3 Частные производные высших порядков.

Определение. Пусть частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  определена во всех точках  $x = (x_1, \dots, x_n)$  некоторого множества  $M \subset \mathbb{R}^n$ . В этом случае ее можно рассматривать как функцию  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ , определенную в области  $M$ . Эта функция может быть дифференцируемой по какой-нибудь переменной  $x_k$  в некоторой точке множества  $M$ . В этом случае указанную частную производную называют второй частной производной (или частной производной второго порядка) по переменным  $x_i$  и  $x_k$  функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  и обозначают

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \quad f_{x_i x_k}^{(2)}, \quad f''_{x_i x_k}.$$

В случае, если  $i = k$  используют следующее обозначение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

**Определение.** Если  $i \neq k$ , то частную производную второго порядка называют смешанной частной производной второго порядка.

**Пример.** Вычислить все частные производные второго порядка функции

$$f(x, y) = e^{x^2 y}.$$

**Решение.** Для того, чтобы вычислить частные производные второго порядка функции  $f$  нужно знать частные производные первого порядка этой функции. Легко находим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y(2x^2 y + 1)e^{x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x(x^2 + 1)e^{x^2 y}.$$

Заметим, что в рассмотренном примере смешанные производные равны.

**Теорема.** Пусть функция  $f(x, y)$  двух переменных дважды дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда смешанные производные в этой точке равны, то есть  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

**Теорема.** Пусть в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  имеет частные производные  $f'_x, f'_y, f'_{xy}, f'_{yx}$ . Пусть, кроме того, частные производные  $f''_{xy}, f''_{yx}$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда в этой точке  $f''_{xy} = f''_{yx}$ .

Пример. Доказать, что

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0),$$

если

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Решение. Частная производная первого порядка по  $x$  в окрестности точки  $(0, 0)$  равна

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда по определению

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1.$$

Аналогично вычисляется  $f''_{xy}(0, 0)$ , которая равна 1. Таким образом, получили, что  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

### Задачи.

75. Найти вторые частные производные функции  $f(x, y)$ ; убедиться, что

$$f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y),$$

если

а)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;

б)  $f(x, y) = \sin(xy)$ ;

в)  $f(x, y) = x \sin y$ ;

г)  $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$ ;

д)  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$ ;

## 2.4 Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Будем использовать для обозначения дифференциалов символы  $d$  и  $\delta$ , то есть для функции двух переменных  $u = f(x, y)$  ее дифференциал будем записывать как

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

или

$$\delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y.$$

Определение. Вторым дифференциалом  $d^2u$  функции  $u = f(x, y)$  называется выражение

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Теорема. Для дифференциала порядка  $m$  справедлива формула

$$d^m u = \sum_{i=1}^m C_m^i \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i} \partial y^i} dx^{m-i} dy^i,$$

где

$$C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}.$$



Пример. Найти дифференциал второго порядка функции

$$u = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1.$$

Решение. Решим задачу двумя способами.

*Способ 1.* Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x - 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

В результате получаем, что  $d^2u = 6ydx^2 + 2(6x - 2)dxdy + 2dy^2$ .

*Способ 2.* Найдем сначала первый дифференциал:  $du = (6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy$ . Теперь, для того, чтобы найти дифференциал дифференциал второго порядка функции  $u$  нужно найти первый дифференциал от  $du$ , то есть

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d((6xy - 2y)dx) + d((3x^2 - 2x + 2y)dy) = \\ &= d(6xy - 2y)dx + d(3x^2 - 2x + 2y)dy = (6ydx + 6xdy - 2dy)dx + \\ &+ (6xdx - 2dx + 2dy)dy = 6ydx^2 + 2(6x - 2)dxdy + 2dy^2. \end{aligned}$$

**Теорема.** (Формула Тейлора) Пусть функция  $u = f(x)$  задана в некоторой окрестности точки  $x^0$  и  $(k+1)$  раз дифференцируема в этой окрестности. Тогда справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x^0) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(y),$$

где  $y$  – некоторая точка (вообще говоря, зависящая от  $x$ ) из указанной окрестности. Кроме того, дифференциалы  $dx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , входящие в  $d^l f$ ,  $l = 1, \dots, k$ , равны  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ .

Замечание. Формулу Тейлора часто записывают в следующем виде (с остаточным членом в форме Пеано)

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(x^0) + o(\rho^k),$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho^k)}{\rho^k} = 0.$$

Пример. Найти два первых ненулевых члена в формуле Тейлора функции

$$u = e^{xy}$$

в окрестности точки  $(0, 0)$ .

Решение. Имеем  $du = (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$ ,  $d^2u = d(du) = d(ye^{xy})dx + d(xe^{xy})dy = y^2e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}dxdy + x^2dy^2$ , откуда получаем, что  $du(0, 0) = 0$ ,  $d^2u(0, 0) = 2dxdy$ , кроме того  $u(0, 0) = 1$ . В формуле Тейлора значения дифференциалов  $dx$  и  $dy$  равны  $\Delta x = x - 0 = x$  и  $\Delta y = y - 0 = y$  соответственно. Таким образом, получаем, что в окрестности точки  $(0, 0)$

$$e^{xy} \approx 1 + xy.$$

**Определение.** Если  $x^0 = (0, \dots, 0)$ , то формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

**Пример.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

в окрестности точки  $(-2, 1)$ .

**Решение.** Так как функция  $f(x, y)$  представляет собой многочлен второй степени, то достаточно найти частные производные до второго порядка включительно, так как старше второго порядка частные производные будут тождественно равны нулю. Итак, имеем

$$f'_x(x, y) = -2x + 2y - 6, \quad f'_y(x, y) = 2x + 6y - 2,$$

$$f''_{xx}(x, y) = -2, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = 6.$$

Вычислим значение функции и значения полученных производных в точке  $(-2, 1)$ :

$$f(-2, 1) = 1, \quad f'_x(-2, 1) = 0, \quad f'_y(-2, 1) = 0.$$

Подставим полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2.$$

## Задачи.

81. Найти  $d^2u$ , если

а)  $u = x \ln \frac{y}{x}$ ;

б)  $u = e^x \cos y$ ;

в)  $u = \sin x \cos y$ ;

82. Найти  $d^2u$ , если

а)  $u = \frac{xy}{z}$ ;

б)  $u = \sin(xyz)$ ;

в)  $u = \sin x \cos y \sin z$ ;

83. Найти  $d^3u$ , если

а)  $u = x^3 + y^3$ ;

б)  $u = e^x + e^y$ ;

85. Разложить по формуле Тейлора функцию  $f(x, y)$  в окрестности заданной точки:

а)  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y, (1, -2);$

б)  $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy, (1, 2);$

в)  $f(x, y) = x^2 + y^2, (1, 1);$

86. Разложить по формуле Тейлора функцию  $f(x, y)$  в окрестности точки  $(0, 0)$  до  $o(\rho^3)$ , если

а)  $f(x, y) = \sin x + \cos y;$

б)  $f(x, y) = e^x + e^{y^2};$

в)  $f(x, y) = \sin(x + y);$

### 3. Экстремумы функций нескольких переменных

#### 3.1 Определение экстремума. Необходимые условия его существования.

Пусть на множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  задана функция  $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ; пусть  $x^0$  – некоторая точка множества  $X$ .

**Определение.** Говорят, что функция  $u = f(x)$  имеет локальный минимум (максимум) в точке  $x^0$ , если существует некоторая окрестность  $U(x^0)$  точки  $x^0$  такая, что  $f(x^0) \leq f(x)$  ( $f(x^0) \geq f(x)$ ) для всех  $x$ , принадлежащих  $U(x^0)$ .



Определение. Локальный максимум и локальный минимум называют локальными экстремумами.

Определение. Функция  $u = f(x)$  имеет в точке  $x^0$  локальный минимум (максимум), если существует окрестность  $U(x^0)$  точки  $x^0$  такая, что для всех  $x$  из  $U(x^0)$  выполняется неравенство  $\Delta u \geq 0$  ( $\Delta u \leq 0$ )

Сформулируем необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции.

**Теорема.** Пусть функция  $u = f(x)$  имеет частные производные первого порядка в точке  $x^0$ ; пусть точка  $x^0$  – точка локального экстремума этой функции. Тогда частные производные первого порядка функции  $u = f(x)$  равны нулю в точке  $x^0$ .

**Следствие.** Если функция  $u = f(x)$  дифференцируема в точке  $x^0$ , и точка  $x^0$  является точкой локального экстремума этой функции, то  $du(x^0) = 0$ .

**Замечание.** Последние две теоремы являются лишь необходимыми условиями существования локального экстремума дифференцируемой функции. Это означает, что их выполнение в общем случае не влечет за собой существование локального экстремума.

Определение. Если в точке  $x^0$  все частные производные первого порядка функции  $f(x)$  равны нулю, то точка  $x^0$  называется стационарной точкой (или точкой возможного экстремума) функции  $f(x)$ .

Пример. Показать, что функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

имеет в точке  $(0, 0)$  локальный минимум.

Решение. Выберем в качестве окрестности точки  $(0, 0)$  все пространство  $\mathbb{R}^2$ . Имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

из которой следует, что точка  $(0, 0)$  – точка локального минимума.

Пример. Показать, что функция

$$f(x, y) = xy$$

не имеет локального экстремума в точке  $(0, 0)$ .

**Решение.** Для того, чтобы доказать, что функция  $f(x, y)$  не имеет локального экстремума в данной точке, нужно показать, что в любой ее окрестности найдется две различные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , для которых выполняются неравенства

$$f(x_1, y_1) > f(0, 0) = 0, \quad f(x_2, y_2) < f(0, 0) = 0.$$

Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число,  $U_\varepsilon = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon\}$  –  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(0, 0)$ . Выберем произвольную точку  $(x_0, y_0)$  из указанной  $\varepsilon$ -окрестности, такую, что  $x_0 \neq 0$  и  $y_0 \neq 0$ , и положим  $(x_1, y_1) = (|x_0|, |y_0|)$  и  $(x_2, y_2) = (-|x_0|, |y_0|)$ . Очевидно, что эти точки принадлежат  $U_\varepsilon$ . Итак, для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдутся две различные точки такие, что

$$f(x_1, y_1) = |x_0 y_0| > 0, \quad f(x_2, y_2) = -|x_0 y_0| < 0.$$

Таким образом, функция  $f(x, y) = xy$  в точке  $(0, 0)$  не имеет локального экстремума.

Последний пример показывает, что равенства нулю частных производных не является достаточным условием локального экстремума, так как в этом примере

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0,$$

а точка  $(0, 0)$  не является локальным экстремумом.

Пример. Найти стационарные точки функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z + xz.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка функции  $f(x, y, z)$  и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 + x = 0.$$

Решая полученную систему, находим, что  $x = -2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 4$ . Таким образом, точка  $(-2, 0, 4)$  – точка возможного экстремума функции  $f$ .

## Задачи.

87. Показать, что функция  $f(x, y)$  имеет в точке  $(0, 0)$  локальный экстремум:

а)  $f(x, y) = |xy|$ ;

б)  $f(x, y) = |x|^3 + |y|$ ;

в)  $f(x, y) = -|x - y|$ ;

г)  $f(x, y) = x^2 + |xy|$ .

88. Показать, что в точке  $(0, 0)$  функция  $f(x, y)$  не имеет локального экстремума:

а)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ;

б)  $f(x, y) = |x| - |y|$ ;

в)  $f(x, y) = \sin x \sin y$ ;

г)  $f(x, y) = x^2 - |y|$ .

## 3.2 Достаточные условия существования локального экстремума.

Рассмотрим симметричную квадратичную форму

$$\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

зависящую от переменных  $h_1, \dots, h_n$ .



**Определение.** Квадратичная форма  $\Phi(h)$  называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений  $h_1, \dots, h_n$ , не равных нулю одновременно,  $\Phi(h) > 0$  ( $\Phi(h) < 0$ )

**Определение.** Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакоопределенными квадратичными формами.

**Определение.** Если квадратичная форма  $\Phi$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то ее называют знакопеременной.

Определение. Симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют матрицей квадратичной формы  $\Phi(h)$ .

Определение. Определители

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называют главными минорами матрицы  $A$  квадратичной формы.

**Теорема.** Матрица  $A$  квадратичной формы положительно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0;$$

Матрица  $A$  квадратичной формы отрицательно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots,$$

то есть знаки главных миноров чередуются, начиная с  $A_1 < 0$ .

**Теорема.** Пусть  $x^0$  – стационарная точка функции  $f(x)$ ; пусть в некоторой окрестности точки  $x^0$  функция  $f(x)$  дважды дифференцируема и все ее частные производные второго порядка непрерывны в точке  $x^0$ . Тогда, если в точке  $x^0$  второй дифференциал  $d^2 f(x^0)$  представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов  $dx_1, \dots, dx_n$  независимых переменных, то функция  $f(x)$  имеет в точке  $x^0$  локальный экстремум. При этом, если  $d^2 f(x^0) < 0$ , то  $x^0$  – точка локального максимума; если  $d^2 f(x^0) > 0$ , то  $x^0$  – точка локального минимума. Если в точке  $x^0$  дифференциал  $d^2 f(x^0)$  является знакопеременной формой, то  $x^0$  не является точкой локального экстремума.

Применим последнюю теорему к функции двух переменных  $f(x, y)$ . Пусть функция  $f(x, y)$  дважды дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  возможного экстремума и все ее частные производные второго порядка непрерывны. Тогда точка  $(x_0, y_0)$ : а) является точкой локального минимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

б) является точкой локального максимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

в) не является точкой локального экстремума, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0.$$

Важно отметить, что случай, когда  $\Delta_2 = 0$ , требует дополнительного исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0.$$

Решив данную систему, получим, что точки  $(3, 2)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(-2, -3)$  – стационарные. Вычислим теперь частные производные второго порядка функции  $f(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

Составим матрицу  $A$  квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

и вычислим ее главные миноры  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2)$$

В точке  $(3, 2)$  оба минора положительны, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум. В точке  $(-3, -2)$  минор  $\Delta_1 < 0$ , а  $\Delta_2 > 0$ , следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум. В точках  $(2, 3)$  и  $(-2, -3)$  минор  $\Delta_2 < 0$ , следовательно, в этих точках экстремумов нет.

### Задачи.

91. Найти экстремумы функции  $f(x, y)$ , если

а)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$ ;

б)  $f(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$ ;

92. Исследовать функцию  $f(x, y)$  на локальный экстремум, если

а)  $f(x, y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$ ;

б)  $f(x, y) = 3y^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$ ;

в)  $f(x, y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$ ;

### 3.3 Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных.

Пусть непрерывная функция  $f(x, y)$  двух переменных определена на ограниченном и замкнутом множестве  $X \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки из  $X$ , в которых функция  $f(x, y)$  принимает наибольшее и наименьшее значение на множестве  $X$ . Если же функция  $f(x, y)$  еще и дифференцируема на  $X$ , то она достигает своих максимального и минимального значений либо в стационарных точках, либо на границе области  $X$ . Здесь важно заметить, что нет необходимости вычислять частные производные второго порядка функции  $f(x, y)$ , а достаточно найти значения функции в точках возможного экстремума и сравнить их между собой, так как точки минимума и максимума функции находятся среди таких точек.



Затем нужно найти точки минимума и максимума функции на границе области ее определения. Как правило, граница  $\partial X$  множества  $X$  разбивается на ряд участков, каждый из которых имеет вид

$$\partial X = \{(x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta, y = \varphi(x)\}$$

или

$$\partial X = \{(x, y) \mid \mu \leq y \leq \nu, x = \psi(y)\},$$

где функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  непрерывны. Поэтому на таком участке границы  $\partial X$  функция  $f(x, y)$  двух переменных  $x, y$  становится непрерывной функцией (так как суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция)

$$f(x, \varphi(x)) \quad \text{или} \quad f(\psi(y), y)$$

одного переменного  $x$  или  $y$ , определенного на отрезке  $[\alpha, \beta]$  или  $[\mu, \nu]$  соответственно. Следовательно, задача о нахождении минимума и максимума функции  $f(x, y)$  на границе  $\partial X$  сводится к задаче нахождения минимума и максимума функции одной переменной, определенной на отрезке.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 y (2 - x - y)$$

на множестве

$$X = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}.$$

Решение. Найдем точки возможного экстремума функции  $f(x, y)$ . Для этого вычислим частные производные первого порядка функции  $f(x, y)$  приравняем их к нулю. В результате получим систему

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Разрешая эту систему, получим одну стационарную точку  $(1, \frac{1}{2})$ , которая принадлежит множеству  $X$ ; при этом  $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ .

Граница  $\partial X$  множества  $X$  состоит из трех частей

$$\partial X_1 = \{(x, y) \mid x = 0, 0 \leq y \leq 6\},$$

$$\partial X_2 = \{(x, y) \mid y = 0, 0 \leq x \leq 6\},$$

$$\partial X_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x, 0 \leq x \leq 6\}.$$

На  $\partial X_1$  ( $x = 0$ ) и на  $\partial X_2$  ( $y = 0$ ) функция  $f(x, y)$  обращается в нуль. Найдем максимум и минимум на  $\partial X_3$ . На этой части границы рассмотрим функцию

$$z(x) = f(x, y) \Big|_{\partial X_3} = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$$

при  $x \in [0, 6]$ .

На концах отрезка  $z(0) = z(6) = 0$ . Точки возможного экстремума функции одной переменной  $z(x)$  находятся из уравнения

$$z'(x) = -48x + 12x^2 = 12x(x - 4) = 0.$$

Откуда получаем две стационарные точки  $x = 4$  и  $x = 0$ , которые принадлежат отрезку  $[0, 6]$ . В этих точках функция  $z(x)$  принимает значения  $-128$  и  $0$  соответственно, при этом  $y = 2$  и  $y = 6$  соответственно.

Теперь осталось выбрать минимальное и максимальное значения функции  $f(x, y)$  среди всех полученных чисел:  $\frac{1}{4}$ ,  $0$ ,  $-128$ . Видно, что наибольшее значение  $\frac{1}{4}$  функция  $f(x, y)$  принимает в точке  $(1, \frac{1}{2})$ , лежащей внутри множества  $X$ , а наименьшее  $-128$  в точке  $(4, 2)$ , принадлежащей границе  $\partial X$  множества  $X$ .

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

в круге  $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Решение. Функция  $f(x, y)$  имеет одну стационарную точку  $(0, 0)$ , так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

в которой принимает значение 0.

Граница  $\partial X$  круга  $X$  есть окружность  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , параметрическое задание которой

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

На окружности  $\partial X$  функция  $f(x, y)$  становится функцией  $z(t)$  одного переменного  $t$ , так как

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Ищем стационарные точки функции  $z(t)$ :

$$z'(t) = -2 \sin 2t = 0.$$

Отсюда получаем, что  $t = \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{R}^n$ , – решение данного уравнения. Но отрезку  $[0, 2\pi]$  принадлежат  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ , в которых функция  $z(t)$  принимает значения  $1, -1, 1, -1, 1$  соответственно.

98. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

в прямоугольнике

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}.$$

99. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$ .

104. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x, y)$  в области  $\Omega$ , если

а)  $f(x, y) = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}$ ,  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

б)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ ,  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

