

Глава 2.

Связность графов

2.1. Маршруты, цепи, циклы

Маршруты

Определения. Конечная последовательность вершин и ребер $x_0, u_1, x_1, u_2, \dots, x_{l-1}, u_l, x_l$ ($l \geq 0$), $x_i \in V$, $u_i \in E$ в которой соседние ребра имеют общую вершину, называется **маршрутом** из вершины x_0 в вершину x_l , или маршрутом, соединяющим x_0 с x_l .

В случае $x_0 = x_l$ маршрут называется **циклическим**. Число l называется **длиной** маршрута. Маршрут не является частью графа, так как порядок его обхода существенен.

Понятие маршрута не зависит от ориентации ребер.

Цепи и циклы

Маршрут называется **цепью**, если все ребра в нем различны. Цепь называется **простой**, если все ее вершины различны.

Циклическая цепь называется **циклом** (следовательно, в цикле все ребра различны). Цикл называется **простым**, если все его вершины различны, кроме $x_0 = x_l$.

Лемма. Всякий маршрут графа содержит хотя бы одну простую цепь, соединяющую ту же пару

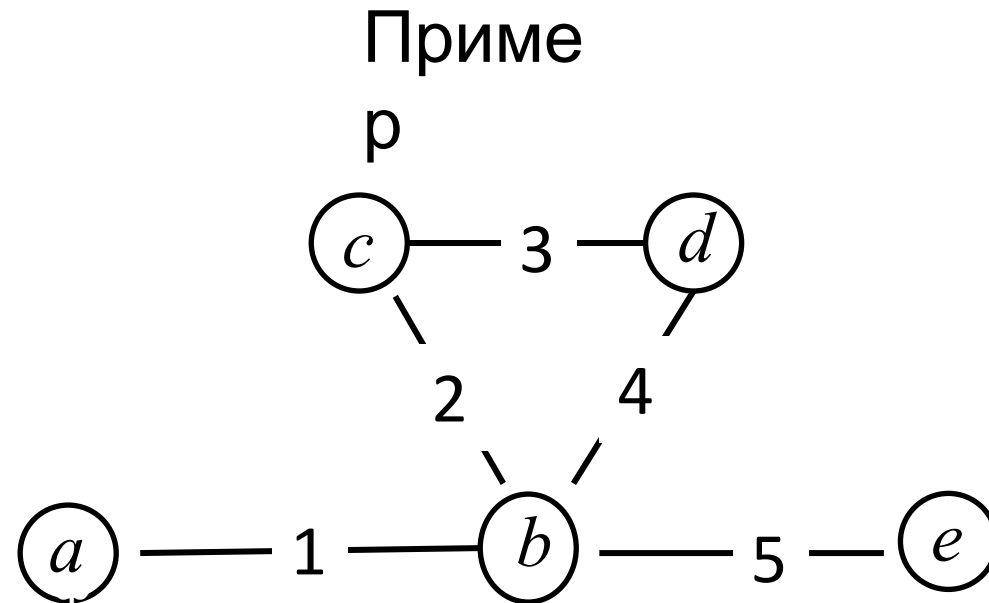
Вершин
Доказательств

во

Если x_i -- первая из тех вершин маршрута, которая входит в него более одного раза, а x_j -- последняя из совпадающих с x_i вершин этого маршрута, то его можно заменить более коротким

$$x_0 u_1 x_1 \dots x_i u_{j+1} x_{j+1} u_{j+2} \dots x_{l-1} u_l x_l$$

Если в полученном маршруте есть еще повторяющиеся вершины, то снова заменяем его более коротким и так далее, пока не выделим маршрут без повторяющихся вершин.



Маршрут $a \ 1 \ b \ 2 \ c \ 3 \ d \ 4 \ b \ 5 \ e$ содержит простую цепь $a \ 1 \ b \ 5 \ e$.

Следствие Всякий кратчайший маршрут между двумя заданными вершинами графа есть простая цепь.

Всякий цикл наименьшей длины при заданной вершине является простым.

Если маршрут рассматривать с учетом ориентации ребер (может быть и по звеньям), то получим соответствующие определения:

ориентированный маршрут
(ормаршрут);

ориентированная цепь (орцепь) – **путь**;

простая орцепь – простой путь.

Задачи о маршрутах

В теории рассматривается ряд задач и алгоритмов определения свойств маршрутов:

существование маршрутов заданной длины;

достижимость вершин;

число маршрутов заданной длины;

компоненты связности и бисвязности;

кратчайшие цепи/пути;

кратчайшие цепи/пути на взвешенных графах.

Существование маршрутов

Рассматривается неориентированный (маршрут не предполагает ориентации) униграф (важен лишь факт смежности вершин). Такой граф можно рассматривать как симметричное бинарное отношение и его можно задать матрицей смежности R , элементы r_{ij} которой – булевы. $r_{ij} = 1$, если вершины смежны; из вершины x_i существует маршрут

длины 1 в вершину x_j .
Элемент матрицы R^2 $r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^n r_{ik}^{(1)} \wedge r_{kj}$ определяет существование маршрута длины 2 между этими вершинами. Далее по индукции:

$$r_{ij}^{(l)} = \bigvee_{k=1}^n r_{ik}^{(l-1)} \wedge r_{kj} \quad (*)$$

маршрут длины l из вершины x_i в вершину x_j существует, если существует маршрут длины $l-1$ из вершины x_i в вершину x_k и вершины x_k и x_j смежны.

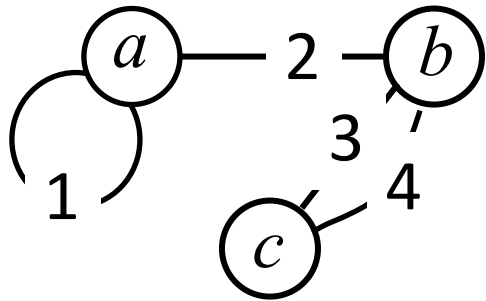
Для маршрутов других видов задаются соответствующие матрицы смежности.

Нахождение

маршрутов

Зададим граф общего вида тройками вида (x, v, y) , где $x, y \in V, v \in E$.

Умножение отношений примет следующий вид: если существует маршрут из вершины x_i в вершину x_k длины $l-1$ и есть ребро (x_k, v, x_j) , то оно добавляется к маршруту длины l .



Длина	Длина	Длина	
$^1 a1a$	$^2 a1a1a$	$^3 a1a1a1a$	
$a2b$	$a1a2b$...	
$b2a$	$a2b2a$	$a1a2b3c$...
$b3c$	$a2b3c$	$b2a1a2b$	
$b4c$	$a2b4c$	$b3c4b2a$	
$c3b$	$b2a1a$...	
$c4b$	$b2a2b$	$c3b4c3b$	
	$b3c3b$...	
	...		

Число маршрутов

Пусть задан граф общего вида с матрицей смежности R . Элемент r_{ij} определяет число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j .

Возведем R в l -ю степень по правилам обычного матричного умножения и рассмотрим элемент $r_{ij}^{(l)}$

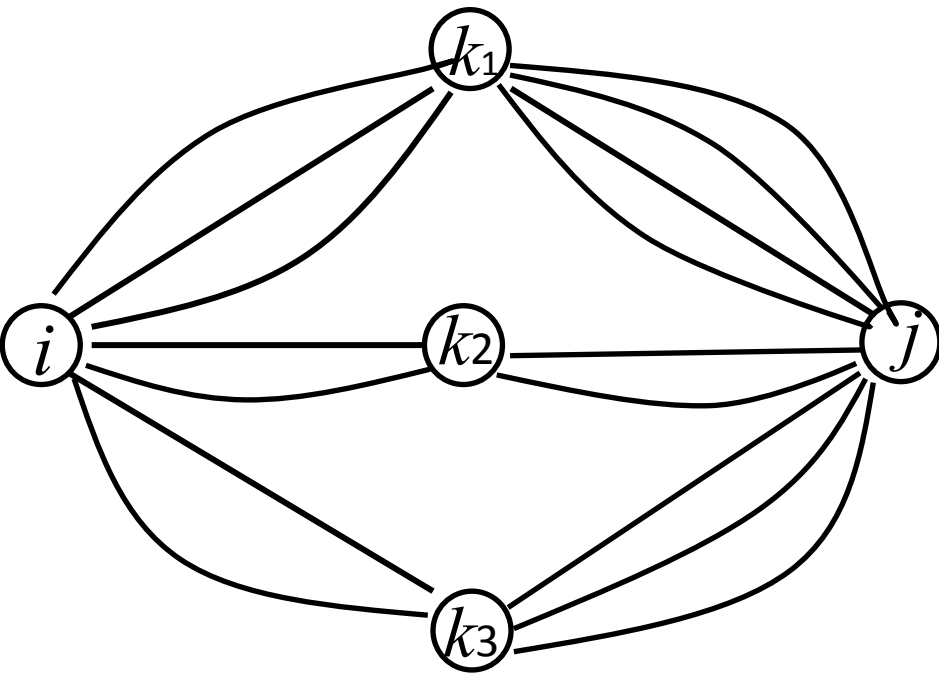
Теорема. Элемент $r_{ij}^{(l)}$ равен числу различных маршрутов длины l из вершины x_i в вершину x_j .

Доказательство индукцией по l .

$$r_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^n r_{ik}^{(l-1)} r_{kj}$$

Число различных маршрутов длины 2 из вершины x_i в вершину x_j через вершину x_k есть

$$r_{ij}^{(2)} = r_{ik} r_{kj}$$

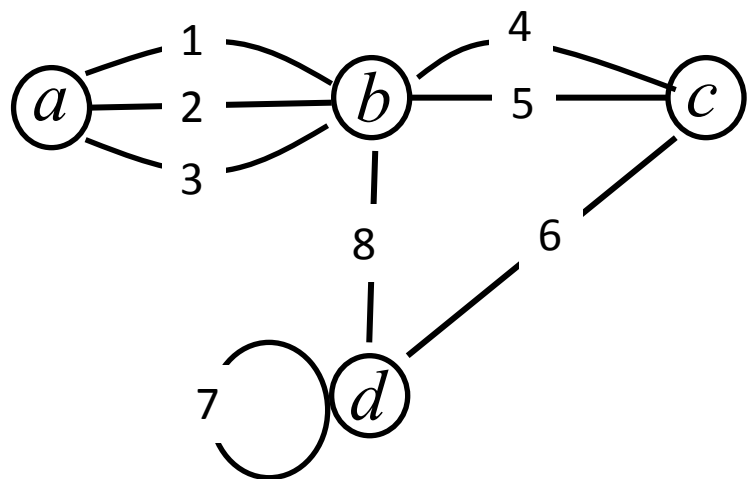


Просуммировав по всем k получим элемент матрицы

$$r_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n r_{ik}^{(1)} r_{kj}$$

Далее по индукции.

Здесь сложение и умножение – обычные арифметические операции.



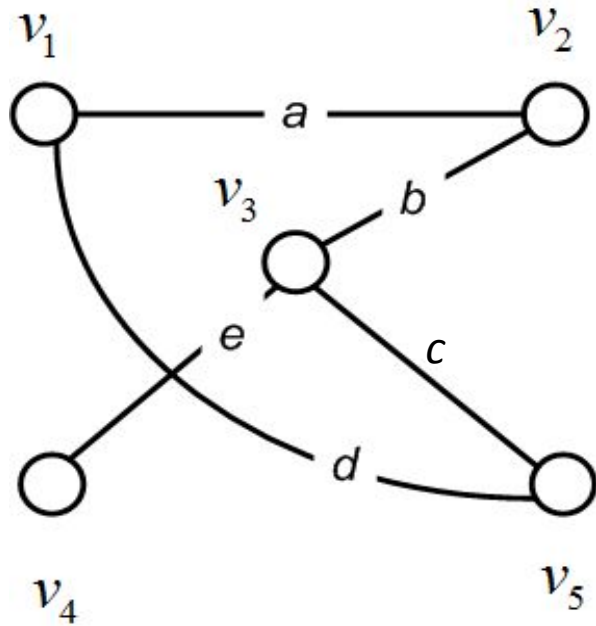
Пример
p

R	a	b	c	d
a	0	3	0	0
b	3	0	2	1
c	0	2	0	1
d	0	1	1	1

	a	b	c	d
a	9	0	6	3
b	0	14	1	3
c	6	1	5	3
d	3	3	3	3

	a	b	c	d
a	0	42	3	9
b	42	5	31	18
c	3	31	5	9
d	9	18	9	9

Для орграфов изменяется только матрица R .



R					
	0	1	0	0	1
	1	0	1	0	0
	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	0

	2	0	2	0	0
	0	2	0	1	2
	2	0	3	0	0
	0	1	0	1	1
	0	2	0	1	2

	0	4	0	2	4
	4	0	5	0	0
	0	5	0	3	5
	2	0	3	0	0
	4	0	5	0	0

	8	0	10	0	0
	0	9	0	5	9
	10	0	13	0	0
	0	5	0	3	5
	0	9	0	5	9

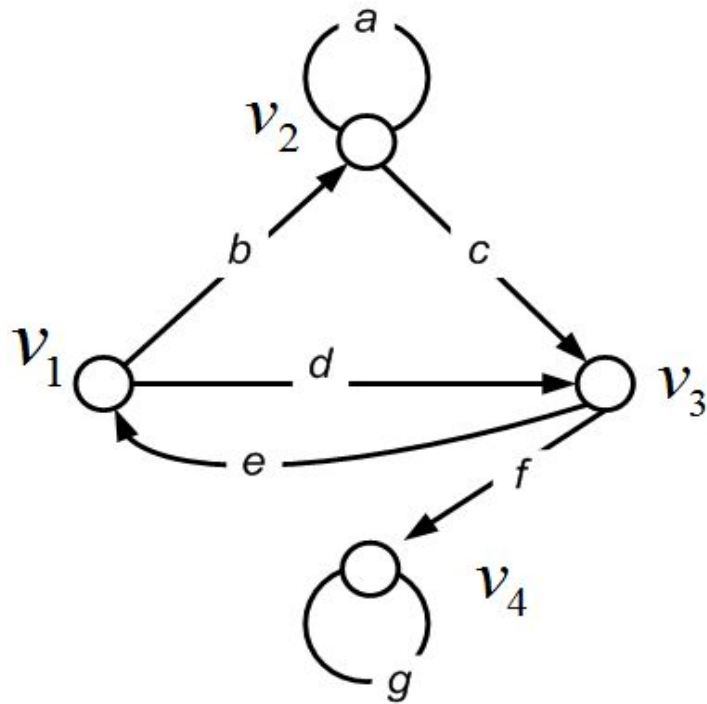
Достижимость

Если нас интересует только достижимость j – й вершины из i – й за l шагов, то есть наличие маршрута длины l , то определяем матрицу смежности над булевой алгеброй $\mathbf{B}\{0,1\}$.

При этом элемент $r_{ij}^{(l)}$ матрицы R^l будет равен 1, если существует хотя бы один маршрут длины l из вершины x_i в вершину x_j и 0, если не существует ни одного такого маршрута.

Ориентированные маршруты

Понятие маршрута можно обобщить на случай ориентированных графов. Ориентированная цепь (орцепь) часто называется **путем**, а ориентированный цикл – **орциклом** (контуром).



	0	1	1	0
	0	1	1	0
	1	0	0	1
	0	0	0	1

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	0	1	1	1
	0	0	0	1

	1	1	1	1
	1	1	1	1
	1	1	1	1
	0	0	0	1

2.2. Компоненты связности

Компоненты и бикомпоненты

Определение. Вершины x, y графа G , между которыми существует простая цепь, называются *связными* (неотделенными).

Отношение *СВЯЗНОСТИ* (неотделенности) вершин

- рефлексивно (каждая вершина соединена с собой цепью нулевой длины);
- симметрично (цепь, записанная в обратном порядке – тоже цепь);
- транзитивно (если существует цепь из x в y , и цепь из y в z , то существует и цепь из x в z).

Таким образом, отношение связности (неотделенности) есть отношение эквивалентности на множестве вершин V ; при этом V разбивается на классы попарно связных (неотделенных) вершин $V_1, V_2 \dots V_k$.

Подграфы порожденные подмножествами V_i , не имеют общих вершин и ребер и называются *компонентами связности* (или просто *компонентами*).

Число их обозначается через $\kappa(G)$ (каппа).

Если $\kappa(G) = 1$, то граф называется *связным*. Другая крайность – *пустой* граф: для него $\kappa(G) = n$.

Отношение «быть в одной компоненте» для ребер – эквивалентность, как и для вершин.

Для ориентированных графов

Вершина y *достижима* из вершины x , если существует путь из x в y (высказывание $D(x, y)$). Вершины x и y *взаимодостижимы*, если истинно высказывание $D(x, y) \wedge D(y, x)$.

Отношение взаимодостижимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.

Множество V вершин графа разбивается на классы взаимодостижимых вершин $V_1, V_2, \dots, V_{\vec{k}}$.

Подграфы, порожденные этими подмножествами, называются *компонентами бисвязности*, или *бикомпонентами* графа G .

Число бикомпонент обозначается через $\vec{k}(G)$.

Граф называется **СИЛЬНО СВЯЗНЫМ**, если он состоит из единственной бикомпоненты.

Множество вершин, достижимых из вершины x , обозначим $D(x)$
Теорема Вершины x и y взаимодостижимы тогда и только тогда, когда $D(x) = D(y)$.

\Rightarrow Если x и y взаимодостижимы, то для любой вершины $z \in V$

ввиду транзитивности отношения взаимодостижимости, из $z \in D(x)$ следует $z \in D(y)$, а из $z \in D(y)$ следует $z \in D(x)$.
Поэтому $D(x) = D(y)$.

\Leftarrow Пусть $D(x) = D(y)$. Так как $x \in D(x)$ и $y \in D(y)$, то из равенства $D(x) = D(y)$ следует, что $y \in D(x)$ и $x \in D(y)$, т.е. вершины x и y взаимодостижимы. \square

Матрица смежности R над булевой алгеброй $\mathbf{B}\{0,1\}$ рефлексивна ($R = R \cup \Delta$, Δ – единичная матрица), т.к. любая вершина связна сама с собой и достижима сама из себя. Для неориентированного графа R симметрична.

Отношение неотделенности/достижимости – это транзитивное замыкание отношения смежности

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \dots$$

Элемент матрицы \hat{R} $\hat{r}_{ij} = 1$, если существует цепь/путь из вершины x_i в вершину x_j . Для нахождения \hat{R} применяется итеративная процедура.

Для первой итерации положим $R_1 := R \cup \Delta$. Элемент матрицы R_l

$$r_l[i,j] := r_{l-1}[i,j] \vee r_{l-1}[i,k] \wedge r_{l-1}[k,j] \quad (l - \text{индекс итерации})$$

На некоторой итерации $R_{l+1} = R_l$ и процесс останавливается; при этом $\hat{R} = R_l$. Алгоритм работает «на месте» — матрица R_{l+1} записывается на месте матрицы R .

$$R_0 = R;$$

$$R_1 = R_0 \cup R_0^2 = R \cup R^2;$$

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 \cup R_1^2 = (R \cup R^2) \cup (R \cup R^2)^2 = \\ &= R \cup R^2 \cup (R^2 \cup R^3 \cup R^3 \cup R^4) = \\ &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= R_2 \cup R_2^2 = (R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4) \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4)^2 = \\ &= (R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4) \cup (R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 \cup \\ &\quad \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 \cup R^7 \cup R^5 \cup R^6 \cup R^7 \cup R^8) = \\ &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 \cup R^7 \cup R^8 \end{aligned}$$

$$R_4 = R_3 \cup R_3^2 = \dots$$

Вершинам компоненты связности в матрице \hat{R} соответствует подмножество одинаковых строк. Отношение достижимости не является эквивалентностью – в общем случае оно не симметрично. Однако по теореме 2.2. вершинам бикомпоненты также соответствует подмножество одинаковых строк.

Пример

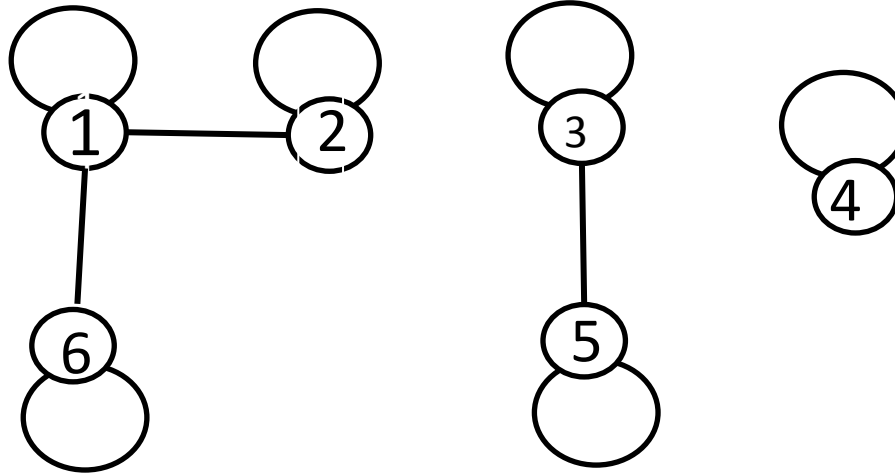
(компоненты)

Фрагмент программы выглядит так:

```
for i=1 to n
  for j=1 to n
    for k=1 to n
      {r[i,j]:=r[i,j] ∨ r[i,k] ∧
      r[k,j];}
```

Пока матрица не перестанет изменяться

(**)



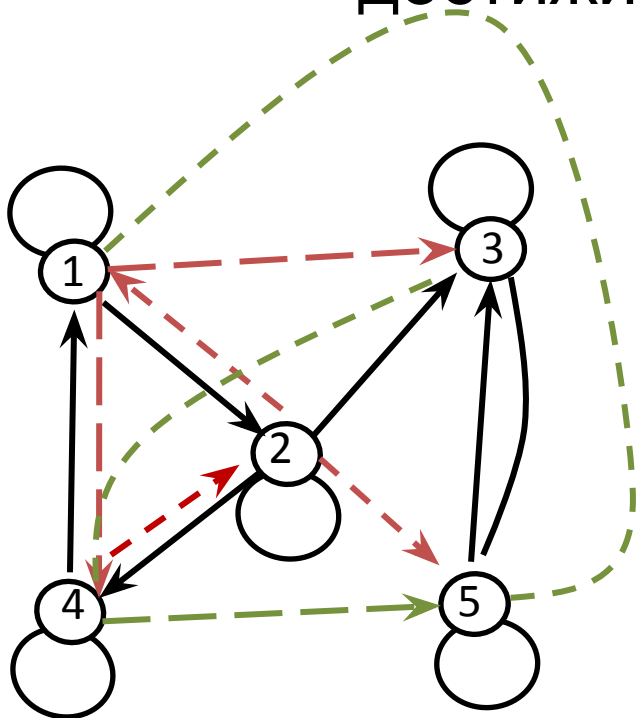
<i>R</i>	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	0	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	1

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	1

Компоненты связности образуют множества $V_1=\{1,2,6\}$, $V_2=\{3,5\}$, $V_3=\{4\}$. Вершинам одной компоненты соответствуют одинаковые строки матрицы $R_{l+1}=\hat{R}$.

Пример (бикомпоненты, матрица достижимости)



$$V_1 = \{1, 2, 4\},$$

$$V_2 = \{3, 5\}$$

R	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1

R_2	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1

R_3	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

R_4	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

Сложность этого алгоритма $O(n^4)$. Сложность умножения матриц составляет $O(n^3)$ и число итераций имеет порядок n .

С. Уоршелл (1962 г.) предложил алгоритм нахождения транзитивного замыкания сложности $O(n^3)$. Экономия достигается за счет изменения порядка просмотра троек вершин в цикле (**).

На нулевой итерации $R_0 = R$ ($r_0[i, j] = r[i, j]$).

Фрагмент программы:

```
for k=1 to n
  for i=1 to n      (***)
    for j=1 to n
      {r[i,j]:=r[i,j]  $\vee$  r[i,k]  $\wedge$  r[k,j];}
```

На k -м шаге цикла по k (k – индекс итерации)

$$r_k[i, j] = r_{k-1}[i, j] \vee r_{k-1}[i, k] \wedge r_{k-1}[k, j]$$

существует путь из вершины x_i в вершину x_j , проходящий через вершины с номерами, не превышающими k , только в следующих случаях.

1. Уже существует путь из вершины x_i в x_j , который проходит через вершины с номерами не более $k-1$.
2. Существует путь из вершины x_i до вершины x_k , проходящий через вершины с номерами не более $k-1$, и путь от вершины x_k до вершины x_j , который также проходит через вершины с номерами не более $k-1$.

По завершению цикла по k определится существование путей между всеми парами вершин.

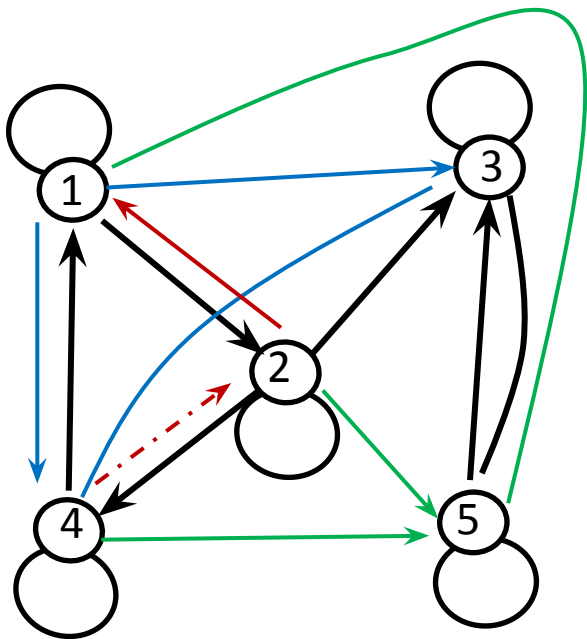
Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. (стр. 194-195)

Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2000. — 384 с.

Алгоритм работает «на месте» -- матрица R_k записывается на месте матрицы R .

Пример (алгоритм

Уоршалла)



R_1	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1

R_4	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

R_2	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	0
5	0	0	1	0	1

R_3	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	1	1	1	1	1
5	0	0	1	0	1

$V_1 = \{1, 2, 4\}, V_2 = \{3, 5\}$

Warshall carried out research and development in [operating systems](#), [compiler design](#), [language design](#), and [operations research](#).

Known for [Floyd–Warshall algorithm](#)

https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Warshall



Warshall Stephen (1935 – 2006)

2.3. Кратчайшие цепи

Волновой алгоритм

Пусть задан связный обыкновенный граф. Поставим задачу найти кратчайшую (с минимальным числом ребер) цепь, соединяющую вершины s и t .

Описание алгоритма.

Шаг 1. Помечаем вершину s меткой 0.

Шаг 2. Меткой $k + 1$ помечаем каждую вершину, которая еще не помечена и смежна хотя бы с одной вершиной, помеченной меткой k . Разметка прекращается, как только вершина t окажется помеченной некоторой меткой l .

Шаг 3. Сама кратчайшая цепь длины l отыскивается следующим образом. Начинаем с вершины t . За x_{l-1} берем любую вершину с меткой $l - 1$ и смежную с t , а за u_l – любое ребро, соединяющее x_{l-1} с t . За x_{l-2} выбираем любую вершину, помеченную меткой $l - 2$ и смежную с x_{l-1} , а за u_{l-1} – любое ребро, соединяющее x_{l-2} с x_{l-1} и так далее, пока не дойдем до вершины s .

Пример 2. Волновой алгоритм прокладки проводов на плате (алгоритм Ли)

7	7		7	7	7	7	8	8	8
6	6		6	6	6	6	7	7	7
5	5		5	5	5			6	7
4	4	4	4	4	4	4	5	6	7
3	3	4	3	3	3	4	5	6	7
2				2	3	4			7
2	1	1	1	2	3	4			7
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	2	2	3	4	5	6	7

Взвешенный граф

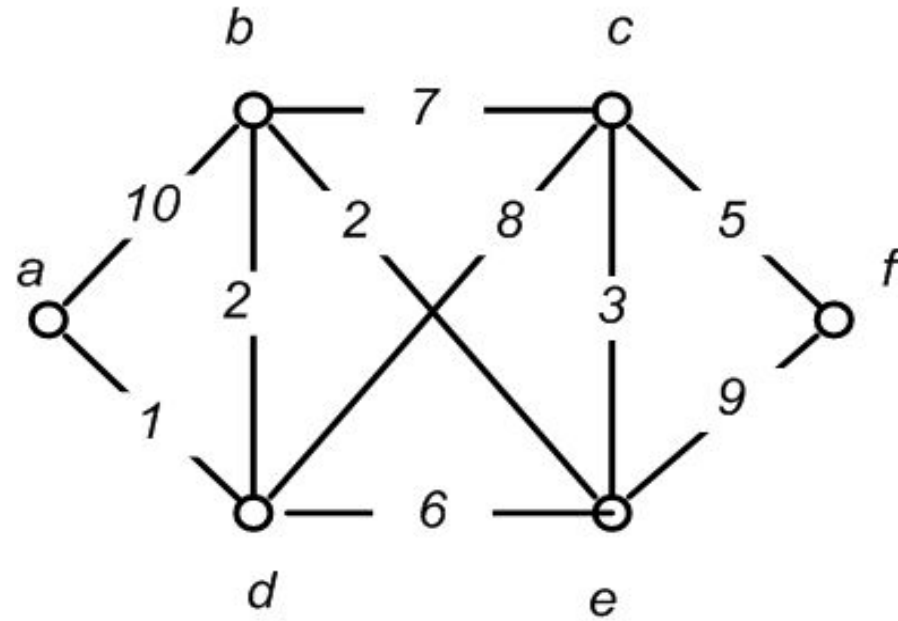
Пусть задан граф $G = (V, E)$ и отображение $f : E \rightarrow C$, ставящее в соответствие каждому ребру u , соединяющему пару вершин $\{x_i, x_j\}$, число c_{ij} – вес (длина) ребра. Таким образом задается **матрица весов** ребер $C = (c_{ij})$ размерности $n \times n$. Если ребро отсутствует, то $c_{ij} = \infty$.

Под **длиной маршрута** понимается сумма весов ребер, входящих в маршрут.

Требуется найти кратчайший по длине маршрут. Легко убедиться, что это простая цепь.

Пример

<i>C</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	0	10		1		
<i>b</i>	10	0	7	2	2	
<i>c</i>		7	0	8	3	5
<i>d</i>	1	2	8	0	6	
<i>e</i>		2	3	6	0	9
<i>f</i>			5		9	0



Рассмотрим случай, когда имеется одна выделенная вершина (источник) s и требуется найти кратчайший маршрут до другой вершины.

$$s = a \rightarrow f ?$$

Алгоритм Беллмана - Форда

Алгоритм заключается в последовательной разметке вершин графа. Метка при вершине x $L(x)=[l(x), p(x)]$, состоит из двух частей: числовой $l(x)$ и навигационной $p(x)$ – ссылкой на предшествующую вершину – метка предшествования.

Шаг 0. Инициализация.

Назначим вершине s числовую метку $l(s) = 0$. Для всех вершин x , отличных от s , назначим метки $l(x) = \infty$. Все навигационные метки при вершинах ссылаются на s :
 $p(x) = s$.

Шаг 1. Итерационный цикл разметки вершин.

Находим любое ребро (x, y) , для которого $l(y) - l(x) > c(x, y)$ и обновляем числовую метку вершины y на $l'(y) = l(x) + c(x, y)$. Очевидно, метка $l'(y)$ может только уменьшиться: $l'(y) < l(y)$ при $y \neq s$. Обновленная навигационная метка при этом ссылается на предшествующую вершину x , вызвавшую данное обновление: $p'(y) = x$.

Цикл продолжается до тех пор пока метки не установятся, то есть не найдется больше ни одной вершины y , для которой можно уменьшить метку.

Шаг 2. Нахождение кратчайшей цепи.

Идем с конца - вершины $x_k = t$ к началу по меткам предшествования: $x_{k-1} = p(x_k)$, $x_{k-2} = p(x_{k-1})$, ...
 $x_0 = p(x_1) = s$.

Легко видеть, что при этом разность числовых меток соседних вершин в точности равна длине соединяющего их ребра: $l(x_k) - l(x_{k-1}) = c(x_{k-1}, x_k)$.

Теорема. Построенный маршрут кратчайший и его длина из s в t есть $l(t)$.

Доказательство. Пусть в размеченном с помощью алгоритма графе имеется **произвольный** маршрут $M [s = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n = t]$.
длины $c(s, t)$.

Тогда

$$l(x_1) - 0 \leq c(x_0, x_1),$$

$$l(x_2) - l(x_1) \leq c(x_1, x_2),$$

.....

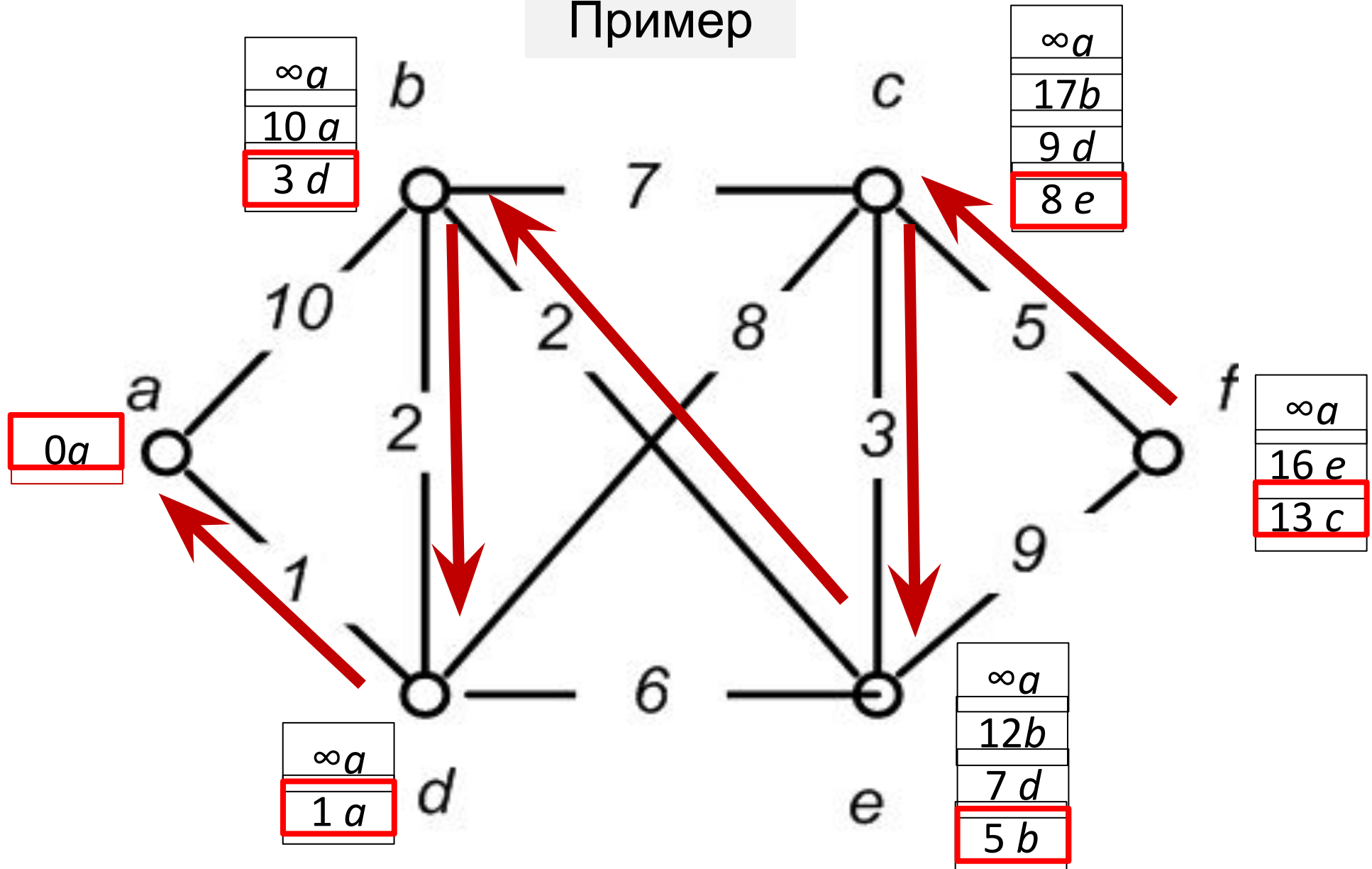
$$l(x_{n-1}) - l(x_{n-2}) \leq c(x_{n-2}, x_{n-1}),$$

$$l(t) - l(x_{n-1}) \leq c(x_n, x_{n-1})$$

$$l(t) \leq c(s, t)$$



Пример



Замечание. Алгоритм находит кратчайшие цепи от одной исходной вершины (в данном случае a) до всех остальных.

Иллюстрация работы алгоритма Форда

Итерации	Ребро	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0		0 <i>a</i>	∞a	∞a	∞a	∞a	∞a
1	<i>ab</i>		10 <i>a</i>				
2	<i>ad</i>				1 <i>a</i>		
3	<i>bc</i>			17 <i>b</i>			
4	<i>be</i>					12 <i>b</i>	
5	<i>db</i>		3 <i>d</i>				
6	<i>dc</i>			9 <i>d</i>			
7	<i>de</i>					7 <i>d</i>	
8	<i>ef</i>						16 <i>e</i>
9	<i>eb</i>					5 <i>b</i>	
10	<i>ec</i>			8 <i>e</i>			
11	<i>cf</i>						13 <i>c</i>

Если метка у вершины не меняется, клетка в следующей строке данного столбца не заполняется. Заключительные метки выделены красным цветом.

В таком представлении алгоритм Беллмана — Форда более пригоден для «ручного» исполнения.

Пусть вершины пронумерованы $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и начальная вершина

$s = 1$. Метка вершины x от начальной $p(x)$ — метка предшествования (навигационная). На шаге инициализации $i = s = 1, l(1) = 0, p(1) = 1$; для остальных x $l(x) = \infty, p(x) = 1$.

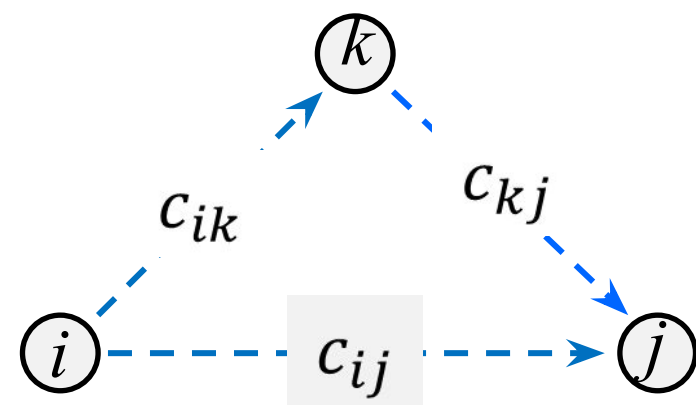
Перебираются тройки i, j, k :

$sum := c_{ik} + c_{kj}$;

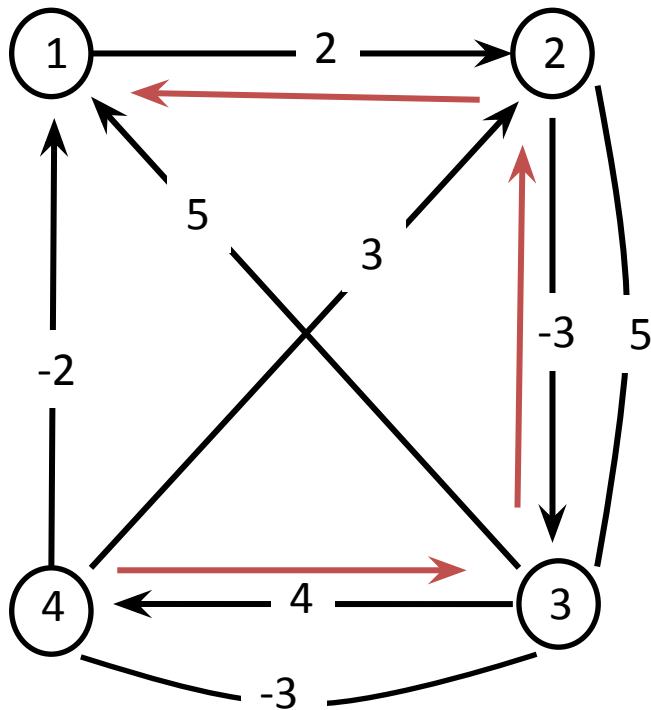
если $sum < c_{ij}$, то $\{c_{ij} := sum$;

$\setminus^* (c_{ij} := \min[c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}])$;

$p(j) := k\}$



Для нахождения кратчайших цепей/путей между всеми парами вершин нужно выполнить цикл по i .



Пример
ρ

0	2	∞	∞
0	2	-1	∞
0	2	-1	3

⊗

c	1	2	3	4
1	0	2	∞	∞
2	∞	0	-3	∞
3	5	5	0	4
4	-2	3	-3	0

=

0	2	-1	∞
---	---	----	---

0	2	-1	3
---	---	----	---

1 2 3 4

0 1	2 1	∞ 1	∞ 1
0 1	2 1	-1 2	∞ 1
0 1	2 1	-1 2	3 3
0 1	2 1	-1 2	3 3

$$c[i,j] := \min_k (c[i,j], c[i,k] + c[k,j])$$

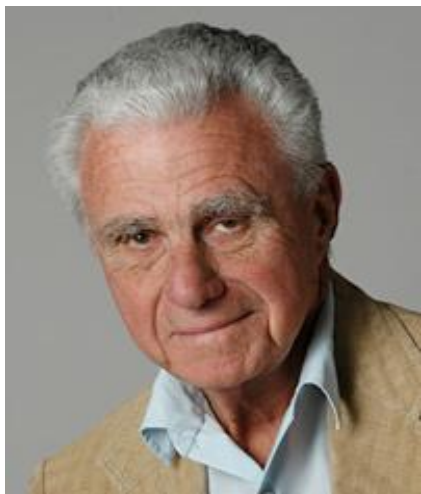
i:=1; {for q=1 to n {p[q]:=i}};

```

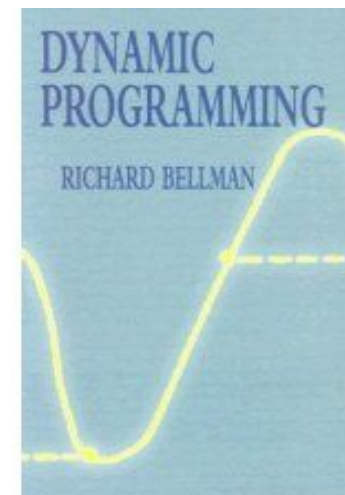
{for j=1 to n
  for k=1 to n
    { s:=c[i,k]+c[k,j];
      if s<c[i,j] then
        {c[i,j]:=s;
          p[j]:=k;}
        }
  }

```

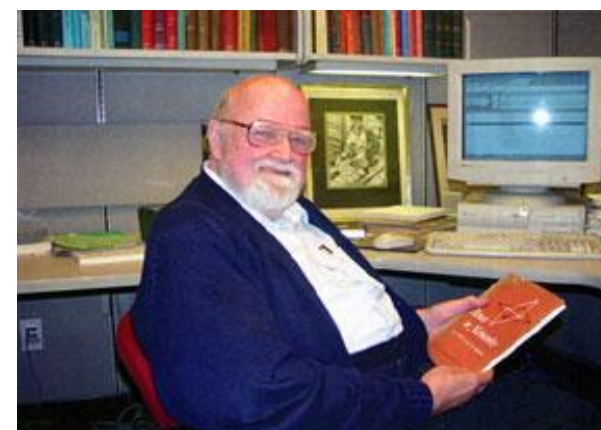
Пока метки не перестанут изменяться



БЕЛЛМАН, Ричард (1920- 1984) – «отец «динамического программирования» - американский математик. Опубликовал 619 статей и 39 книг. Один из наиболее цитируемых математиков в мире. В расцвете творческой жизни после удаления опухоли на позвоночнике 11 лет был прикован к инвалидному креслу, но сохранил полную работоспособность



ФОРД, Лестер младший (1927 - 2017) – американский математик. Независимо от Беллмана в 1956 г. предложил алгоритм нахождения кратчайшего пути в графе, вместе с Фалкерсоном доказал теорему о наибольшем потоке в сети.



Алгоритм Дейкстры

Наиболее эффективный с точки зрения трудоемкости алгоритм разметки вершин предложил Дейкстра.

Метки вершин делятся на две категории – временные L и постоянные L . Временная числовая метка дает верхнюю границу длины цепи от s до этой вершины. Эти метки постепенно уменьшаются с помощью итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации одна из временных меток становится постоянной. Тогда метка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшей цепи от s к вершине с постоянной меткой.

Навигационные метки расставляются аналогично алгоритму Форда и обновляются вместе с числовыми..

Шаг 0. Инициализация.

Назначить вершине s метку $L(s) = [0, s]$ и считать ее постоянной. Вершины с постоянными метками считаются обработанными и к ним алгоритм не возвращается.

Для всех $x \neq s$ назначить метки $L(x) = [\infty, s]$ и считать эти метки временными.

Текущая вершина $p = s$.

Шаг 1. Обновление соседних временных меток из текущей вершины.

Взять текущую вершину p . Рассмотреть все смежные с ней вершины x с временными метками и, если $l(x) - l(p) > c(p, x)$, то обновить их: $L(x) = [l(p) + c(p, x), p]$.

Шаг 2. Превращение метки в постоянную.

- а) Найти вершину x^* с наименьшей временной числовой меткой $l(x^*)$.
- б) Превратить эту метку в постоянную.
- в) Считать эту вершину текущей $p := x^*$.
- г) Если есть еще временные метки, возврат на **шаг 1**.
- д) Если все метки постоянные – переход на **шаг 3**.

Шаг 3. Построение кратчайшей цепи.

Точно так же, как в алгоритме Беллмана – Форда – от конца к началу по навигационным меткам $p(x)$.

При наличии всех постоянных меток доказательство оптимальности аналогично алгоритму Беллмана – Форда.

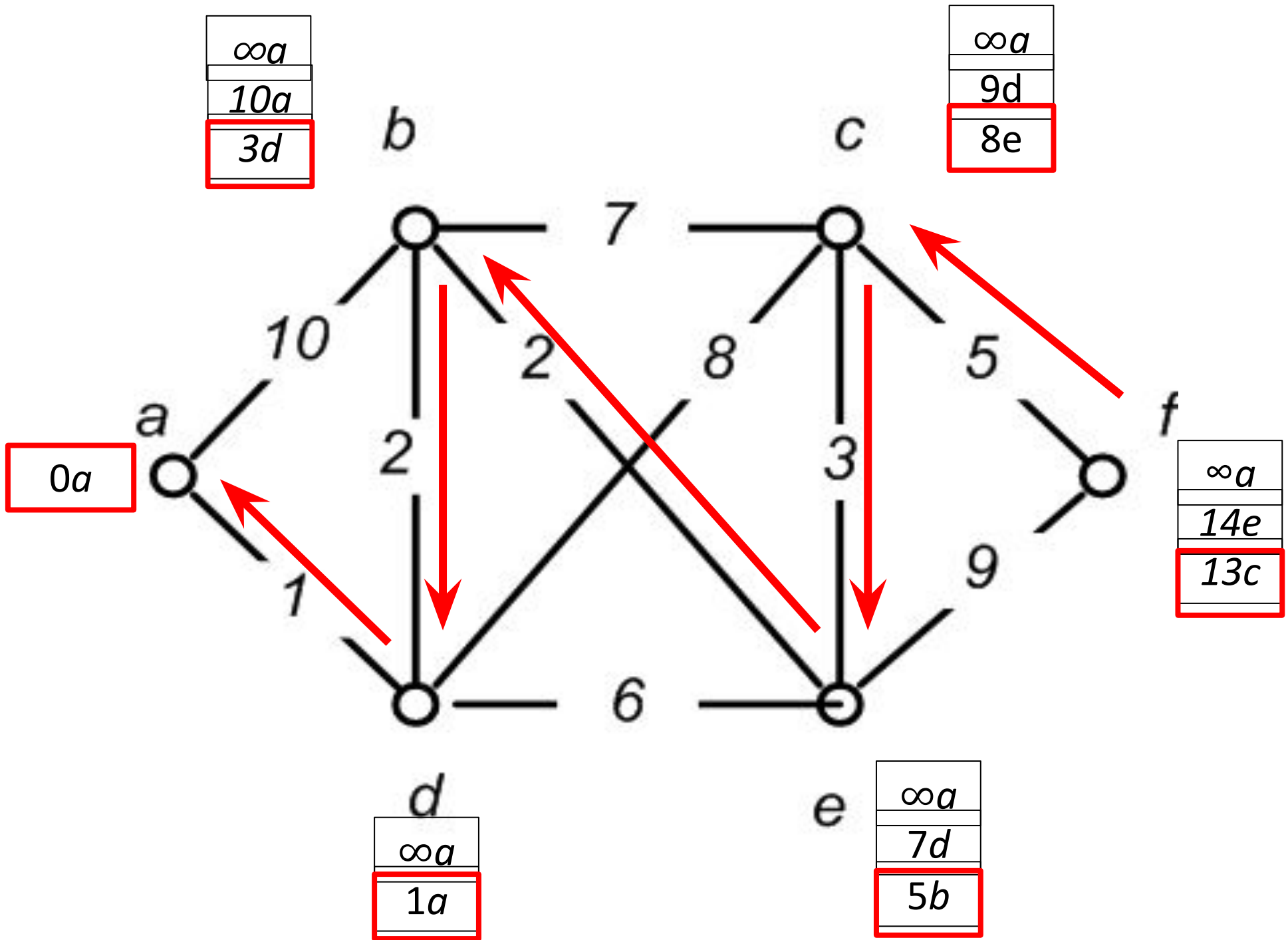


Иллюстрация работы алгоритма Дейкстры

Итера-ция		Ме-тим x	a	b	c	d	e	f
0			$0a$	∞a	∞a	∞a	∞a	∞a
1	a	b, d		$10a$		$1a$		
2	d	b, c, e		$3d$	$9d$		$7d$	
3	b	e					$5b$	
4	e	c, f			$8e$			$14e$
5	c	f						$13c$

Теорема. Постоянная метка вершины x дает

длину кратчайшей цепи из s в x .

Доказательство. Предположим, что на некоторой итерации разметки вершин постоянные метки дают длины кратчайших цепей (на первой итерации это очевидно).

Пусть на следующей итерации вершина x^* получила постоянную метку.

Предположим, что кратчайшая цепь из s в x^* проходит через вершину z с временной меткой, а вершина y (с постоянной меткой) предшествует z в этой цепи. По способу разметки

$c(y, x^*) \leq c(y, z) + c(z, x^*)$ и $l(z) \leq l(x^*)$. Тогда длина цепи между z и x^* $c(z, x^*)$ должна быть отрицательной, что противоречит условию

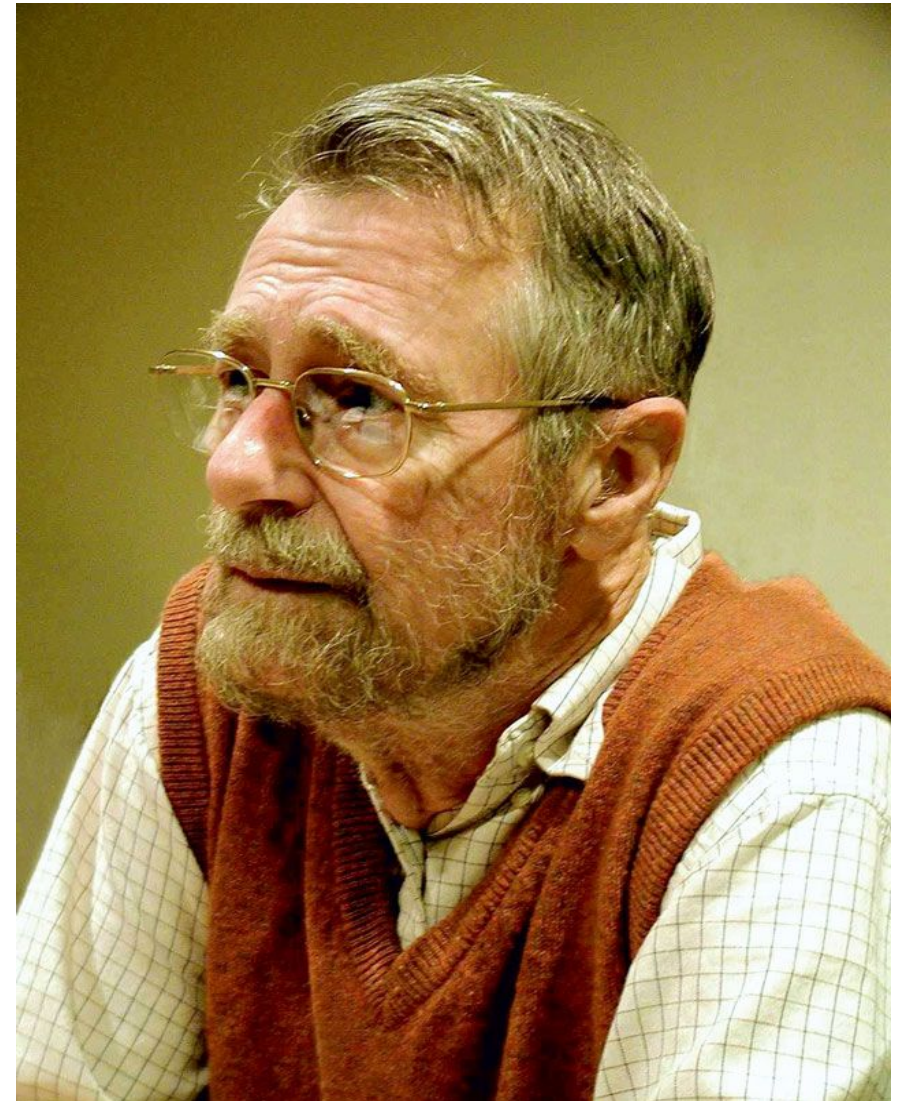
Обобщения

1. Алгоритмы Беллмана – Форда и Дейкстры легко распространяются на случай ориентированных (частично ориентированных) графов, при этом каждое неориентированное ребро представляется двумя дугами, ориентированными в разные стороны. Более того, веса (длины) этих дуг могут быть различными.

2. В алгоритме Беллмана – Форда допускаются отрицательные веса ребер, такие постановки задачи иногда полезны в приложениях. Этим он принципиально отличается от алгоритма Дейкстры, где отрицательные веса невозможны. Но «всеядность» алгоритма Беллмана – Форда оплачивается его более высокой трудоемкостью.

ДЕЙКСТРА, Эдсгер (Edsger Dijkstra, 1930-2002).

Нидерландский учёный, труды которого оказали большое влияние на развитие информатики; один из авторов языка Алгол и концепции структурного программирования. По образованию физик-теоретик. Во второй половине 1950-х годов в поисках путей оптимизации разводки печатных плат разработал алгоритм поиска кратчайшего пути на графе.



Алгоритм Беллмана--Форда 2 (все пары вершин)

. Этот алгоритм является модификацией **Алгоритма 1** (стр. 32) нахождения транзитивного замыкания и обобщением алгоритма Беллмана–Форда на случай нахождения кратчайших цепей/путей из каждой вершины в каждую. Вместо обычного произведения матриц $C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

А. Шимбел предложил такую операцию умножения матриц:

$$c_{ij} = \min_{k=1}^n (a_{ik} + b_{kj})$$

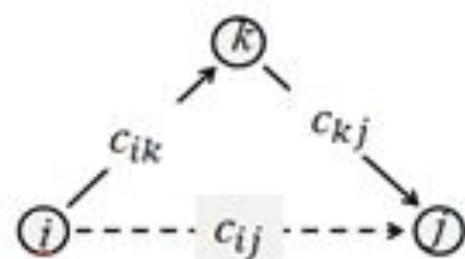
суммирование заменяется на **min**,

умножение на арифметическое сложение

Элемент, например, c_{24} матрицы C^2 будет

C	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2	∞	0	2	∞
3	∞	∞	0	-3
4	4	5	5	0

$$c_{24} = \min_{k=1}^n (c_{21} + c_{14}, c_{22} + c_{24}, c_{23} + c_{34}, c_{24} + c_{44}) = \\ = \min(\infty, \infty, -1, \infty) = -1.$$



Это означает, что при просмотре
 троек вершин с $i = 2, j = 4$
 нашлась такая вершина $k = 3$, что путь
 через нее $c_{23} + c_{34} = -1$ на расстоянии 2
 (по числу ребер) короче, чем путь
 на расстоянии 1 (по ребрам) . $c_{24} = \infty$

Описание алгоритма.

Инициализация. Для нулевой итерации положим $C_0 = C$.

Матрица предшествований $P_0 \Rightarrow$

```
for i=1 to n
for j=1 to n
p[i, j] := i
```

Итерации. Алгоритм работает «на месте»: старые значения элементов матриц C и P заменяются на новые. На каждой итерации q матрица C_q получается как квадрат (по умножению Шимбела) матрицы, полученной на предыдущей итерации C_{q-1} .

Таким образом будет получена последовательность степеней матрицы весов от $C^1 = C^{2^0} = C_0 = C$ до C^{2^q}

Поэлементно на q -й итерации

$$c_{ij}^{(q)} := \min \left(c_{ij}^{(q-1)}, c_{ik}^{(q-1)} + c_{kj}^{(q-1)} \right)$$

элемент c_{ij} может разве что уменьшиться ($c_{ij}^{(q)} \leq c_{ij}^{(q-1)}$).

Если при этом $c_{ik}^{(q-1)} + c_{kj}^{(q-1)} < c_{ij}^{(q-1)}$, метку предшествования нужно заменить: $p_{ij} := p_{kj}$.

Фрагмент псевдокода итерации

```
1. for i=1 to n
2.   for j=1 to n
3.     for k=1 to n
4.       {s:=c[i,k]+c[k,j];
5.         if s<c[i,j] then
6.           {c[i,j]:=s;
7.             p[i,j]:=p[k,j];
9.           }
10.        }
```

Это фрагмент текущей q -й итерации. В строках 4,5 вычисляется минимальное значение c_{ij} , в строках 6, 7 назначаются новые значения c_{ij} и p_{ij} .

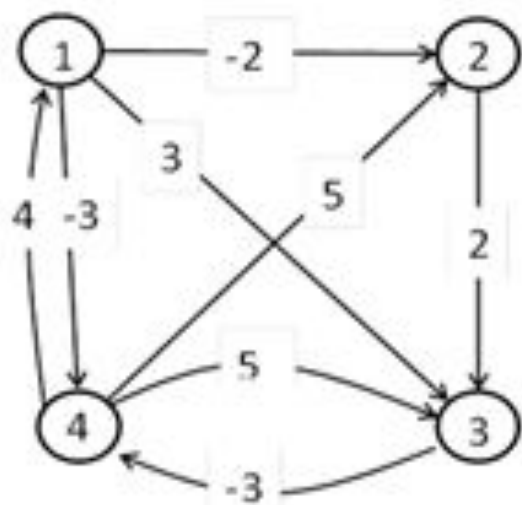
Правило остановки. На некоторой итерации $C_q = C_{q-1}$. Это означает, что на предыдущей итерации все кратчайшие цепи/пути найдены и следующие итерации будут только повторять уже полученные результаты. Поэтому на каждой итерации нужно отслеживать произошли ли изменения значений c_{ij} и p_{ij} . Если нет, то **выход**, иначе итерации продолжаются.

Нахождение кратчайших цепей/путей. Матрица предшествований P предложена Дж. Оттерманом для отслеживания кратчайших цепей/путей по меткам предшествования.

При инициализации предполагается, что при поиске путей из i -й вершины она предшествует всем остальным вершинам -- i -я строка матрицы P заполняется метками i .

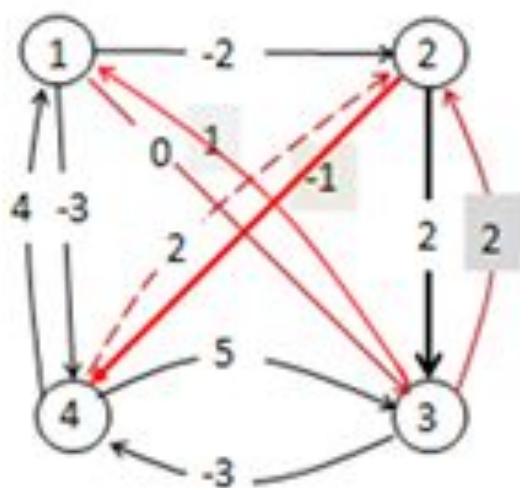
После окончания итераций и изменения меток кратчайший путь из вершины i вершину j отыскивается с конца в обратном порядке (начиная с вершины j , как в алгоритме Беллмана--Форда 1)

Пример. Алгоритм Беллмана--Форда (все пары вершин)



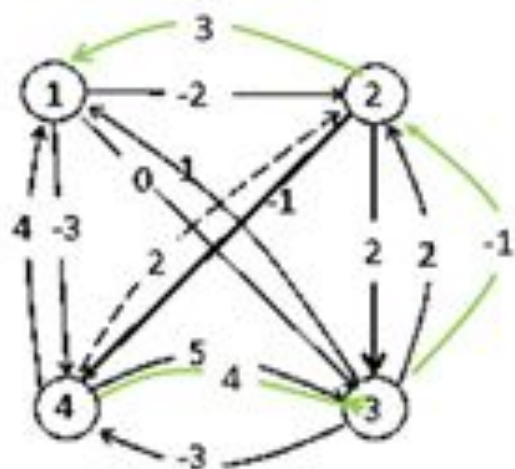
C_0	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2	∞	0	2	∞
3	∞	∞	0	-3
4	4	5	5	0

P_0	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4



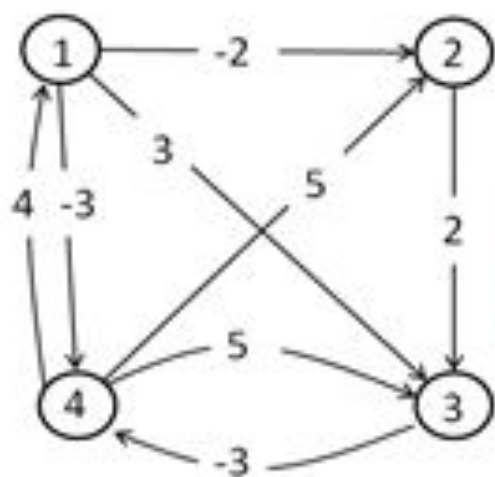
C_1	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2	∞	0	2	-1
3	1	2	0	-3
4	4	2	5	0

P_1	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	2	2	3
3	4	4	3	3
4	4	1	4	4



C_2	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2	3	0	2	-1
3	1	-1	0	-3
4	4	2	4	0

P_2	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	4	2	2	3
3	4	1	3	3
4	4	1	2	4



$C_3 = C_2$ и здесь не приводится.

Найдем, например, кратчайший путь из вершины 3 в вершину 2 по меткам предшествования на исходном графе (в обратном порядке).

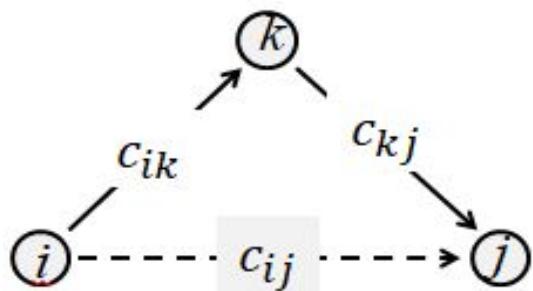
Выберем строку 3 в матрице P_2 . Вершине 2 предшествует 1, 1-й – вершина 4, 4-й – вершина

3: 2-1-4-3. Сам путь: 3-4-1-2 длины $c_{32} = -1$

Элемент, например, c_{24} матрицы C^2 будет

$$c_{24} = \min_{k=1}^n (c_{21} + c_{14}, c_{22} + c_{24}, c_{23} + c_{34}, c_{24} + c_{44})$$

$$= \min(1, 1, 1, 1) = 1.$$



Это означает, что при просмотре троек вершин с $i = 2, j = 4$ нашлась такая вершина $k = 3$, что путь через нее $c_{23} + c_{34} = 1$ на расстоянии 2 (по числу ребер) короче, чем путь на расстоянии 1 (по ребрам). $c_{24} = 1$

Алгоритм Флойда

Предыдущие алгоритмы (Беллмана – Форда и Дейкстры) давали возможность находить кратчайшие маршруты между одной начальной вершиной (источником) s и /или всеми другими вершинами графа.

Алгоритм Флойда (Флойда – Уоршалла), разработанный в 1962 г., позволяет найти длины кратчайших маршрутов между всеми парами вершинами.

Замечание. В алгоритме Флойда, так же как и в алгоритме Беллмана – Форда, нет ограничений на неотрицательность длин ребер, как будет показано в примере.

Пусть задан взвешенный *униграф* (ориентированный, неориентированный, смешанный) $G=(V,E)$ с матрицей весов (длин) $C=(c_{ij})_{n \times n}$ где $c_{ii}=0$; $c_{ij}=\infty$, если нет ребра (x_i, x_j) ;
навигационная матрица (матрица предшествований) $P=(p_{ij})_{n \times n}$;
 C_k и P_k -- матрицы, полученные на k – й итерации.

Инициализация

я

$$C_0 := C;$$

$$P_0 \Rightarrow$$

```
for i=1 to n
for j=1 to n
p[i,j]:=i;
```

Основной

цикл

Алгоритм работает «на месте»: старые значения элементов матриц C и P заменяются на новые; по завершению цикла по k ($k=n$) C становится матрицей длин кратчайших цепей/путей, а P -- матрицей самих цепей/путей.

На каждой итерации по k вычисляется C_k , элементы которой

$$c_{ij}^{(k)} := \min \left(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)} \right) \quad (\text{Флойд1})$$

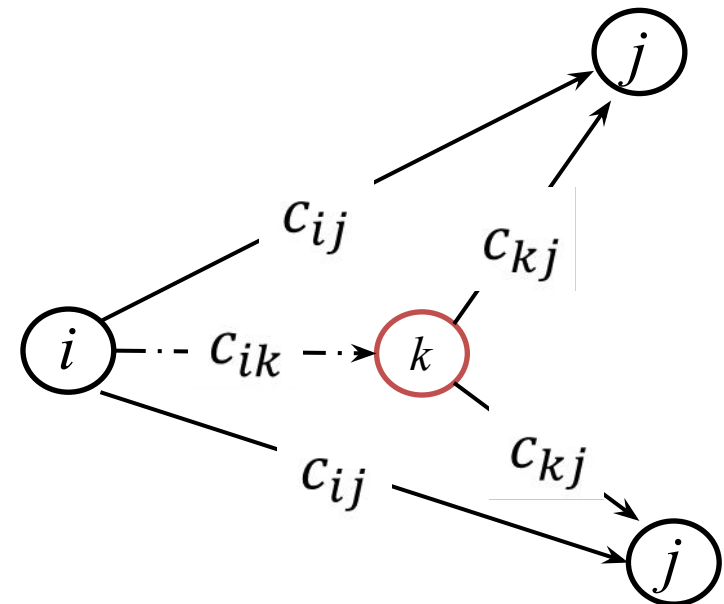
На k -й итерации вершина k включается в путь только тогда, когда новый путь короче старого. На n -й итерации все пути c_{ij} — кратчайшие.

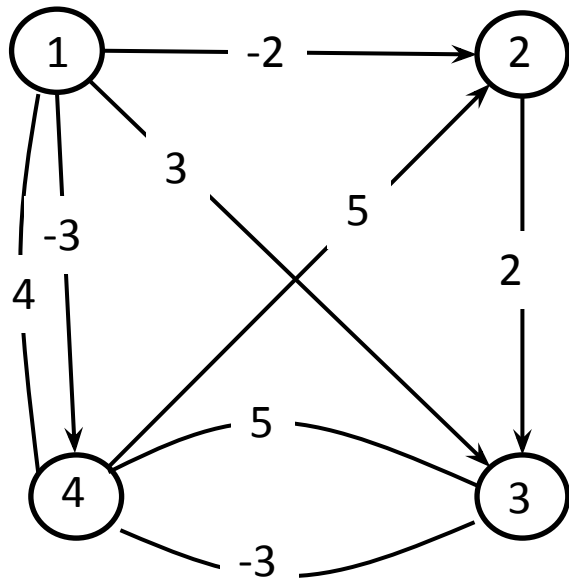
Фрагмент программы:

```

for k=1 to n
  for i=1 to n
    for j=1 to n
      { s:=c[i,k]+c[k,j];
        if s<c[i,j] then
          {c[i,j]:=s; p[i,j]:=p[k,j];}
      }
    }
  }
  c[i,j]:=min(c[i,j],c[i,k]+c[k,j])
  k

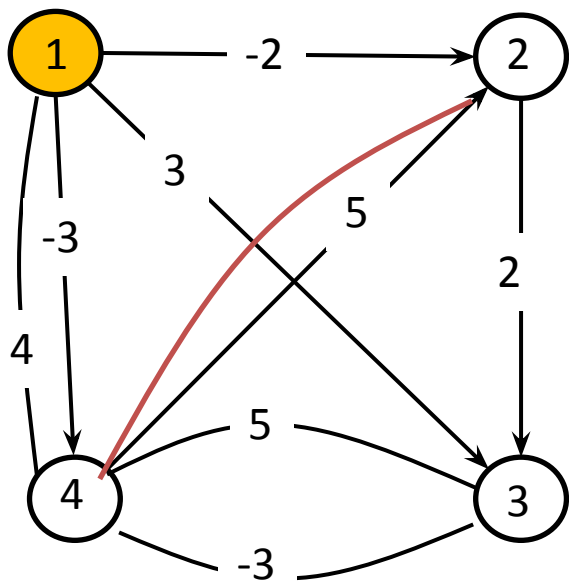
```





C_0	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	5	5	0

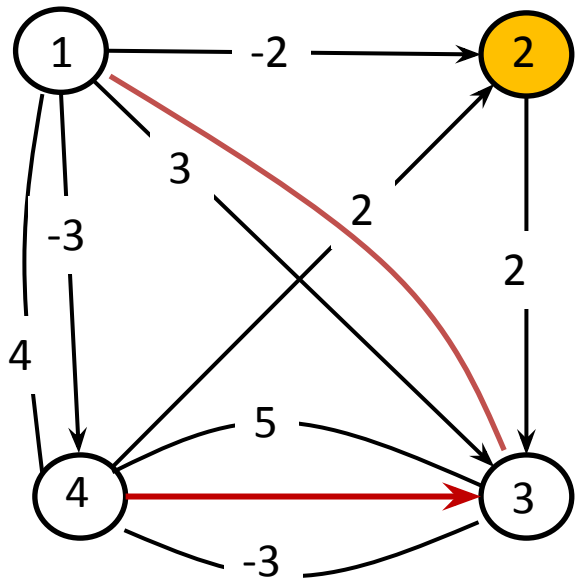
P_0	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4



	1	2	3	4
1	0	-2	3	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	5	0

P_1	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	1	4	4

$$p_{42} := p_{12} (= 1)$$

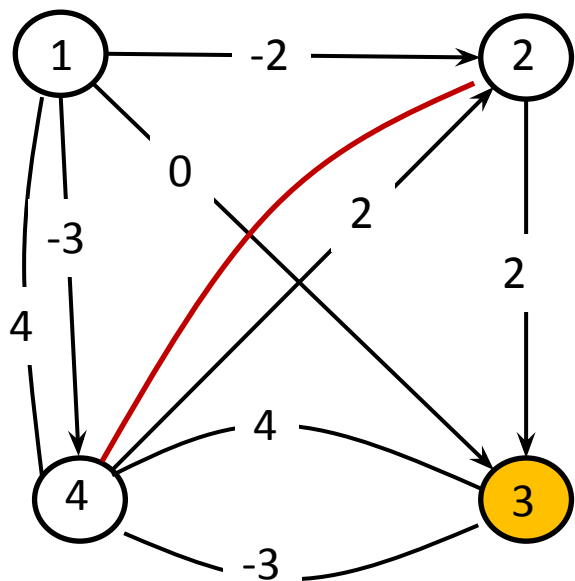


	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	4	0

P_2	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	1	2	4

$$p_{13} := p_{23}(2)$$

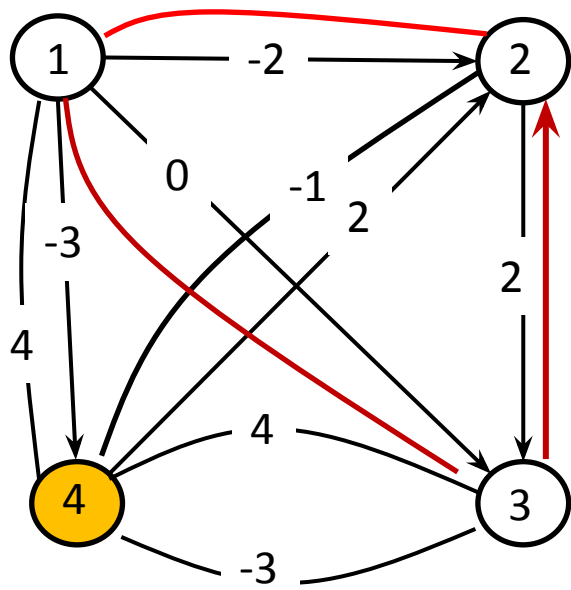
$$p_{43} := p_{23}(2)$$



	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3			0	-3
4	4	2	4	0

P_3	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3
4	4	1	2	4

$$p_{24} := p_{34}(3)$$



	1	2	3	4
1	0	-2	0	-3
2		0	2	
3		-1	0	-3
4	4	2	4	0

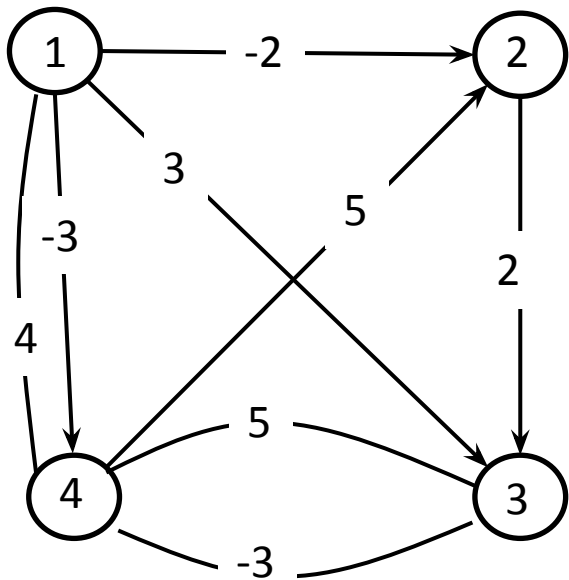
P_4	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	4	2	2	3
3	4	1	3	3
4	4	1	2	4

$$p_{21} := p_{41}(4)$$

$$p_{31} := p_{41}(4)$$

$$p_{32} := p_{42}(1)$$

Найдем, например, кратчайший путь из 2 в 1 по меткам предшествования на исходном графе (в обратном порядке). Выберем строку 2 в матрице P_4 . Вершине 1 предшествует 4, 4-й – вершина 3, 3-й – вершина 2: 1-4-3-2. Сам путь: 2-3-4-1 длины $c_{21}=3$.



P_4	1	2	3	4
2	4	2	2	3

Замечание. Алгоритмы Беллмана – Форда и Флойда работают корректно, если в графе нет циклов отрицательной длины (сумма длин которых отрицательна). В противном случае длина кратчайшей цепи/пути уменьшается до $-\infty$ (программа зацикливает). Это обнаруживается,

когда некоторые диагональные элементы становятся отрицательными.
Запишем алгоритм [Флойд] в общем виде

$$c_{ij}^{(k)} := \oplus \left(c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} \otimes c_{kj}^{(k-1)} \right)$$

Для кратчайшего пути \oplus — это \min , \otimes — сложение (+).

Этот алгоритм применим и для нахождения цепи/пути наибольшей длины (критического пути).

Операция \oplus заменяется на \max , \otimes на $+$, и в матрице весов $c_{ij} = -\infty$, если нет ребра (x_i, x_j) .

Другой пример: найти цепь/путь максимальной надежности в сети связи. Надежность ребра ρ_{ij} — это вероятностная характеристика $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$; надежность цепи определяется как произведение (обычное) надежностей ребер цепи. Тогда \oplus — операция \max , а \otimes — умножение.

ФЛОЙД, Роберт В (*Robert W Floyd*, 1936 – 2001) — американский учёный в области теории вычислительных систем. Лауреат премии Тьюринга. Роберт окончил школу в возрасте 14 лет, перепрыгнув три класса. Флойд не имел титула PhD. В Стэнфорде Флойд тесно работал с Дональдом Кнутом, в том числе в качестве главного редактора серии его знаменитых книг «Искусство программирования».



Сравнение алгоритмов

www.youtube.com/watch?v=cSxnOm5aceA