Пример 1. Найти графическим методом решение стандартной задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$z = 30x_1 + 40x_2 \to \max.$$

Решение. В плоскости x_1Ox_2 система ограничений образует выпуклую область, ограниченную многоугольником. Для построения этой области воспользуемся следующим фактом. Прямая $ax_1 + bx_2 = c$, разбивает плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости. В одной полуплоскости $ax_1 + bx_2 < c$, в другой $ax_1 + bx_2 > c$. Если $c > 0$, то в полуплоскости, содержащей начало координат, $ax_1 + bx_2 < c$, следовательно, в полуплоскости, не содержащей начало координат $ax_1 + bx_2 > c$.

При геометрической интерпретации задач ЛП могут встретиться случаи, изображенные на рис. 2.1.–2.4.

Рис. 2.1. Задача ЛП имеет единственное решение $f_{\max} = f\left(X_{\max}\right)$.

Рис. 2.2. Задача ЛП имеет бесчисленное множество решений, так как целевая функция достигает максимума на отрезке $[M; N]$.

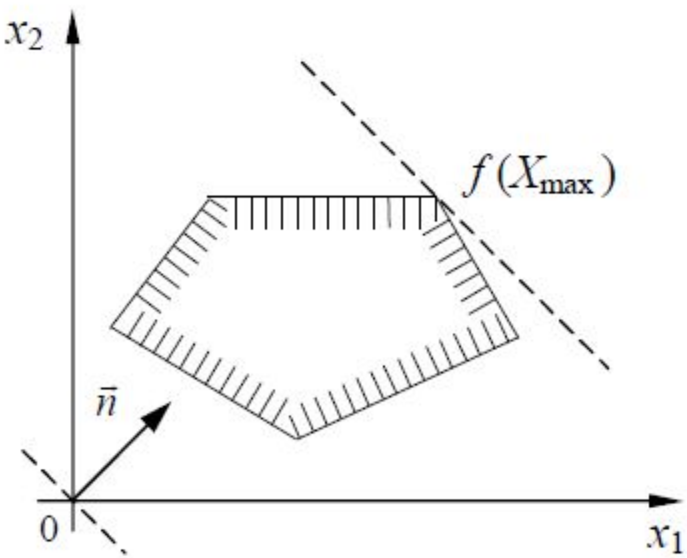

Рис. 2.1

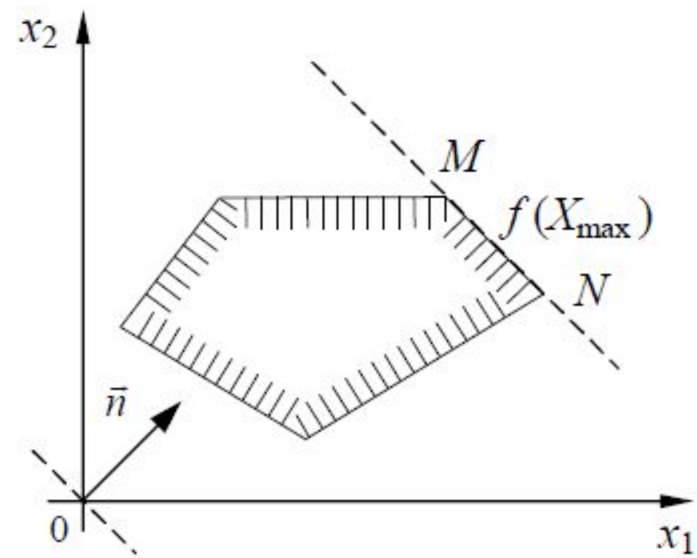

Рис. 2.2

Рис. 2.3. Задача ЛП не имеет решения, так как функция неограниченна сверху.

Рис. 2.4. Задача ЛП не имеет решения, так как система (2.1) несовместна.

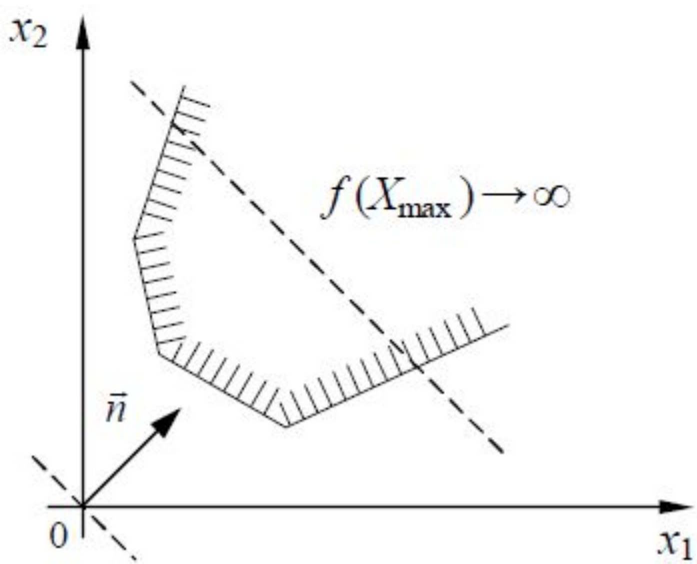

Рис. 2.3

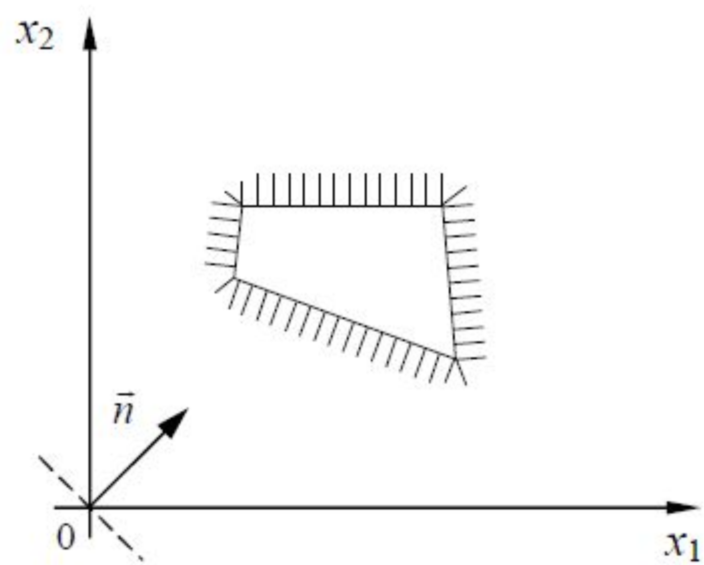

Рис. 2.4

Пример. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья S_1 , S_2 , S_3 . Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.1.

Прибыль от реализации одного изделия каждого вида равна c_1 и c_2 , а общее количество сырья вида S_i равно b_i, $i = 1, 2, 3$. Считая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий будет максимальной.

Таблица 2.1

Сырье	A	B	Запасы
S_1	$a_{11} = 12$	$a_{12} = 4$	$b_1 = 300$
S_2	$a_{21} = 4$	$a_{22} = 4$	$b_2 = 120$
S_3	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 12$	$b_3 = 252$
Прибыль	$c_1 = 30$	$c_2 = 40$	

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 количество изделий первого и второго вида в плане предприятия. Поскольку производство продукции ограничено только сырьем каждого типа S_i, то получим условия:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \qquad x_j \ge 0, \quad j = 1, 2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Переменные x_1 и x_2 не могут быть отрицательными по смыслу задачи.

Вычислим прибыль от реализации продукции и получим

$$f(X) = 30x_1 + 40x_2 \to \max, \qquad X = (x_1, x_2).$$

Итак, мы получили стандартную модель с двумя переменными.

Решим задачу линейного программирования геометрически, придерживаясь плана, приведенного ранее.

1. Строим прямые l_1, l_2, l_3 в плоскости x_1Ox_2 (рис. 2.5):

$l_1: 12x_1 + 4x_2 = 300$, по двум точкам $A_1(25;0)$ и $B_1(0;75)$;

$l_2: 4x_1 + 4x_2 = 120$, по двум точкам $A_2(30;0)$ и $B_2(0;30)$;

$l_3: 3x_1 + 12x_2 = 252$, по двум точкам $A_3(84;0)$ и $B_3(0;21)$.

Обратимся к неравенствам (2.3). Отметим те полуплоскости, которые им удовлетворяют. Учтем на чертеже неотрицательность переменных x_1 и x_2 и получим многоугольник OB_3ECA_1 решений данной системы неравенств (рис. 2.5).

2. Построим линию уровня – прямую l: $30x_1 + 40x_2 = 0$ и нормальный вектор $\vec{n} = \{30; 40\}$.

3. Передвигая линию уровня l в направлении вектора $\vec{n}$, заметим, что в точке E целевая функция будет иметь наибольшее значение. Найдем координаты этой точки как координаты точки пересечения прямых l_2 и l_3, решая систему соответствующих уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, \end{cases} \rightarrow \quad x_1 = 12, \; x_2 = 18.$$

Таким образом, точка $E(12;18)$ определяет наибольшее значение целевой функции.

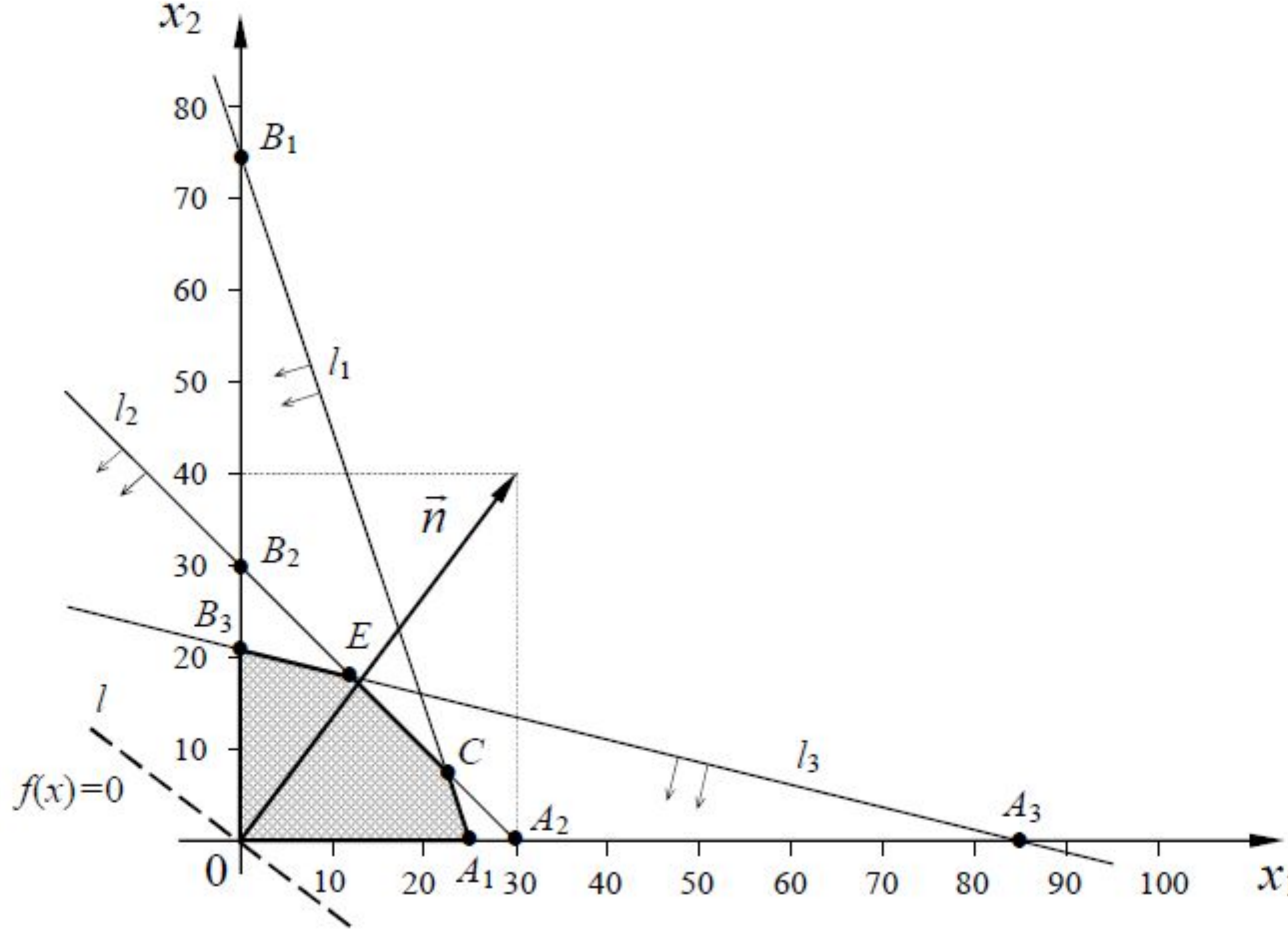

Рис. 2.5

4. Найдем величину целевой функции, подставив найденные значения переменных, и запишем окончательный ответ

$$X_{\max} = (12,18), \quad \rightarrow \quad f_{\max} \quad f(X_{\max}) \quad 1080.$$

Наибольшая прибыль будет равна 1080 (у.е).

Графические метод решения ЗЛП в Excel

Для решения заданной задачи линейного программирования воспользуемся программой Excel (см. Рисунок 1). В Основную таблицу введены коэффициенты ограничений и целевой функции. Границы ограничений (это прямые) строим по двум точкам. Важно выбрать точки так, чтобы можно было наглядно по графикам границ увидеть область ограничений. В нашем случае правые части ограничений и коэффициенты ограничений положительны. Поэтому в качестве первой точки можно взять $x_1 = 0$, координата x_2 вычисляется из уравнения соответствующей границы. Вторая точка определяется аналогично: $x_2 = 0$, координата x_1 вычисляется из уравнения соответствующей границы.

Графические метод решения ЗЛП в Excel

В Таблице 1 (см. Рисунок 1) в ячейку А10 введено число 0, в ячейку В10 введена формула =С3/В3. В ячейку В11 введено число 0, в ячейку А11 введена формула =С3/А3. Аналогично заполняются ячейки Таблицы 2 и Таблицы 3.

Ячейки Таблицы 4 соответствуют точкам для построения части прямой $30x_1 + 40x_2 = C$, где C – значение целевой функции. В начале вводим некоторое значение числа C, далее по этому числу определяем точки для построения целевой функции. Число C будем изменять и по графику целевой функции визуально определим вершину, в которой целевая функция принимает максимальное значение.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Основная таблица						
2	x1	x2	b					
3	12	4	300					
4	4	4	120					
5	3	12	252					
6	30	40						
7								
8		Таблица 1			Таблица 2			Таблица 3
9	x1	x2		x1	x2		x1	x2
10	0	75		0	30		0	21
11	25	0		30	0		84	0
12								
13					Таблица 4			
14				x1	x2			
15	C =	400		0	10			
16				13,33333	0			

Рисунок 1. Расчет данных для построения границ и целевой функции

В ячейку B15 введено число 400 (число выбиралось произвольно). В ячей D15 введено число 0, в ячейку E15 введена формула =B15/B6. В ячейку E16 вв дено число 0, в ячейку D16 введена формула =B15/A6.

На Рисунке 2 представлены графики границ и целевой функции.

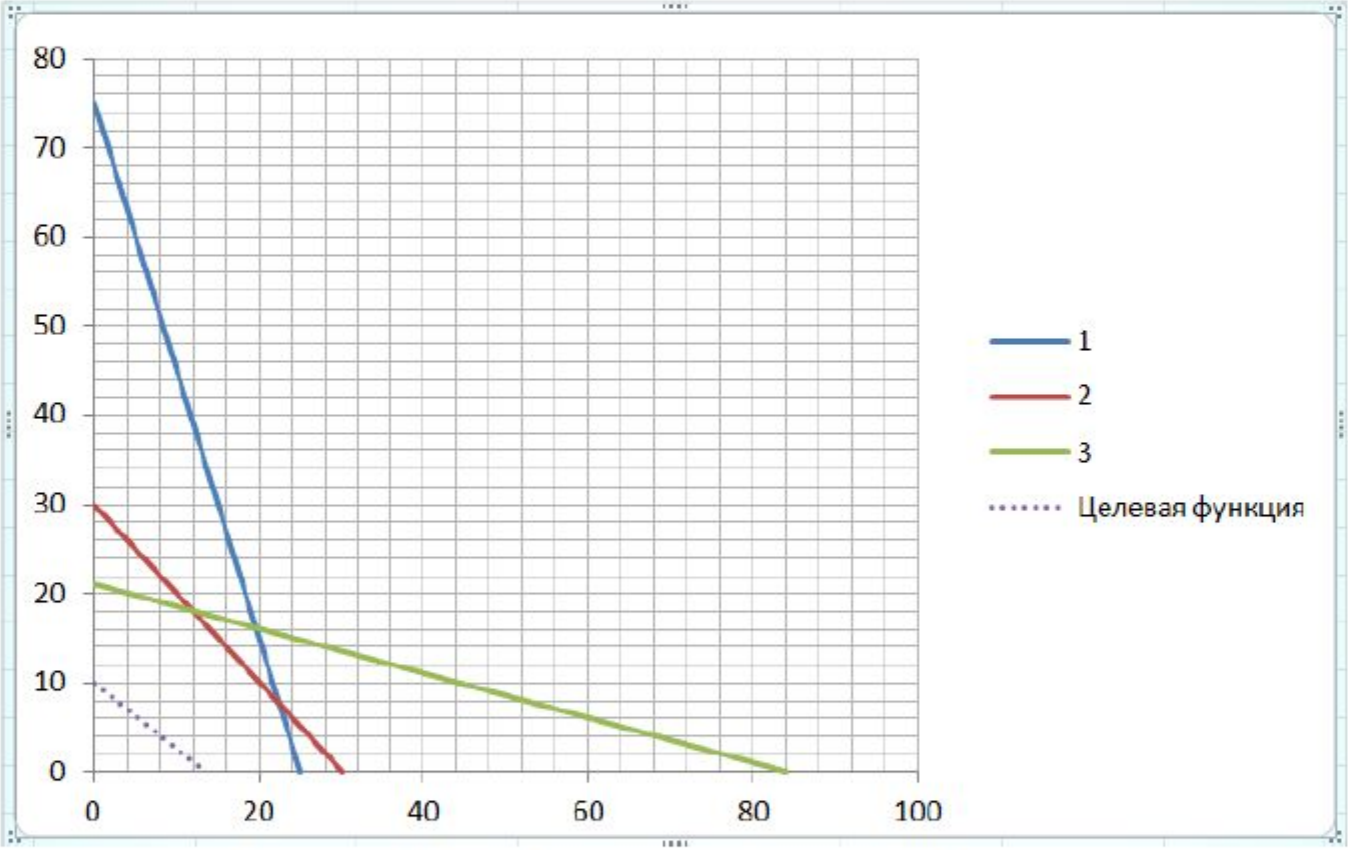

Рисунок 2. Графики границ и целевой функции

Визуально область ограничений находится в первой четверти «ниже» всех границ, определяемых прямыми 1, 2 и 3. Изменим значения параметра C: $C=800$; $C=1020$. На Рисунке 3 представлены графики границ и целевой функции при значении $C=800$. На Рисунке 4 представлены графики границ и целевой функции при значении $C=1200$.

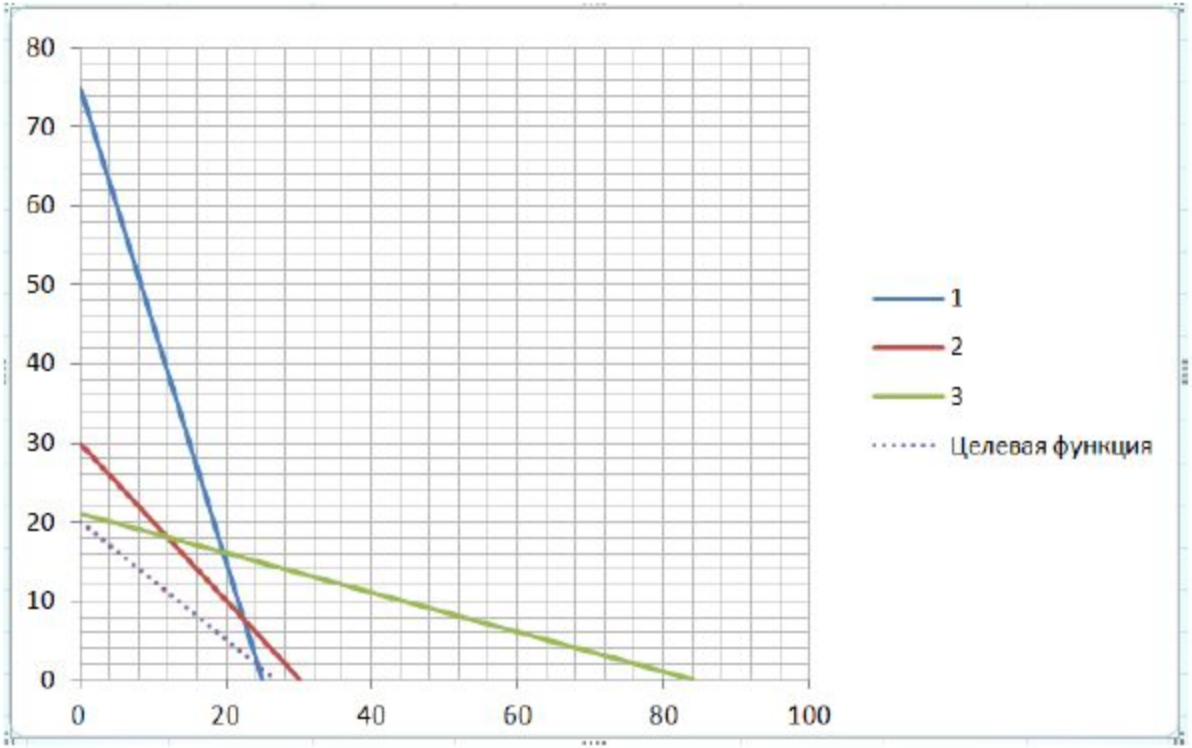

Рисунок 3. Графики границ и целевой функции при C = 800

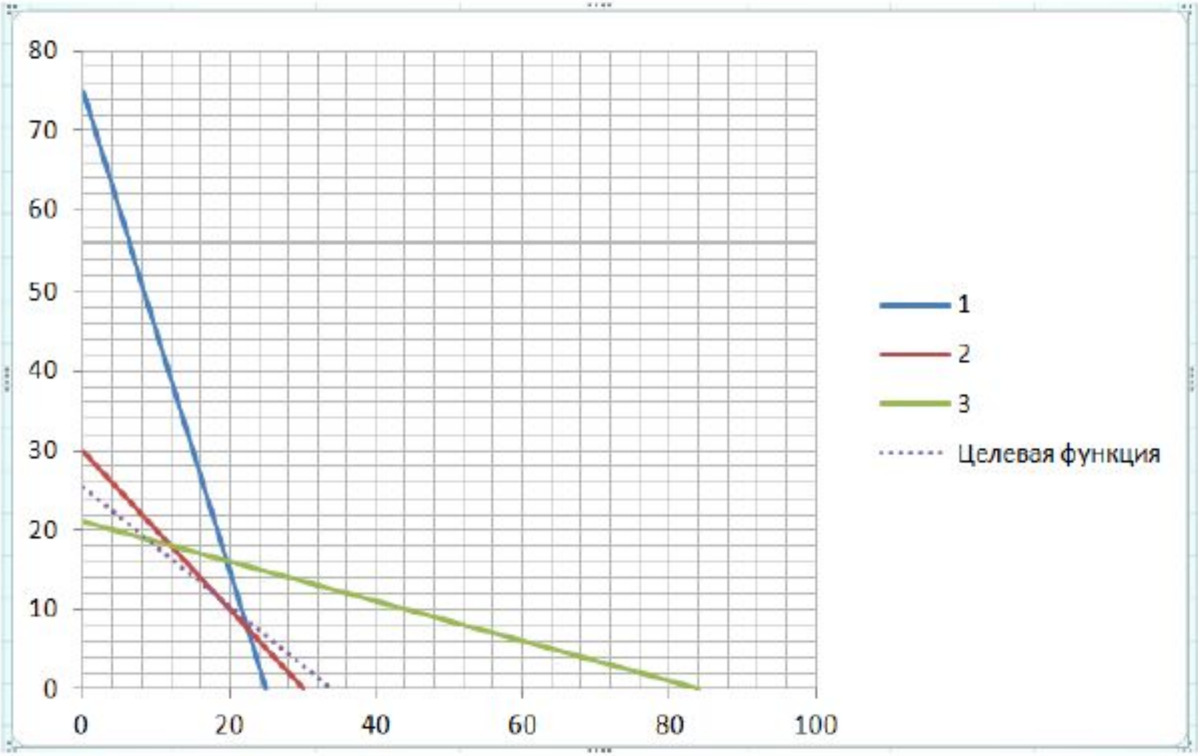

Рисунок 4. Графики границ и целевой функции при $C = 1020$

Из последнего рисунка видно, что максимальное значение целевая функция принимает в вершине, которая определяется пересечением прямых 2 и 3. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, \end{cases}$$

получаем $x_1 = 12$; $x_2 = 18$. Подставим найденные значения в целевую функцию и найдем максимальное значение целевой функции z. В итоге получаем окончательно

$$\begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18, \end{cases}$$

$$z_{\max} = 1080.$$

Замечание. Для построения графиков прямых в программе Excel на вкладке «Вставка» в группе «Диаграммы» нажмем кнопку Точечная и выберем подтип «Точечная с прямыми отрезками». Далее на вкладке «Конструктор» в группе «Данные» нажмем кнопку «Выбрать данные». В окне «Выбор источника данных» в группе «Элементы легенды (ряды)» нажмем кнопку «Добавить» и в окне «Изменение ряда» заполняем поля: «Имя ряда:», «Значение X:», «Значение Y:».

Симплекс-метод в программе Excel

Метод Жордана-Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Жордана-Гаусса рассмотрим на основе примера.

Пример 1. Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \end{cases}$$

методом Жордана-Гаусса.

Решение. Запишем расширенную матрицу этой системы в виде таблицы

Таблица 1

x1	x2	x3	b
3	-4	2	3
-4	5	7	2
5	3	-6	-4

Рисунок 7. Расширенная матрица системы

Среди элементов основной матрицы системы выберем разрешающий элемент. Разрешающий элемент – это любой, не равный нулю элемент. Выберем в качестве первого разрешающего элемента элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца, его значение равно -4. Заметим, что в качестве разрешающего элемента можно было выбрать любой элемент первых трех столбцов расширенной матрицы системы (все они не равны нулю).

Преобразуем расширенную матрицу системы с помощью разрешающего элемента. Для этого запишем пустую таблицу (см. Рисунок 2).

			Таблица 2
x1	x2	x3	b

Рисунок 8. Пустая Таблица 2.

Далее будем заполнять Таблицу 2 по приведенным ниже правилам, осуществляя все преобразования по предыдущей Таблице 1. Для наглядности разделим заполнение Таблицы 2 по разным рисункам.

Выбираем в Таблице 2 элемент, соответствующий разрешающему элементу. В нашем случае – это элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца. Все элементы первого столбца Таблицы 2 над выбранным элементом и под выбранным элементом заполняем нулями. Все элементы второй строки делим на выбранный элемент (см Рисунок 3)

			Таблица 2
x1	x2	x3	b
0			
1	-5/4	-7/4	-1/2
0			

Рисунок 9. Заполнение Таблицы 2. Шаг первый

Заполняем все оставшиеся незаполненные элементы Таблицы 2 по следующему алгоритму. Выбираем незаполненный элемент Таблицы 2, для примера, выберем элемент – первая строка, четвертый столбец. В предыдущей Таблице 1 построим прямоугольник по двум элементам (эти элементы расположены в вершинах диагонали прямоугольника): разрешающий элемент и элемент, стоящей на пересечении первой строки и четвертого столбца (этот элемент соответствует заполняемому элементу Таблицы 2), см. Рисунок 4.

Таблица 1

x1	x2	x3	b
3	-4	2	3
-4	5	7	2
5	3	-6	-4

Рисунок 10. Заполнение Таблицы 2. Шаг второй

Значение выбранного элемента Таблицы 2 вычисляется по правилу. В Таблице 1 значение элемента, стоявшего в противоположной вершине диагонали прямоугольника, проведенной от вершины разрешающего элемента (этот элемент соответствует выбранному элементу), минус произведение значений элементов вершин другой диагонали прямоугольника, деленное на значение разрешающего элемента: $3-3\cdot 2/-4=3+3/2=9/2$ (см. Рисунок 5).

Таблица 2

x1	x2	x3	b
0			9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0			

Рисунок 11. Заполнение Таблицы 2. Шаг третий

Еще раз применим алгоритм вычисления значения элемента, стоящего на пересечении третьей строки и третьего столбца Таблицы 2: $-6-5\cdot 7/-4=-6+35/4=11/4$ (см. Рисунок 6)

Таблица 1

x1	x2	x3	b
3	-4	2	3
-4	5	7	2
5	3	-6	-4

Таблица 2

x1	x2	x3	b
0			9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0		11/4	

Рисунок 12. Заполнение Таблицы 2. Шаг третий (продолжение)

Аналогично вычисляются значения остальных элементов Таблицы 2 (см. Рисунок 7)

			Таблица 2
x1	x2	x3	b
0	-1/4	29/4	9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0	37/4	11/4	-3/2

Рисунок 13. Заполнение Таблицы 2. Шаг третий (окончание)

Последняя таблица – это расширенная матрица системы линейных уравнений, которая равносильна исходной. Применим к этой таблице метод Жордана-Гаусса. Выберем разрешающий элемент для этой таблицы, т. е. любой элемент основной матрицы системы, не равный нулю. Важно подчеркнуть, что разрешающий элемент не должен находиться в выбранных раннее строках и столбцах для разрешающего элемента (в данном случае – это вторая строка и первый столбец).

Для разрешающего элемента – первая строка и второй столбец вычислим значения элементов Таблицы 3 по описанному выше алгоритму (см. Рисунок 8)

			Таблица 2
x1	x2	x3	b
0	-1/4	29/4	9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0	37/4	11/4	-3/2

			Таблица 3
x1	x2	x3	b
0	1	-29	-18
1	0	-38	-23
0	0	271	165

Рисунок 14. Метод Жордана-Гаусса для выбранного разрешающего элемента

Замечание. Значения элементов Таблицы 3, которые соответствуют первому столбцу Таблицы 2, можно не пересчитывать.

Выберем разрешающий элемент для Таблицы 3. Он определяется однозначно – третья строка и третий столбец (еще раз повторим, что разрешающий элемент не должен находиться в выбранных раннее строках и столбцах для разрешающего элемента). Применим метод Жордана-Гаусса для Таблицы 3 с выбранным разрешающим элементом (см. Рисунок 9).

Таблица 3

x1	x2	x3	b
0	1	-29	-18
1	0	-38	-23
0	0	271	165

→

Таблица 4

x1	x2	x3	b
0	1	0	-93/271
1	0	0	37/271
0	0	1	165/271

Рисунок 15. Метод Жордана-Гаусса для выбранного разрешающего элемента

Замечание. Значения элементов Таблицы 4, которые соответствуют первому и второму столбцу Таблицы 3, можно не пересчитывать.

Последняя таблица – это расширенная матрица системы уравнений, которая равносильна исходной. Поэтому

$$\begin{cases} x_1 = -37/271, \\ x_2 = -93/271, \\ x_3 = 165/271. \end{cases}$$