

**НАИБОЛЬШЕЕ И  
НАИМЕНЬШЕЕ  
ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ**

## Цели обучения:

- 10.3.1.19 - находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;
- 10.3.3.3 - решать прикладные задачи, связанные с нахождением наибольшего (наименьшего) значения функции

## Критерии оценивания:

**Учащийся достиг цели обучения, если:**

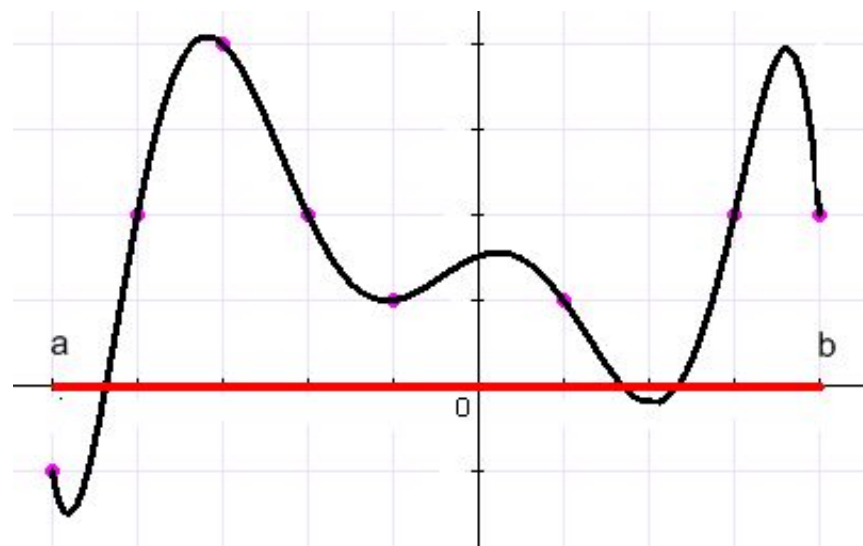
- умеет находить наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке;
- решать разные задачи, связанные с наибольшим (наименьшим) значением функции на промежутке.

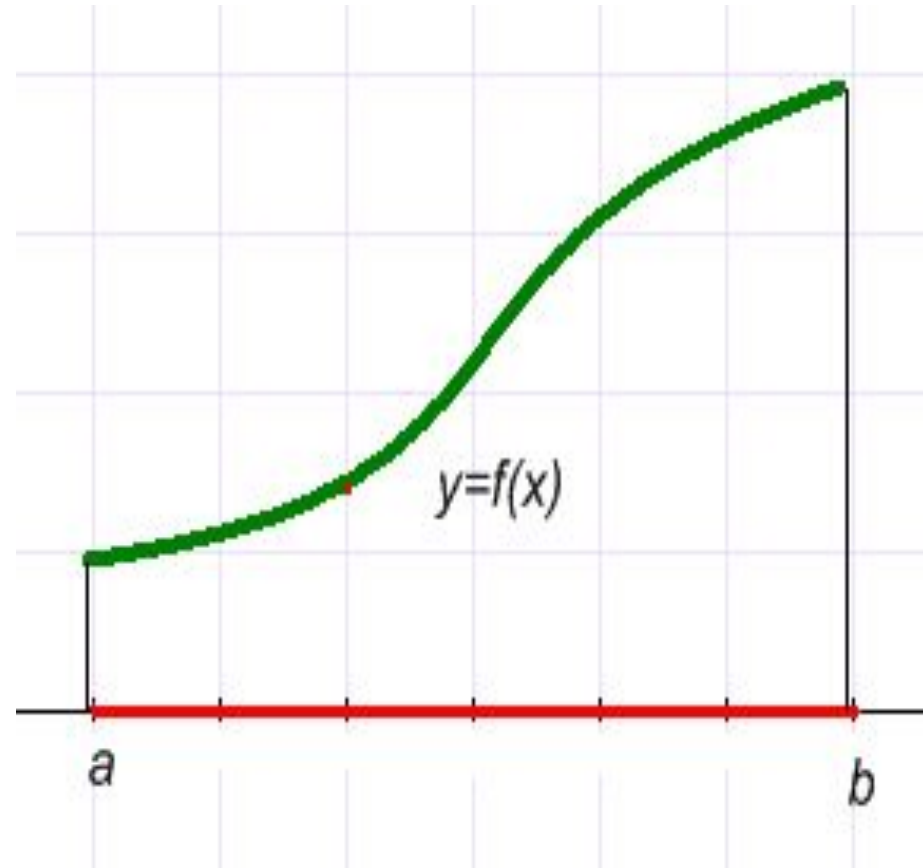
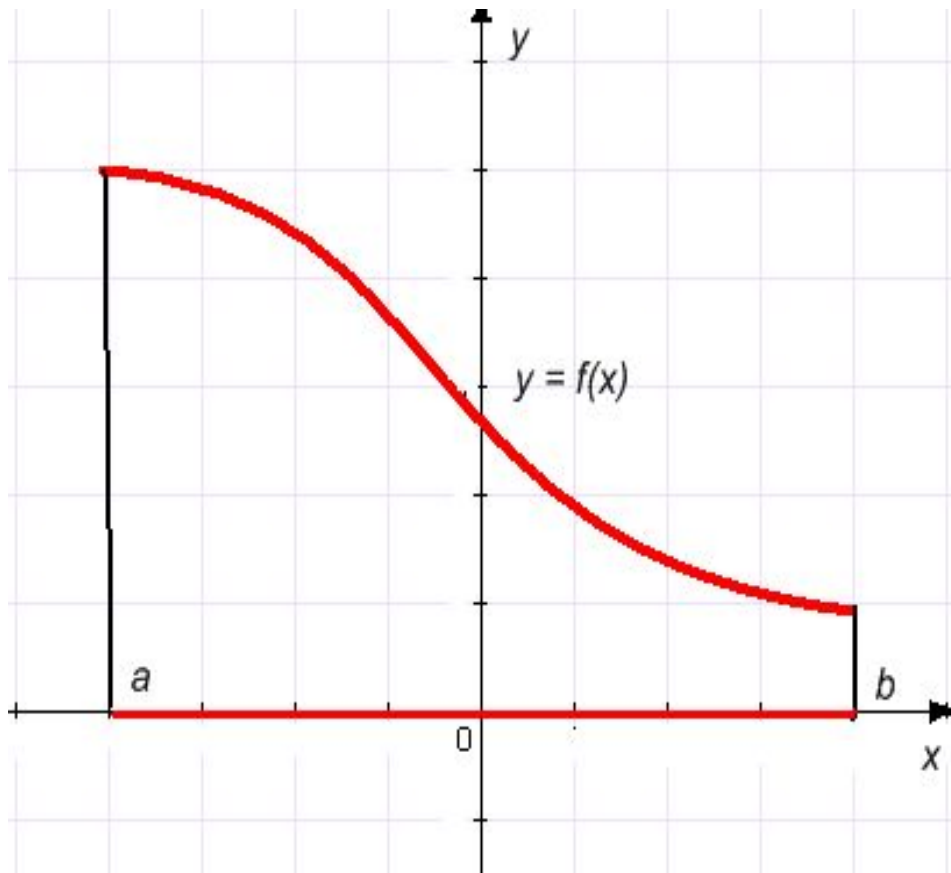
# Теорема Вейерштрасса



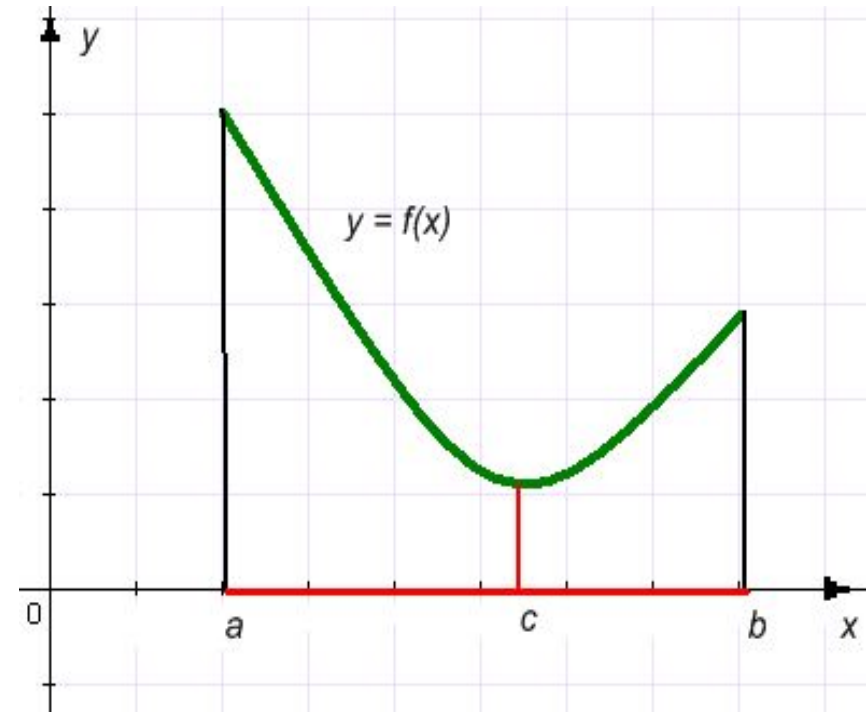
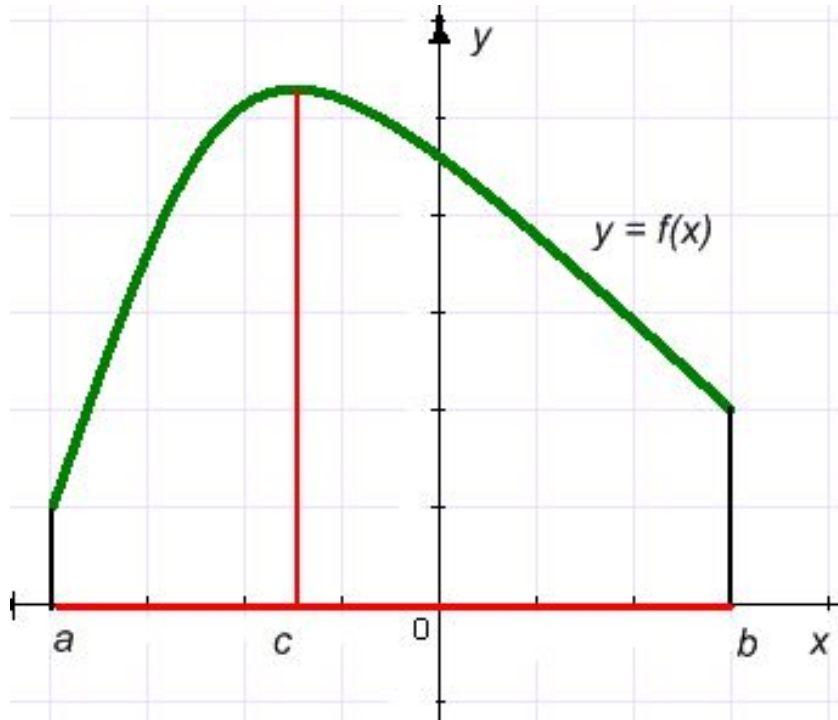
Вейерштрасс Карл Теодор  
Вильгельм (1815-1897  
гг.) - немецкий математик

Непрерывная на отрезке  $[a;b]$  функция  $f$  принимает на этом отрезке **наибольшее** и **наименьшее** значения.



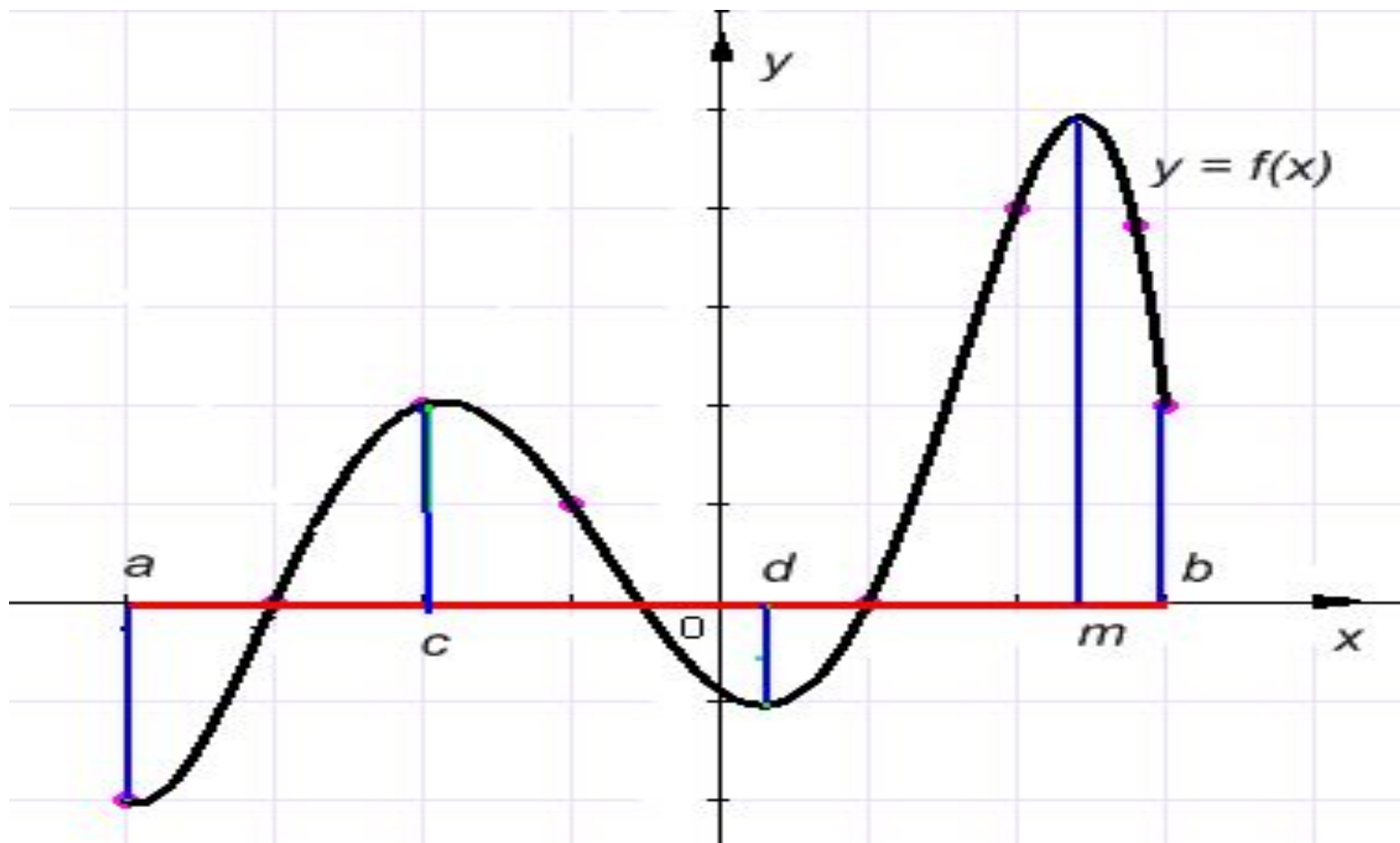


Если функция  $f(x)$  **возрастает** (**убывает**) на  $[a; b]$ , то **наибольшего** или **наименьшего** значения она достигает на **концах этого отрезка**.



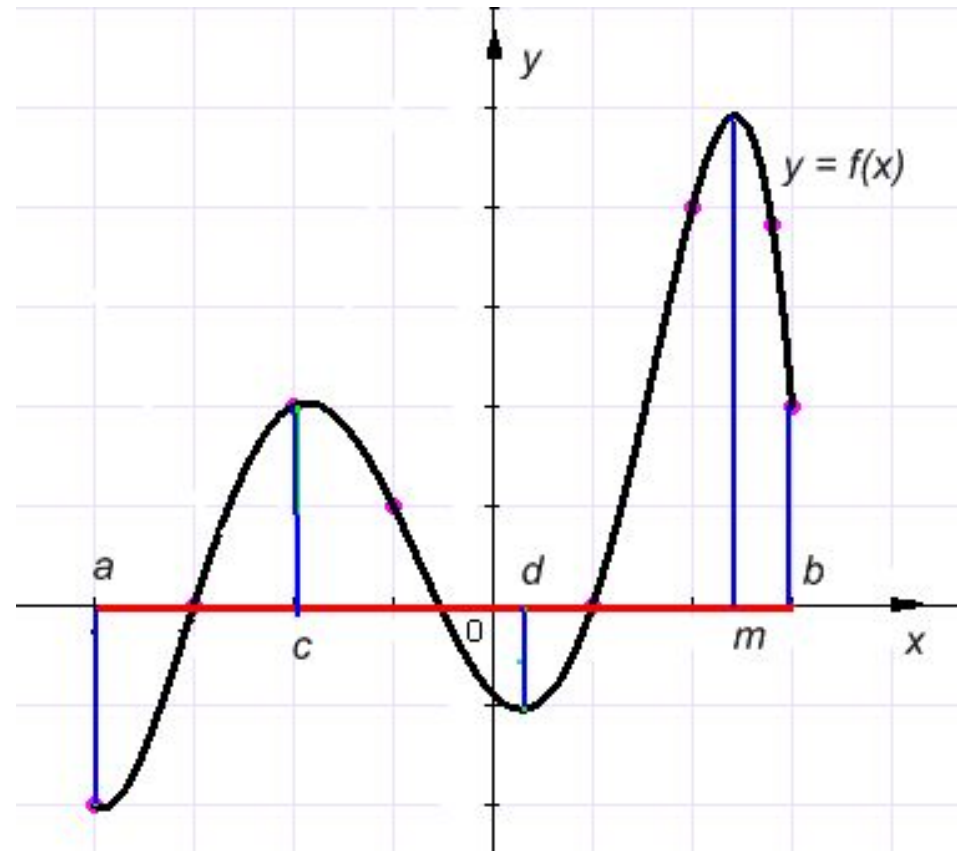
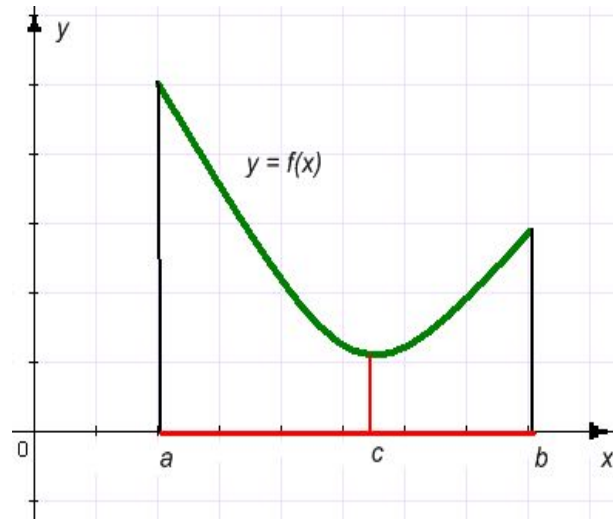
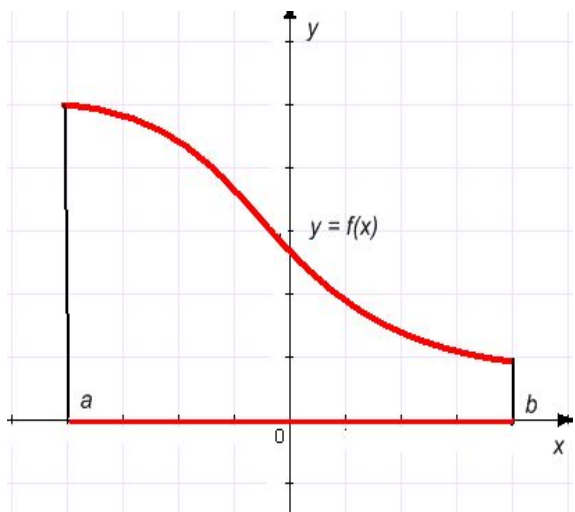
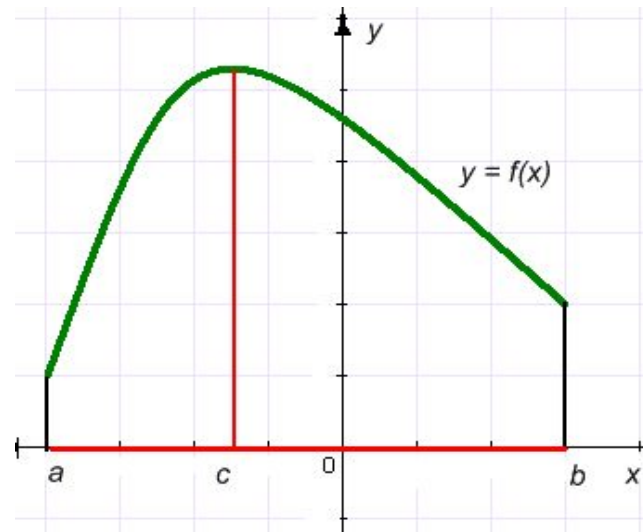
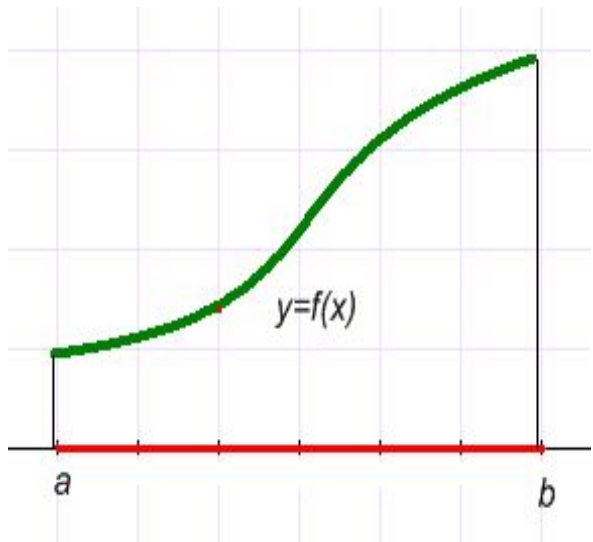
Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  имеет лишь одну критическую точку и она является **точкой максимума (минимума)**, то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение

$$f_{\max} = f_{\text{наиб.}} \quad f_{\min} = f_{\text{наим.}}$$



Наибольшего (наименьшего) значения непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает либо на **концах отрезка**, либо в **критических точках**, лежащих на этом отрезке.

Проанализируйте все рассмотренные случаи. В каких точках функция достигает **наибольшего (наименьшего)** значений?





**Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на  $[a;b]$**

- 1. Найти производную функции;**
- 2. Решить уравнение  $f'(x) = 0$  и найти критические точки;**
- 3. Выяснить, принадлежат ли полученные критические точки данному отрезку;**
- 4. Найти значения функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих отрезку;**
- 5. Сравнивая полученные значения функции, определить наибольшее и наименьшее значения функции**

## Задача 1.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2 \text{ на отрезке } [-2; 2].$$

Решение.

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ , значит функция непрерывна на рассматриваемом отрезке.
2. Найдем критические точки функции:  $f'(x) = x^2 + 2x - 3$   
 $f'(x) = 0$ , если  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , откуда  $x = -3$  или  $x = 1$ .  
 $x = -3$  не лежит на рассматриваемом отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - 2 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3};$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 2\frac{2}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$$

4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-2; 2]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2; 2]} f(x) = f(1) = -3\frac{2}{3}$$

Ответ:  $5\frac{1}{3}$  - наибольшее, а  $-3\frac{2}{3}$  - наименьшее значения функции на отрезке  $[-2; 2]$ .

## Решение задач практического характера

### Задача 2.

Периметр прямоугольника равен 12 м. Какими должны быть длины сторон, чтобы его площадь была наибольшей?

### Задача 3.

2. Фермер хочет оградить прямоугольный участок по одну сторону реки, таким образом, что река будет огораживать одну из сторон загона. Общая длина имеющегося штакетника составляет 100 метров. Пусть  $y$  метров длина и  $x$  метров ширина этого прямоугольного участка соответственно, а  $S$  – его площадь.

- а) Выразите  $y$  через  $x$ .
- б) Найдите выражение для  $S$  через  $x$ , указав ограничения для  $x$ .
- с) При каких размерах площадь участка будет максимальной?

# Reflection

