2. Дифференцируемость функций нескольких переменных

2.1 Частные производные функций нескольких переменных.

Пусть задана функция n-переменных $u = f(x)$, $x \in M \subset \mathbb{R}^n$; пусть x^0 – внутренняя точка множества M. Придадим k-тому аргументу приращение Δx_k, $k = 1, \ldots, n$, и рассмотрим частное приращение $\Delta_k u$ функции $f(x)$ по k-му аргументу, где

$$\Delta_k u = f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k},$$

то этот предел называется частной производной первого порядка функции $f(x)$ в точке $x = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ по аргументу x_k, $k = 1, \dots, n$. Частная производная обозначается следующими способами:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}, \quad f'_{x_k}(x^0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x=x^0}.$$

Пример. Найти частные производные в точке $(0, 1)$ функции двух переменных

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2).$$

Решение. Найдем частную производную по переменной x. Для этого нужно рассмотреть функцию $f(x, 1) = x + 1 + \ln(x + 1)$ одного переменного x. Производная этой функции при $x = 0$ равна $(1 + \frac{1}{x+1})|_{x=0} = 2$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial x} = 2.$$

Для того, чтобы найти производную по аргументу y, нужно рассмотреть функцию $f(2, y)$, найти производную этой функции по y и подставить значение $y = 1$. В результате получим, что

$$\frac{\partial f(0, 1)}{\partial y} = 4.$$

Пример. Найти область определения функции $f(x, y, z)$ и вычислить частные производные первого порядка в произвольной точке области определения, если

$$f(x, y, x) = xe^{yz} + \ln(x - y + z)$$

Решение. Функция определена в области $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \mid x - y + z > 0\}$. Фиксирую переменные y, z, находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

Фиксируя переменные x, z, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{1}{x - y + z}.$$

Наконец, фиксируя переменные y, z, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz} + \frac{1}{x - y + z}.$$

Задачи.

59. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $f(x,y)$. Вычислить их значения в точке (x^0, y^0), если

$$\text{а) } f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (1,1);$$

$$\text{б) } f(x,y) = e^{-xy}, \quad (0,1);$$

$$\text{в) } f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad (1,1);$$

$$\text{г) } f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - x^3 + y^3 + 2xy + 1, \quad (0,0);$$

$$\text{д) } f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}, \quad (1,1);$$

$$\text{е) } (x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (1,0);$$

$$\text{ж) } f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}), \quad (1,1).$$

61. Доказать, что функция $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

2.2 Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал.

Определение. Функция $u = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где A, B – числа, не зависящие от Δx, Δy; $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Определение. Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда главную линейную относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в точке (x_0, y_0) называют полным дифференциалом и обозначают du, то есть

$$du = A\Delta x + B\Delta y.$$

Определение. Дифференциалом независимой переменной x или y называют ее приращение и обозначают dx или dy соответственно, то есть по определению $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Определение. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она дифференцируема на множестве M.

Теорема. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то есть существуют такие A, B, не зависящие от Δx, Δy, что $\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, то

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Таким образом, дифференциал функции $u = f(x, y)$ может быть вычислен по формуле

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Следствие. Если хотя бы одна частная производная первого порядка функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) не существует, то функция не дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Заметим, что обратное, вообще говоря, не верно, то есть из существования всех частных производных первого порядка не следует ее дифференцируемость.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ имеет все частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0); пусть все эти частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Теорема. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки x^0. Тогда функции $u \pm v$, uv, u/v (в последнем случае предполагается, что $v \neq 0$) дифференцируемы в этой окрестности и справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = vdu \pm udv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции

$$u(x,y) = x^2y - y^2x$$

в любой точки области определения этой функции. Вычислить его значение в точке $(1,1)$.

Решение. Областью определения функции $u(x, y)$ является вся плоскость. Найдем частные производные первого порядка функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xy.$$

Очевидно, что эти частные производные непрерывны во всех точках области определения. Следовательно, функция $u(x, y)$ дифференцируема и

$$du = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Отсюда получаем, что $du(1, 1) = dx - dy$.

Пример. Исследовать функцию

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

Решение. Найдем приращение функции f в точке $(0,0)$

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}$$

и вычислим частные производные в этой точке. Так как $f(0,y) = f(x,0) = 0$, то $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Предположим, что функция $f(x,y)$ дифференцируема в $(0,0)$, тогда

$$\Delta f(0,0) = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) =$$

$$= o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

Отсюда следует, что

$$o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}.$$

Покажем, что предел

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

не существует. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Рассмотрим две последовательности точек, сходящиеся к $(0,0)$:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

В первом случае предел значений функции

$$\frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

переменных $(\Delta x, \Delta y)$ равен $\sqrt{2}/2$, а во втором – 0. Это означает, что указанный выше предел функции не существует.

Следовательно, предположение о том, что функция $f(x,y)$ дифференцируема, не верно.

Пример. Найти дифференциал функции

$$u = \frac{xy}{z} + xy.$$

Решение. Функция определена в любой точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ за исключением плоскости $z = 0$. Пользуясь правилами дифференцирования суммы, произведения и частного функций, получаем

$$du = d\left(\frac{xy}{z} + xy\right) = d\left(\frac{xy}{z}\right) + d(xy) = \frac{zd(xy) - xydz}{z^2} + ydx + xdy =$$

$$= \frac{yzdx + xzdy - xydz}{z^2} + ydx + xdy = \left(\frac{y}{z} + y\right)dx + \left(\frac{x}{z} + x\right)dy - \frac{xy}{z}dz.$$

Пример. Пусть функция $f(u,v)$ дифференцируема в $\mathbb{R}^2$,

$$u = xy, \quad v = x^2 + y^2.$$

Выразить f'_x и f'_y через f'_u и f'_v.

Решение. По формулам дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Задачи.

67. Найти дифференциал функции $f(x, y)$; вычислить его значение в точке (x_0, y_0), если

$$\text{а) } f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1,0);$$

$$\text{б) } f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (0,1);$$

$$\text{в) } f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1,1);$$

$$\text{г) } f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad (1,1);$$

$$\text{д) } f(x,y) = e^{xy}, \quad (0,0);$$

$$\text{е) } f(x,y) = x^y + y^x, \quad (1,1);$$

68. Найти дифференциал функции $f(x, y, z)$, если

$$\text{а) } f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = \frac{x - y}{y + z};$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xyz);$$

2.3 Частные производные высших порядков.

Определение. Пусть частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ определена во всех точках $x = (x_1, \ldots, x_n)$ некоторого множества $M \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае ее можно рассматривать как функцию n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенную в области M. Эта функция может быть дифференцируемой по какой-нибудь переменной x_k в некоторой точке множества M. В этом случае указанную частную производную называют второй частной производной (или частной производной второго порядка) по переменным x_i и x_k функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначают

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \quad f^{(2)}_{x_i x_k}, \quad f''_{x_i x_k}.$$

В случае, если $i = k$ используют следующее обозначение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Определение. Если $i \neq k$, то частную производную второго порядка называют смешанной частной производной второго порядка.

Пример. Вычислить все частные производные второго порядка функции

$$f(x, y) = e^{x^2 y}.$$

Решение. Для того, чтобы вычислить частные производные второго порядка функции f нужно знать частные производные первого порядка этой функции. Легко находим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y(2x^2 y + 1)e^{x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x(x^2 + 1)e^{x^2 y}.$$

Заметим, что в рассмотренном примере смешанные производные равны.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ двух переменных дважды дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда смешанные производные в этой точке равны, то есть $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет частные производные f'_x, f'_y, f'_{xy}, f''_{yx}. Пусть, кроме того, частные производные f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда в этой точке $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Пример. Доказать, что

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0),$$

если

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

Решение. Частная производная первого порядка по x в окрестности точки $(0,0)$ равна

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

Тогда по определению

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -1.$$

Аналогично вычисляется $f''_{xy}(0,0)$, которая равна 1. Таким образом, получили, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Задачи.

75. Найти вторые частные производные функции $f(x, y)$; убедится, что

$$f'_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y),$$

если

$$\text{а) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$\text{б) } f(x, y) = \sin(xy);$$

$$\text{в) } f(x, y) = x \sin y;$$

$$\text{г) } f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2};$$

$$\text{д) } f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy};$$

2.4 Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Будем использовать для обозначения дифференциалов символы d и δ, то есть для функции двух переменных $u = f(x, y)$ ее дифференциал будем записывать как

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

или

$$\delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y.$$

Определение. Вторым дифференциалом d^2u функции $u = f(x, y)$ называется выражение

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Теорема. Для дифференциала порядка m справедлива формула

$$d^m u = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i} \partial y^i} dx^{m-i} dy^i,$$

где

$$C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}.$$

Пример. Найти дифференциал второго порядка функции

$$u = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1.$$

Решение. Решим задачу двумя способами.
Способ 1. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x - 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

В результате получаем, что $d^2u = 6ydx^2 + 2(6x-2)dxdy + 2dy^2$.

Способ 2. Найдем сначала первый дифференциал: $du = (6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy$. Теперь, для того, чтобы найти дифференциал дифференциал второго порядка функции u нужно найти первый дифференциал от du, то есть

$$d^2u = d(du) = d((6xy - 2y)dx) + d((3x^2 - 2x + 2y)dy) =$$

$$= d(6xy - 2y)dx + d(3x^2 - 2x + 2y)dy = (6ydx + 6xdy - 2dy)dx +$$

$$+ (6xdx - 2dx + 2dy)dy = 6ydx^2 + 2(6x-2)dxdy + 2dy^2.$$

Теорема. (Формула Тейлора) Пусть функция $u = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x^0 и $(k+1)$ раз дифференцируема в этой окрестности. Тогда справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(x^0) + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f(y),$$

где y – некоторая точка (вообще говоря, зависящая от x) из указанной окрестности. Кроме того, дифференциалы dx_i, $i = 1, \ldots, n$, входящие в $d^l f$, $l = 1, \ldots, k$, равны $\Delta x_i = x_i - x_i^0$.

Замечание. Формулу Тейлора часто записывают в следующем виде (с остаточным членом в форме Пеано)

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x^0) + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(x^0) + o(\rho^k),$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}, \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho^k)}{\rho^k} = 0.$$

Пример. Найти два первых ненулевых члена в формуле Тейлора функции

$$u = e^{xy}$$

в окрестности точки $(0,0)$.

Решение. Имеем $du = (ye^{xy}dx + xe^{xy}dy)$, $d^2u = d(du) = d(ye^{xy})dx + d(xe^{xy})dy = y^2e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}dxdy + x^2dy^2$, откуда получаем, что $du(0,0) = 0$, $d^2u(0,0) = 2dxdy$, кроме того $u(0,0) = 1$. В формуле Тейлора значения дифференциалов dx и dy равны $\Delta x = x - 0 = x$ и $\Delta y = y - 0 = y$ соответственно. Таким образом, получаем, что в окрестности точки $(0,0)$

$$e^{xy} \approx 1 + xy.$$

Определение. Если $x^0 = (0, \ldots, 0)$, то формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Пример. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

в окрестности точки $(-2, 1)$.

Решение. Так как функция $f(x, y)$ представляет собой многочлен второй степени, то достаточно найти частные производные до второго порядка включительно, так как старше второго порядка частные производные будут тождественно равны нулю. Итак, имеем

$$f'_x(x, y) = -2x + 2y - 6, \quad f'_y(x, y) = 2x + 6y - 2,$$

$$f''_{xx}(x, y) = -2, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = 6.$$

Вычислим значение функции и значения полученных производных в точке $(-2, 1)$:

$$f(-2, 1) = 1, \quad f'_x(-2, 1) = 0, \quad f'_y(-2, 1) = 0.$$

Подставим полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2.$$

Задачи.

81. Найти d^2u, если

$$\text{а) } u = x\ln\frac{y}{x};$$

$$\text{б) } u = e^x \cos y;$$

$$\text{в) } u = \sin x \cos y;$$

82. Найти d^2u, если

$$\text{а) } u = \frac{xy}{z};$$

$$\text{б) } u = \sin(xyz);$$

$$\text{в) } u = \sin x \cos y \sin z;$$

83. Найти d^3u, если

а) $u = x^3 + y^3$;

б) $u = e^x + e^y$;

85. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y)$ в окрестности заданной точки:

а) $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, $(1,-2)$;

б) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1,2)$;

в) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(1,1)$;

86. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$ до $o(\rho^3)$, если

а) $f(x,y) = \sin x + \cos y$;

б) $f(x,y) = e^x + e^{y^2}$;

в) $f(x,y) = \sin(x+y)$;

3. Экстремумы функций нескольких переменных

3.1 Определение экстремума. Необходимые условия его существования.

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$; пусть x^0 – некоторая точка множества X.

Определение. Говорят, что функция $u = f(x)$ имеет локальный минимум (максимум) в точке x^0, если существует некоторая окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что $f(x^0) \leq f(x)$ $(f(x^0) \geq f(x))$ для всех x, принадлежащих $U(x^0)$.

Определение. Локальный максимум и локальный минимум называют локальными экстремумами.

Определение. Функция $u = f(x)$ имеет в точке x^0 локальный минимум (максимум), если существует окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что для всех x из $U(x^0)$ выполняется неравенство $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$

Сформулируем необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции.

Теорема. Пусть функция $u = f(x)$ имеет частные производные первого порядка в точке x^0; пусть точка x^0 – точка локального экстремума этой функции. Тогда частные производные первого порядка функции $u = f(x)$ равны нулю в точке x^0.

Следствие. Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке x^0, и точка x^0 является точкой локального экстремума этой функции, то $du(x^0) = 0$.

Замечание. Последние две теоремы является лишь необходимыми условиями существования локального экстремума дифференцируемой функции. Это означает, что их выполнение в общем случае не влечет за собой существование локального экстремума.

Определение. Если в точке x^0 все частные производные первого порядка функции $f(x)$ равны нулю, то точка x^0 называется стационарной точкой (или точкой возможного экстремума) функции $f(x)$.

Пример. Показать, что функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

имеет в точке $(0, 0)$ локальный минимум.

Решение. Выберем в качестве окрестности точки $(0,0)$ все пространство $\mathbb{R}^2$. Имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y) \quad \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

из которой следует, что точка $(0,0)$ – точка локального минимума.

Пример. Показать, что функция

$$f(x,y) = xy$$

не имеет локального экстремума в точке $(0,0)$.

Решение. Для того, чтобы доказать, что функция $f(x, y)$ не имеет локального экстремума в данной точке, нужно показать, что в любой ее окрестности найдется две различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), для которых выполняются неравенства

$$f(x_1, y_1) > f(0, 0) = 0, \quad f(x_2, y_2) < f(0, 0) = 0.$$

Пусть ε – произвольное положительное число, $U_\varepsilon = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ – ε-окрестность точки $(0, 0)$. Выберем произвольную точку (x_0, y_0) из указанной ε-окрестности, такую, что $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, и положим $(x_1, y_1) = (|x_0|, |y_0|)$ и $(x_2, y_2) = (-|x_0|, |y_0|)$. Очевидно, что эти точки принадлежат U_ε. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся две различные точки такие, что

$$f(x_1, y_1) = |x_0 y_0| > 0, \quad f(x_2, y_2) = -|x_0 y_0| < 0.$$

Таким образом, функция $f(x, y) = xy$ в точке $(0, 0)$ не имеет локального экстремума.

Последний пример показывает, что равенства нулю частных производных не является достаточным условием локального экстремума, так как в этом примере

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0,$$

а точка (0,0) не является локальным экстремумом.

Пример. Найти стационарные точки функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z + xz.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка функции $f(x, y, x)$ и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 + x = 0.$$

Решая полученную систему, находим, что $x = -2$, $y = 0$, $z = 4$. Таким образом, точка $(-2, 0, 4)$ – точка возможного экстремума функции f.

Задачи.

87. Показать, что функция $f(x,y)$ имеет в точке $(0,0)$ локальный экстремум:

а) $f(x,y) = |xy|$;

б) $f(x,y) = |x|^3 + |y|$;

в) $f(x,y) = -|x-y|$;

г) $f(x,y) = x^2 + |xy|$.

88. Показать, что в точке $(0,0)$ функция $f(x,y)$ не имеет локального экстремума:

а) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

б) $f(x,y) = |x| - |y|$;

в) $f(x,y) = \sin x \sin y$;

г) $f(x,y) = x^2 - |y|$.

3.2 Достаточные условия существования локального экстремума.

Рассмотрим симметричную квадратичную форму

$$\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

зависящую от переменных $h_1, \ldots, h_n$.

Определение. Квадратичная форма $\Phi(h)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений $h_1, \ldots, h_n$, не равных нулю одновременно, $\Phi(h) > 0$ $(\Phi(h) < 0)$

Определение. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакоопределенными квадратичными формами.

Определение. Если квадратичная форма Φ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то ее называют знакопеременной.

Определение. Симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют матрицей квадратичной формы $\Phi(h)$.

Определение. Определители

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \; a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

называют главными минорами матрицы A квадратичной формы.

Теорема. Матрица A квадратичной формы положительно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 > 0, \; A_2 > 0, \dots, \; A_n > 0;$$

Матрица A квадратичной формы отрицательно определена тогда и только тогда, когда для главных миноров справедливы неравенства

$$A_1 < 0, \; A_2 > 0, \; A_3 < 0, \dots,$$

то есть знаки главных миноров чередуются, начиная с $A_1 < 0$.

Теорема. Пусть x^0 – стационарная точка функции $f(x)$; пусть в некоторой окрестности точки x^0 функция $f(x)$ дважды дифференцируема и все ее частные производные второго порядка непрерывны в точке x^0. Тогда, если в точке x^0 второй дифференциал $d^2 f(x^0)$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ независимых переменных, то функция $f(x)$ имеет в точке x^0 локальный экстремум. При этом, если $d^2 f(x^0) < 0$, то x^0 – точка локального максимума; если $d^2 f(x^0) > 0$, то x^0 – точка локального минимума. Если в точке x^0 дифференциал $d^2 f(x^0)$ является знакопеременной формой, то x^0 не является точкой локального экстремума.

Применим последнюю теорему к функции двух переменных $f(x,y)$. Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки (x_0,y_0) возможного экстремума и все ее частные производные второго порядка непрерывны. Тогда точка (x_0,y_0):
а) является точкой точкой локального минимума, если в этой точке

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}>0;$$

б) является точкой локального максимума, если в этой точке

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}>0;$$

в) не является точкой локального экстремума, если в этой точке

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}<0.$$

Важно отметить, что случай, когда $\Delta_2=0$, требует дополнительного исследования.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0.$$

Решив данную систему, получим, что точки $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$ – стационарные. Вычислим теперь частные производные второго порядка функции $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

Составим матрицу A квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

и вычислим ее главные миноры Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2)$$

В точке $(3,2)$ оба минора положительны, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум. В точке $(-3,-2)$ минор $\Delta_1 < 0$, а $\Delta_2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум. В точках $(2,3)$ и $(-2,-3)$ минор $\Delta_2 < 0$, следовательно, в этих точках экстремумов нет.

Задачи.

91. Найти экстремумы функции $f(x,y)$, если

а) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$;

б) $f(x,y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$;

92. Исследовать функцию $f(x,y)$ на локальный экстремум, если

а) $f(x,y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$;

б) $f(x,y) = 3y^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

в) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$;

3.3 Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных.

Пусть непрерывная функция $f(x, y)$ двух переменных определена на ограниченном и замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^2$. Тогда по второй теореме Вейерштрасса существуют точки из X, в которых функция $f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значение на множестве X. Если же функция $f(x, y)$ еще и дифференцируема на X, то она достигает своих максимального и минимального значений либо в стационарных точках, либо на границе области X. Здесь важно заметить, что нет надобности вычислять частные производные второго порядка функции $f(x, y)$, а достаточно найти значения функции в точках возможного экстремума и сравнить их между собой, так как точки минимума и максимума функции находятся среди таких точек.

Затем нужно найти точки минимума и максимума функции на границе области ее определения. Как правило, граница ∂X множества X разбивается на ряд участков, каждый из которых имеет вид

$$\partial X = \{(x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ y = \varphi(x)\}$$

или

$$\partial X = \{(x, y) \mid \mu \leq y \leq \nu,\ x = \psi(y)\},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны. Поэтому на таком участке границе ∂X функция $f(x, y)$ двух переменных x, y становится непрерывной функцией (так как суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция)

$$f(x, \varphi(x)) \quad \text{или} \quad f(\psi(y), y)$$

одного переменного x или y, определенного на отрезке $[\alpha, \beta]$ или $[\mu, \nu]$ соответственно. Следовательно, задача о нахождении минимума и максимума функции $f(x, y)$ на границе ∂X сводится к задаче нахождения минимума и максимума функции одной переменной, определенной на отрезке.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 y(2 - x - y)$$

на множестве

$$X = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\}.$$

Решение. Найдем точки возможного экстремума функции $f(x, y)$. Для этого вычислим частные производные первого порядка функции $f(x, y)$ приравняем их к нулю. В результате получим систему

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Разрешая эту систему, получим одну стационарную точку $(1, \frac{1}{2})$, которая принадлежит множеству X; при этом $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Граница ∂X множества X состоит из трех частей

$$\partial X_1 = \{(x, y) \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 6\},$$

$$\partial X_2 = \{(x, y) \mid y = 0,\ 0 \leq x \leq 6\},$$

$$\partial X_3 = \{(x, y) \mid y = 6 - x,\ 0 \leq x \leq 6\}.$$

На ∂X_1 $(x = 0)$ и на ∂X_2 $(y = 0)$ функция $f(x, y)$ обращается в нуль. Найдем максимум и минимум на ∂X_3. На этой части границы рассмотрим функцию

$$z(x) = f(x, y)\Big|_{\partial X_3} = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$$

при $x \in [0, 6]$.

На концах отрезка $z(0) = z(6) = 0$. Точки возможного экстремума функции одной переменной $z(x)$ находятся из уравнения

$$z'(x) = -48x + 12x^2 = 12x(x - 4) = 0.$$

Откуда получаем две стационарные точки $x = 4$ и $x = 0$, которые принадлежат отрезку $[0, 6]$. В этих точках функция $z(x)$ принимает значения -128 и 0 соответственно, при этом $y = 2$ и $y = 6$ соответственно.

Теперь осталось выбрать минимальное и максимальное значения функции $f(x, y)$ среди всех полученных чисел: $\frac{1}{4}$, 0, -128. Видно, что наибольшее значение $\frac{1}{4}$ функция $f(x, y)$ принимает в точке $(1, \frac{1}{2})$, лежащей внутри множества X, а наименьшее -128 в точке $(4, 2)$, принадлежащей границе ∂X множества X.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

в круге $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Решение. Функция $f(x, y)$ имеет одну стационарную точку $(0, 0)$, так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

в которой принимает значение 0.

Граница ∂X круга X есть окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, параметрическое задание которой

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

На окружности ∂X функция $f(x, y)$ становится функцией $z(t)$ одного переменного t, так как

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Ищем стационарные точки функции $z(t)$:

$$z'(t) = -2\sin 2t = 0.$$

Отсюда получаем, что $t = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{R}^n$, – решение данного уравнения. Но отрезку $[0, 2\pi]$ принадлежат 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, в которых функция $z(t)$ принимает значения 1, -1, 1, -1, 1 соответственно.

98. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

в прямоугольнике

$$\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}.$$

99. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

104. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)$ в области Ω, если

а) $f(x,y) = xy - x^2y - \dfrac{xy^2}{2}, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\};$

б) $f(x,y) = x^2+3y^2-x+18y-4, \quad \Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\};$