И 4

Применение интеграла в физике и геометрии

1. Вычислите:

$$\left(3\frac{1}{4}-1\frac{1}{6}:1\frac{1}{9}\right):2{,}2$$

$$1\frac{1}{6}:1\frac{1}{9}= \quad \frac{7}{6}\cdot\frac{9}{10}=\frac{21}{20}$$

$$3\frac{1}{4}-\frac{21}{20}=\frac{13}{4}-\frac{21}{20}=\frac{65-21}{20}=\frac{44}{20}=\frac{11}{5}=2{,}2$$

$$2{,}2:2{,}2=1$$

Повторение

Определение первообразной: $F'(x) = f(x)$

Свойство первообразной: $F(x) + C$

Определение неопределённого интеграла:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Определение определённого интеграла:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл определённого интеграла:

Определённый интеграл

Подстановка (замена переменной)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} =$$

Под знаком интеграла находится сложная функция

$$\int_1^2 (2x+1)^3\,dx = _{\text{меняем выражения с x на выражения с t}} \int t^3 \frac{dt}{2} = _{\text{делаем обратную замену t на x}} \frac{(2x+1)^4}{8} \Bigg|_1^2 = _{\text{выполняем вычисления}} \frac{625}{8} - \frac{81}{8} = \frac{544}{8} = 68$$

заменим внутреннюю функцию

$$2x + 1 = t$$

найдем производные от левой и правой части

$$2dx = dt$$

выразим dx

$$dx = \frac{dt}{2}$$

Конечно мы делаем только математическую запись:

$$\int_1^2 (2x+1)^3\,dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{(2x+1)^4}{8} \Bigg|_1^2 = \frac{625}{8} - \frac{81}{8} = \frac{544}{8} = 68$$

$$2x + 1 = t$$

$$2dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

Неопределённый интеграл

Подстановка (замена переменной)

$$\int (2-7x)^6 dx = \int t^6 \frac{dt}{-7} = \frac{1}{-7} \cdot \frac{t^7}{7} + C = -\frac{(2-7x)^7}{49} + C$$

$$2-7x = t$$

$$-7dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{-7}$$

Определённый интеграл

Подстановка (замена переменной)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \left.\frac{\sin^5 x}{5}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x dx = dt$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^5}{5} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Неопределённый интеграл

Подстановка (замена переменной)

$$\int \frac{xdx}{3x^2+4} = \quad \int \frac{dt}{6t} = \frac{1}{6}\ln t + C = \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+4\right) + C$$

$$3x^2 + 4 = t$$

$$6xdx = dt$$

$$xdx = \frac{dt}{6}$$

Применение определённого интеграла

- Определённый интеграл
  - В математике
    - Площади фигур
    - Площади поверхностей
    - Длина дуги
    - Объёмы тел
  - В физике
    - Длина пути
    - Работа силы
    - Работа, производимая при поднятии груза
    - Сила давления жидкости
    - Центр масс
    - Количество электричества
    - Количество теплоты

и др…

Применение определённого интеграла

Количество электричества (электрический заряд)

Количество электричества (электрический заряд) за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$ при известной силе тока $I = I(t)$ вычисляется по формуле:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$$

Задача: Вычислите количество электричества, протёкшего по проводнику за промежуток времени [3; 4],
если сила тока задана формулой: $I(t)=3t^2-2t$.

$$q = \int_3^4 \left(3t^2 - 2t\right)dt = \left(t^3 - t^2\right)\Big|_3^4 = (64-16)-(27-9) = 48-18 = 30 \text{ Кл}$$

Применение определённого интеграла

Работа A за промежуток времени от t_1 до t_2, если задан закон изменения мощности $N(t)$, вычисляется по формуле:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$$

Задача: Вычислите работу А за

промежуток

времени [1; 4], если мощность

вычисляется $N(t) = \frac{6}{\sqrt{t}}$

по формуле

$$A = \int_1^4 \frac{6dt}{\sqrt{t}} = 6 \cdot 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 12\sqrt{4} - 12\sqrt{1} = 12\,\text{Дж}$$

Домашнее задание

1. Вычислите $$\frac{18,6 : \frac{3}{4} - 14,4 \cdot \frac{5}{12}}{47,52 : 1,8 - 17}$$

2. Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{x^2 dx}{6x^3 - 1} dx$

3. Вычислите определённые интегралы:

$$\int_1^{1,25} (5 - 4x)^6 dx \qquad \int_0^{\pi} \cos^6 x \cdot (-\sin x)\, dx$$

4. Решите задачу:

Количество заражённых в начальный момент времени 7 человек. Закон скорости заражения от 1 человека в зависимости от времени y=6x+1 за один день. Сколько ожидается заражённых через 3 дня?

Домашнее задание (ответы)

1. **2**

2. Найдите неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{6x^3-1} dx = \frac{1}{18} \ln\left|6x^3-1\right| + C$$

3. Вычислите определённые интегралы:

$$\int_1^{1,25} (5-4x)^6 dx = -\frac{(5-4x)^7}{28}\Bigg|_1^{1.25} = \frac{1}{28}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^6 x \cdot (-\sin x)\, dx = \frac{\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{7}$$

4. Решите задачу: Один человек заразит: $\int_0^3 (6x+1)dx = \left(3x^2+x\right)\Big|_0^3 = 30$

От 7 человек заразятся $30 \cdot 7 = 210$ человек