НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

Цели обучения:

- 10.3.1.19 - находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;
- 10.3.3.3 - решать прикладные задачи, связанные с нахождением наибольшего (наименьшего) значения функции

Критерии оценивания:

Учащийся достиг цели обучения, если:

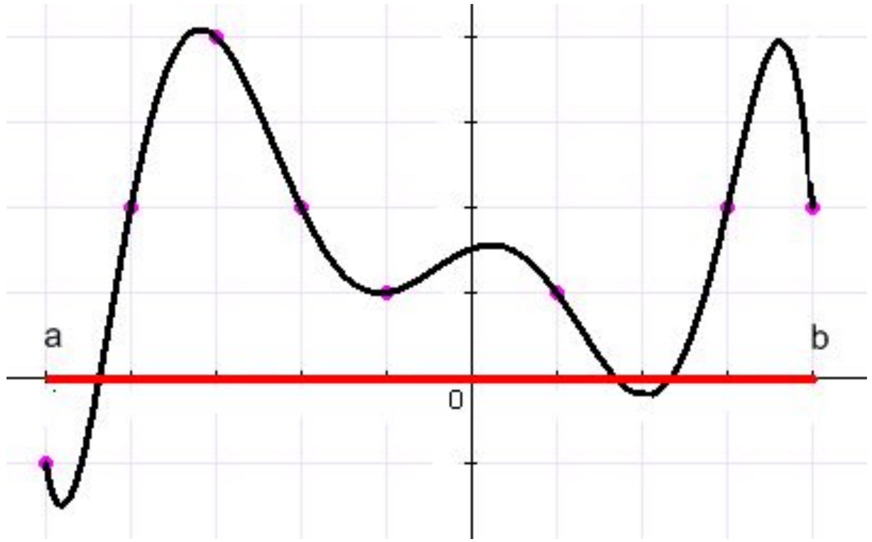
- умеет находить наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке;

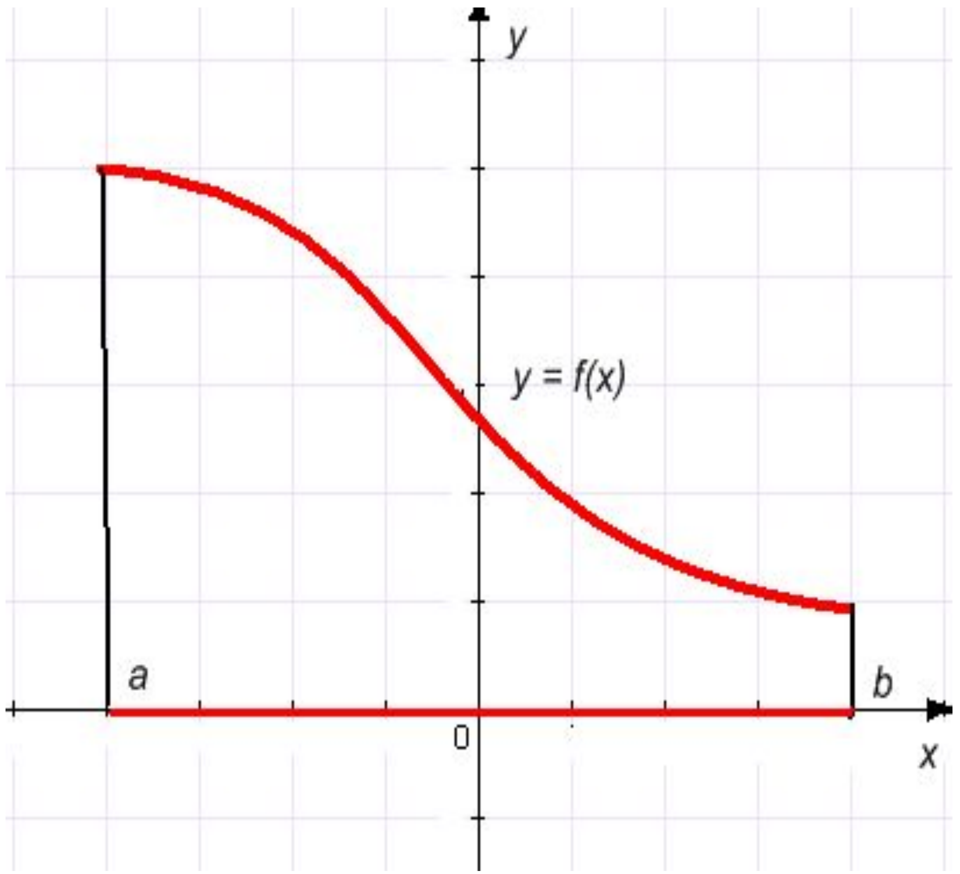
- решать разные задачи, связанные с наибольшим (наименьшим) значением функции на промежутке.

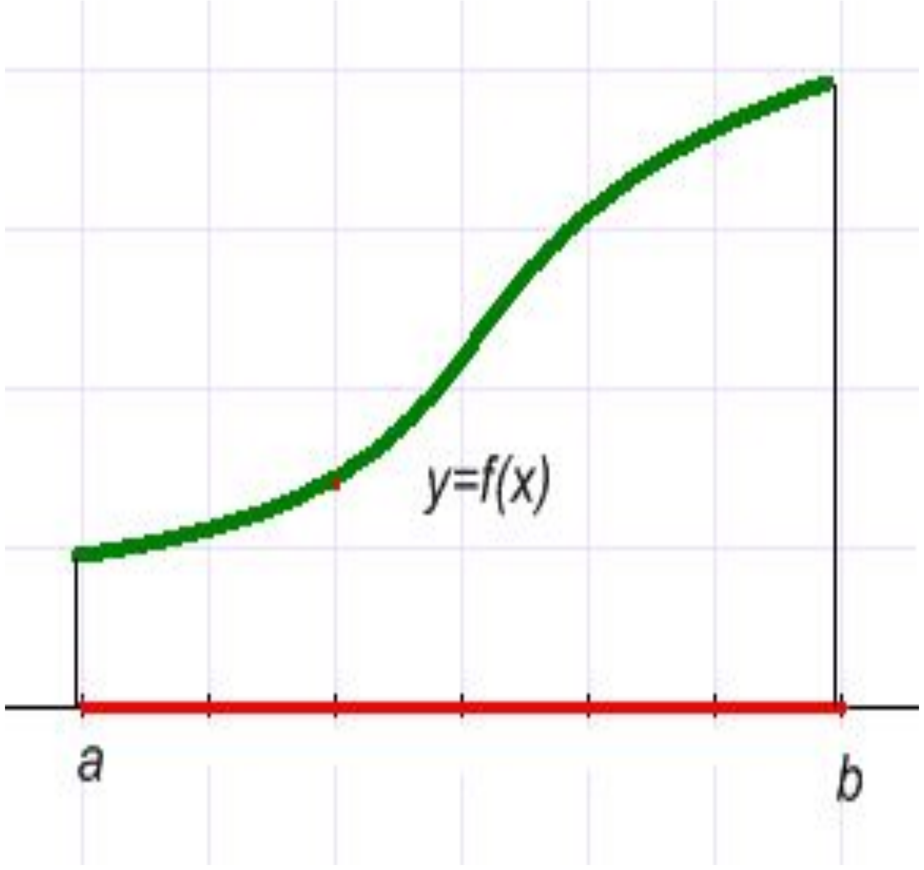
Теорема Вейерштрасса

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897 гг.) - немецкий математик

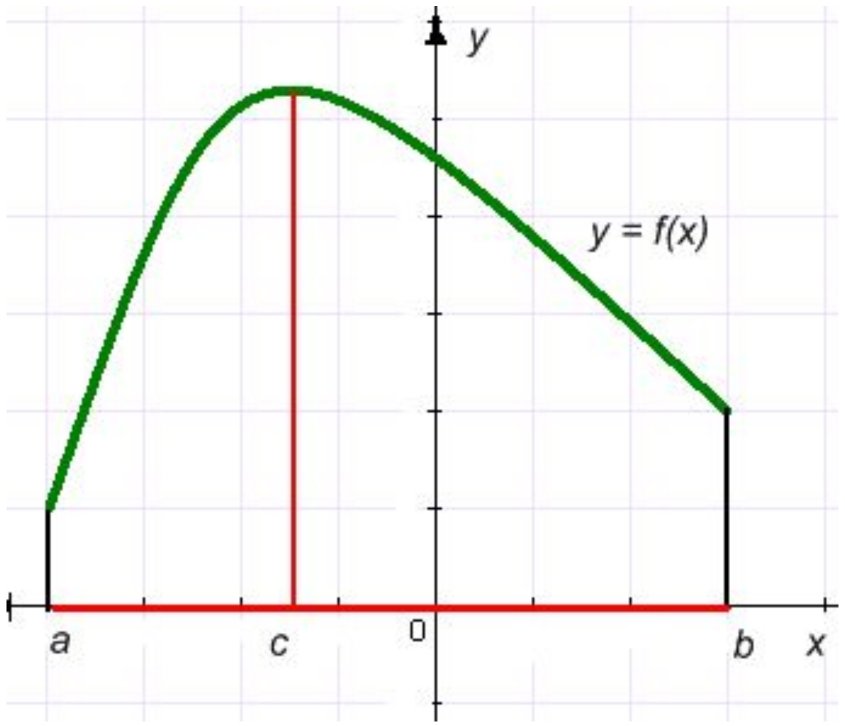
Непрерывная на отрезке [*a*;*b*] функция *f* *принимает на этом отрезке* ***наибольшее*** *и* ***наименьшее*** *значения.*

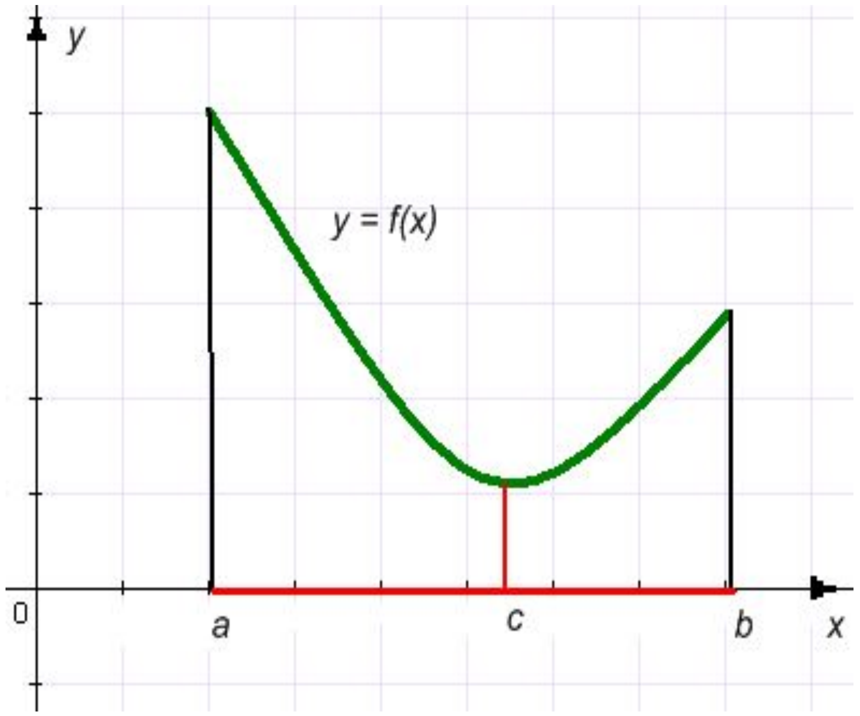






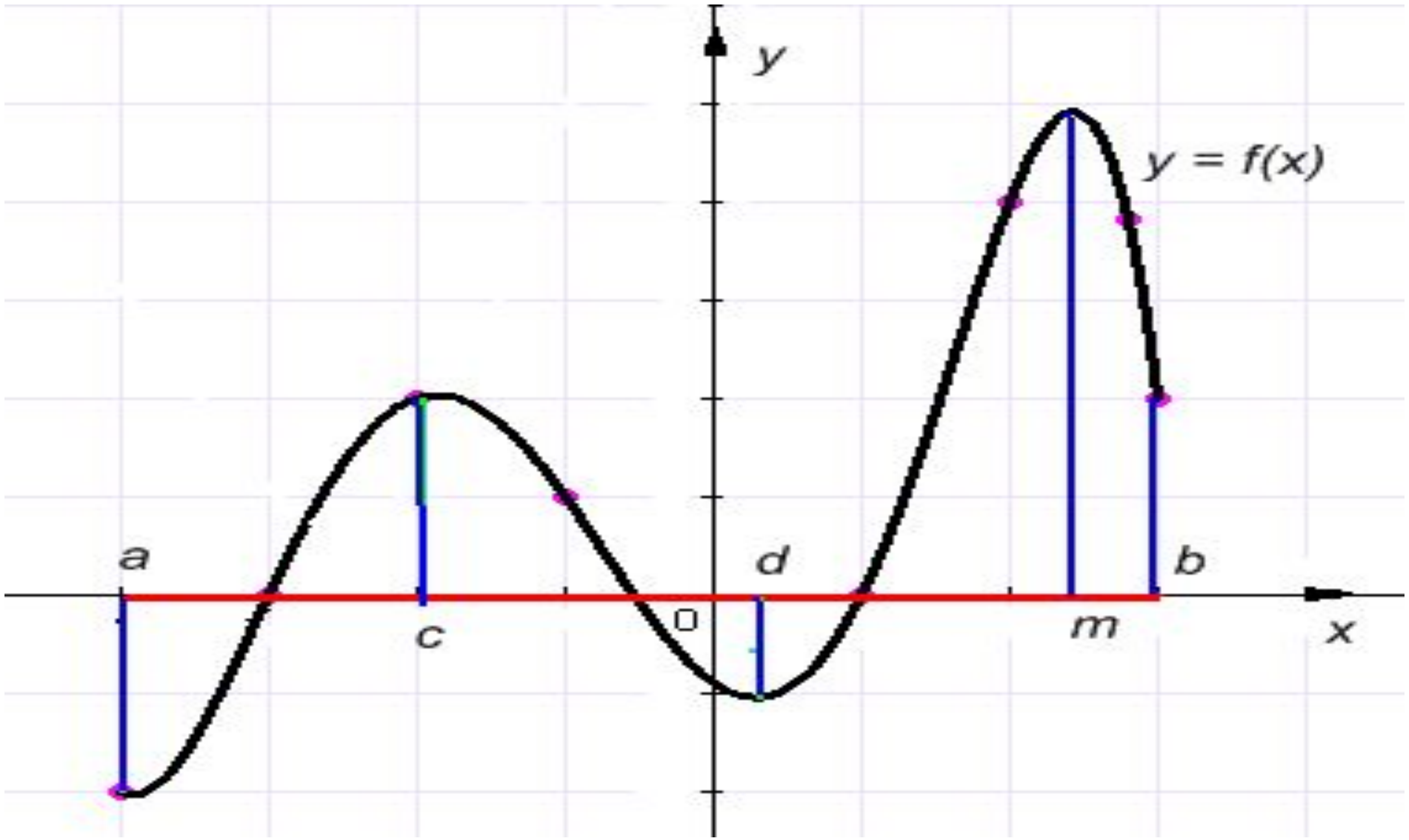
Если функция f(x) возрастает (убывает) на [a;b], то наибольшего или наименьшего значения она достигает на концах этого отрезка.





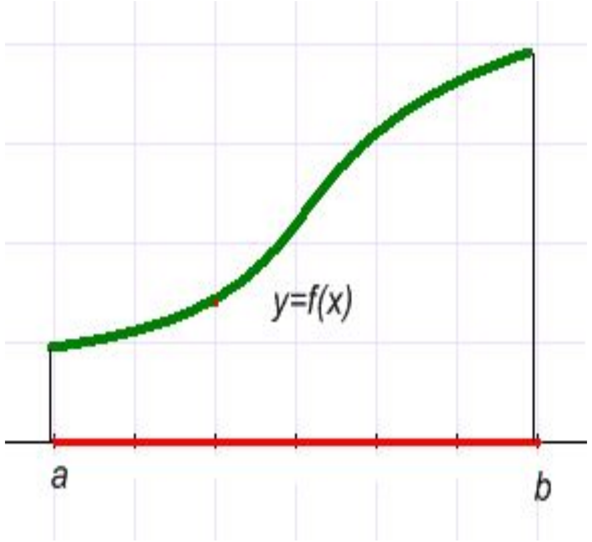
Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение

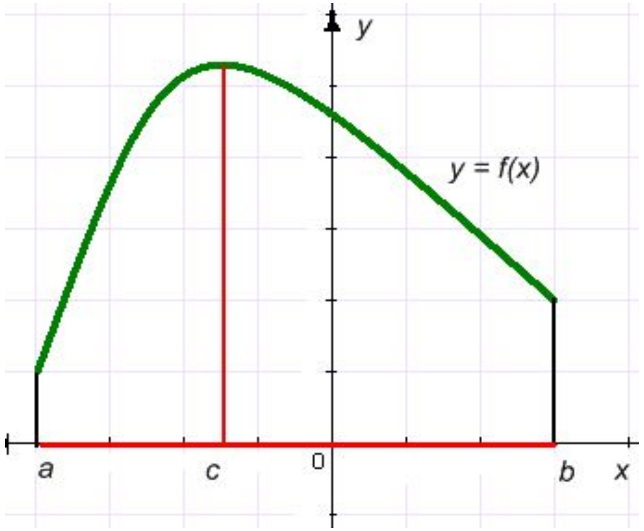
$f_{max} = f_{наиб.}$ $f_{min} = f_{наим.}$

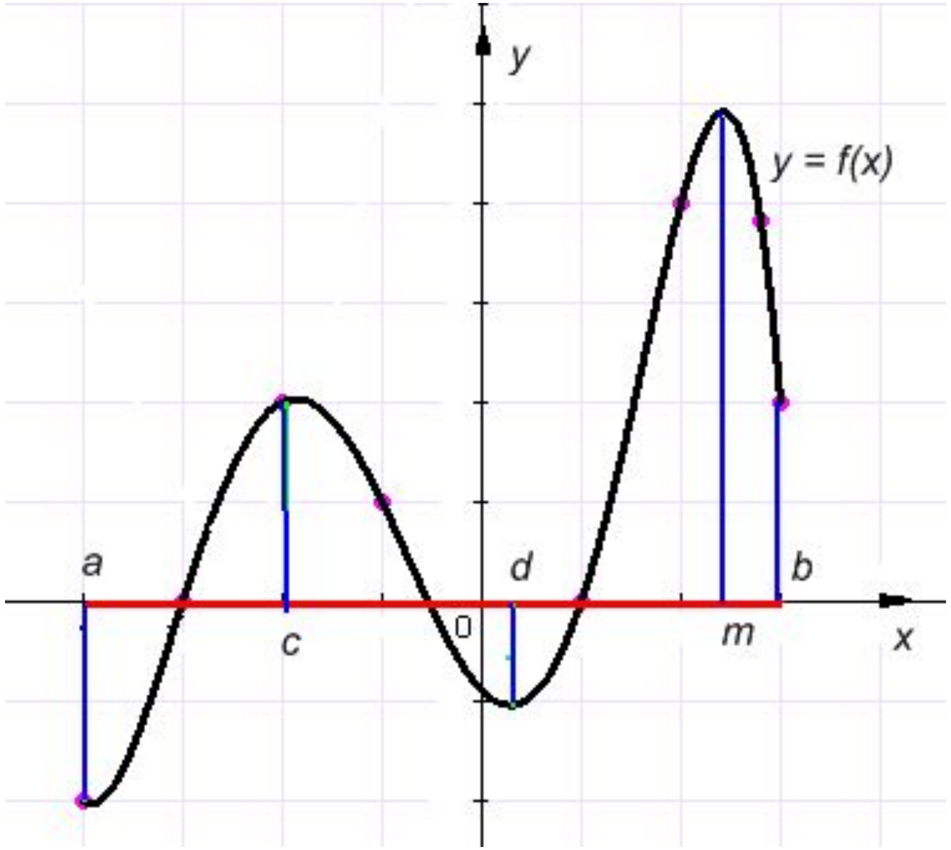


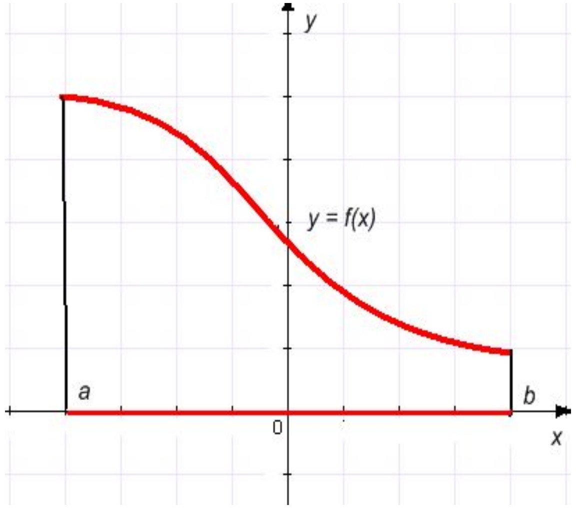
Наибольшего (наименьшего) значения непрерывная на [*a*; *b*] функция достигает либо на концах отрезка, либо в критических точках, лежащих на этом отрезке.

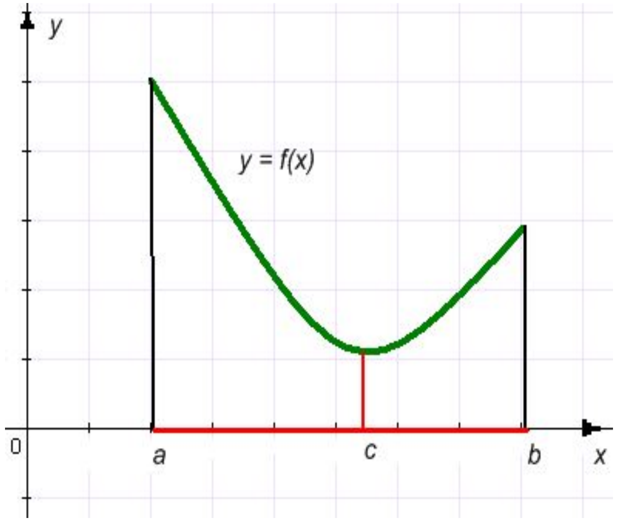
Проанализируйте все рассмотренные случаи. В каких точках функция достигает наибольшего (наименьшего) значений?











Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти производную функции;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$ и найти критические точки;
3. Выяснить, принадлежат ли полученные критические точки данному отрезку;
4. Найти значения функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих отрезку;
5. Сравнивая полученные значения функции, определить наибольшее и наименьшее значения функции

Задача 1.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x-2 \text{ на отрезке } [-2;2].$$

Решение.

1. $D(f)=R$, значит функция непрерывна на рассматриваем отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x)=x^2+2x-3$

   $f'(x)=0$, если $x^2+2x-3=0$, отсюда $x=-3$ или $x=1$.

   $x=-3$ не лежит на рассматриваем отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

   $$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=-\frac{8}{3}+4+6-2=8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3};$$

   $$f(1)=\frac{1^3}{3}+1^2-3\cdot1-2=\frac{1}{3}-4=-3\frac{2}{3};$$

   $$f(2)=\frac{2^3}{3}+2^2-3\cdot2-2=2\frac{3}{3}-4=1\frac{1}{3}$$
4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

   $$\max_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=5\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \min_{[-2;2]} f(x)=f(1)=-3\frac{2}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке [-2;2].

Задача 2.

Решение задач практического характера

Периметр прямоугольника равен 12 *м*. Какими должны быть длины сторон, чтобы его площадь была наибольшей?

Задача 3.

2. Фермер хочет оградить прямоугольный участок по одну сторону реки, таким образом, что река будет огораживать одну из сторон загона. Общая длина имеющегося штакетника составляет 100 метров. Пусть y метров длина и x метров ширина этого прямоугольного участка соответственно, а S – его площадь.

a) Выразите y через x.

b) Найдите выражение для S через x, указав ограничения для x.

c) При каких размерах площадь участка будет максимальной?

Reflection