

# Рівновага складеної системи сил

# Послідовність дій при розв'язуванні задач

1. Вибрати об'єкт дослідження.
2. Зобразити активні сили та моменти пар активних сил, які задані за умовою задачі.
3. Визначаємо тип в'язей та звільняємось від них.
4. Проводимо аналіз системи сил, прикладеної до об'єкта дослідження.
5. Розрізаємо складену балку в місці врізаного шарніру, прикладаючи реакції відрізаної частини.
6. Записуємо рівняння рівноваги для загальної балки та для відрізаної частини окремо.

Їх можна записати у трьох формах:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

7. Розв'язуємо рівняння та визначаємо числові значення проекцій невідомих сил та моментів.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Дано:

$$q = 5 \text{ Н/м,}$$

$$a = 2 \text{ м,}$$

$$b = 30^\circ,$$

$$M = 4 \text{ Нм,}$$

$$P = 11 \text{ Н}$$

Знайти:

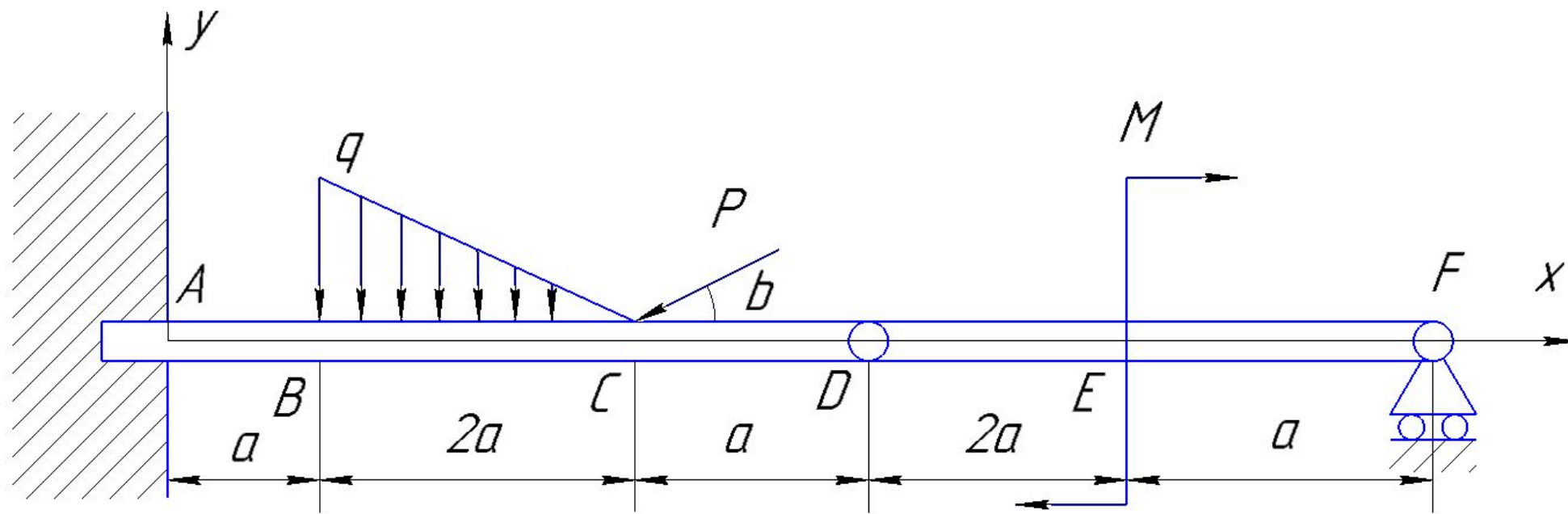
$$R_A, M_A, R_D, R_F,$$

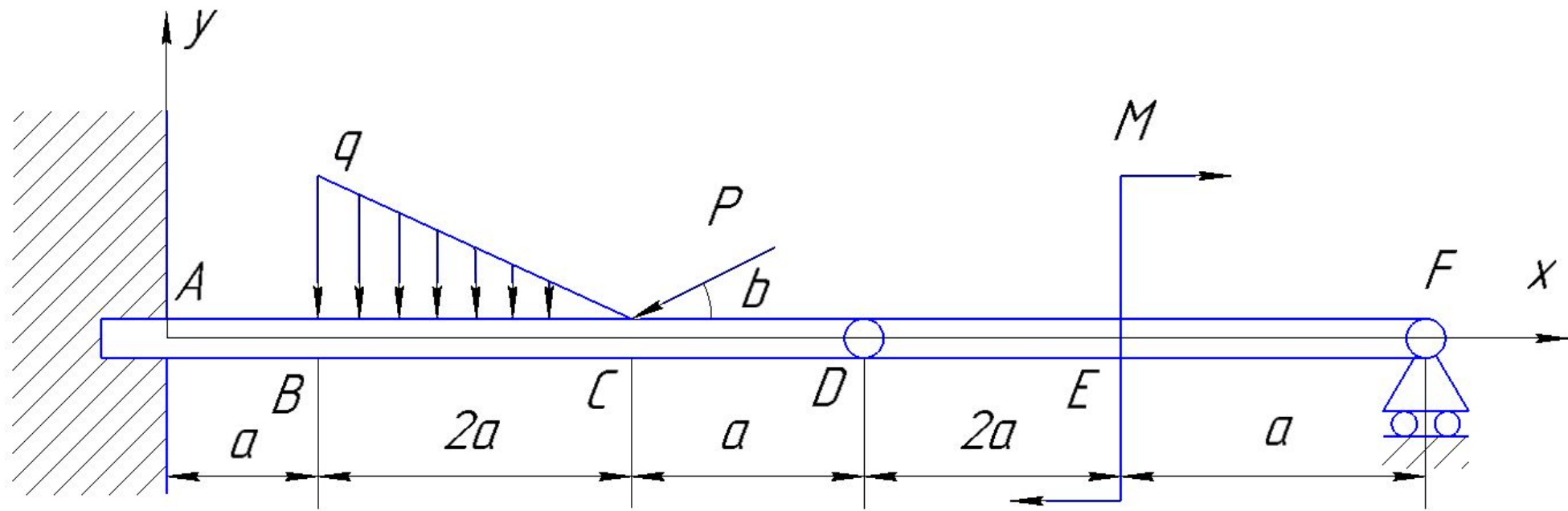
Прізвище Ім'

я

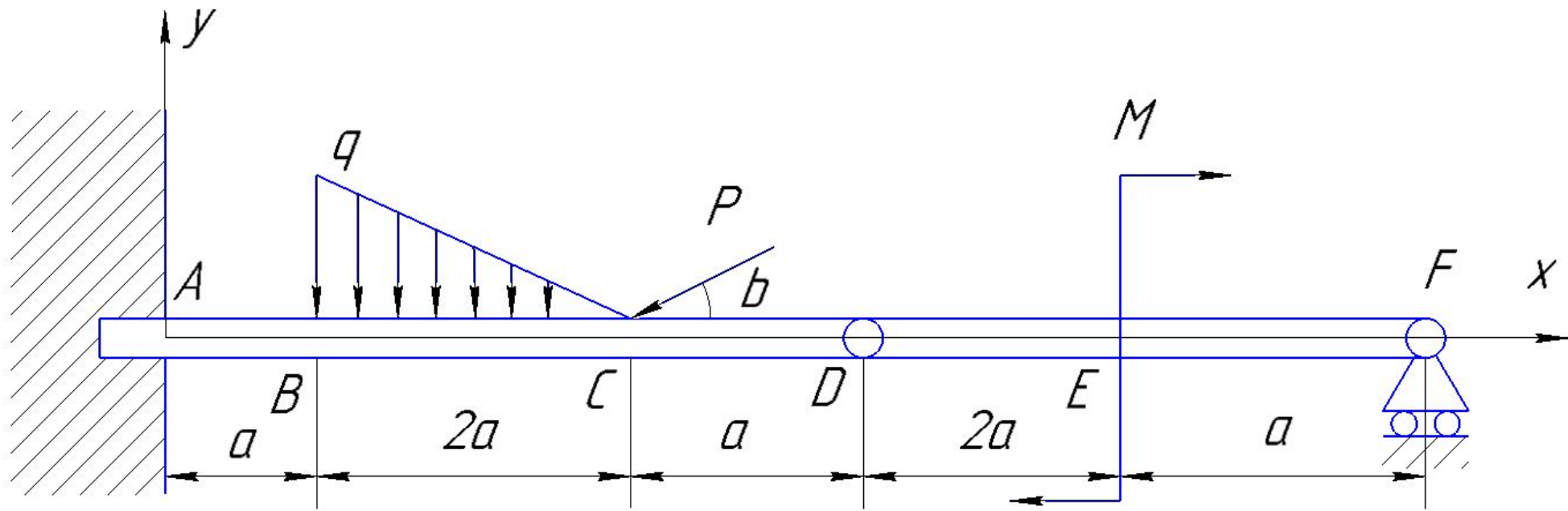
Група

Варіант №

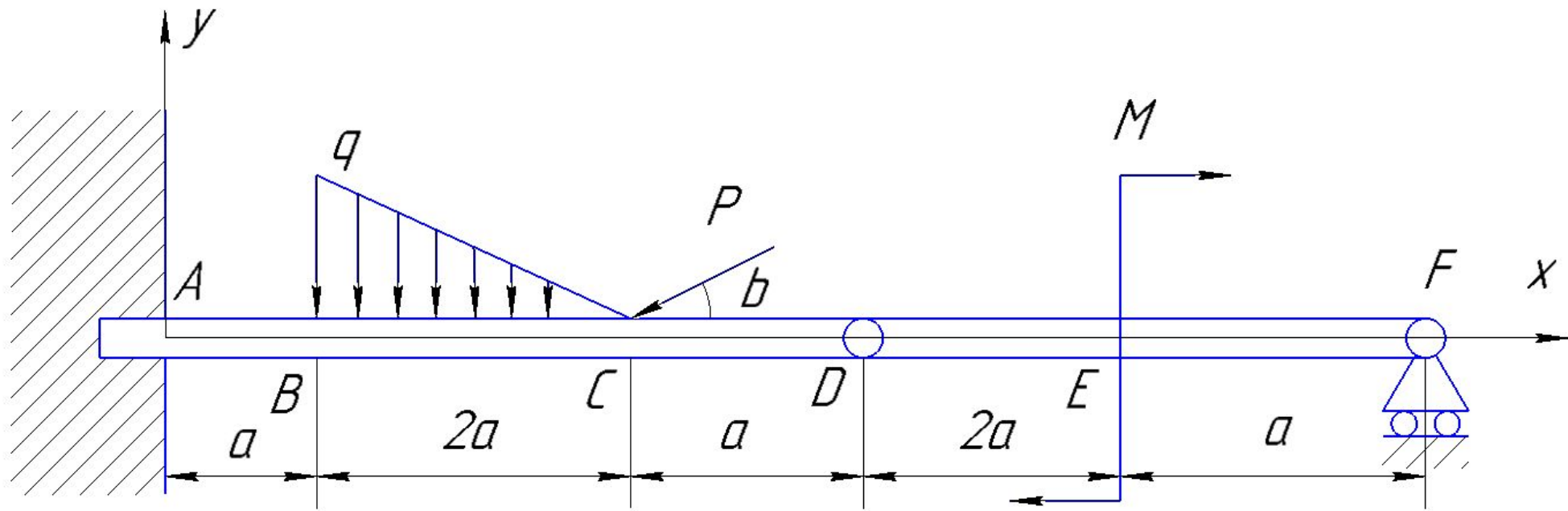




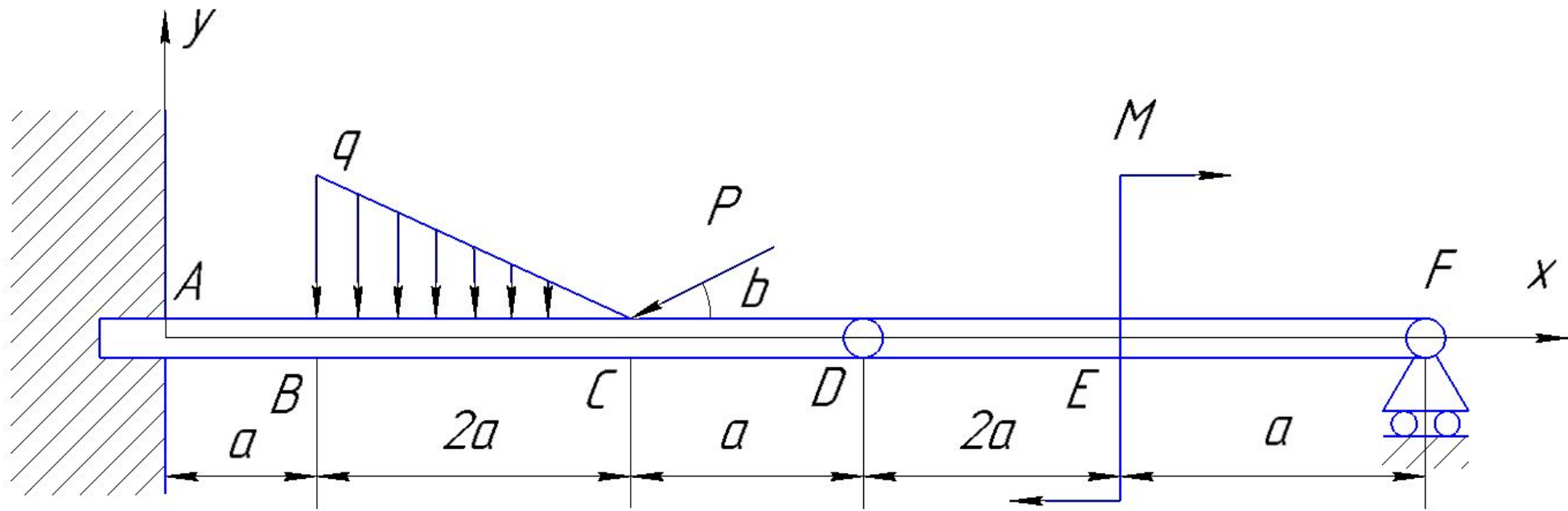
1. Визначаємо об'єкт рівноваги:



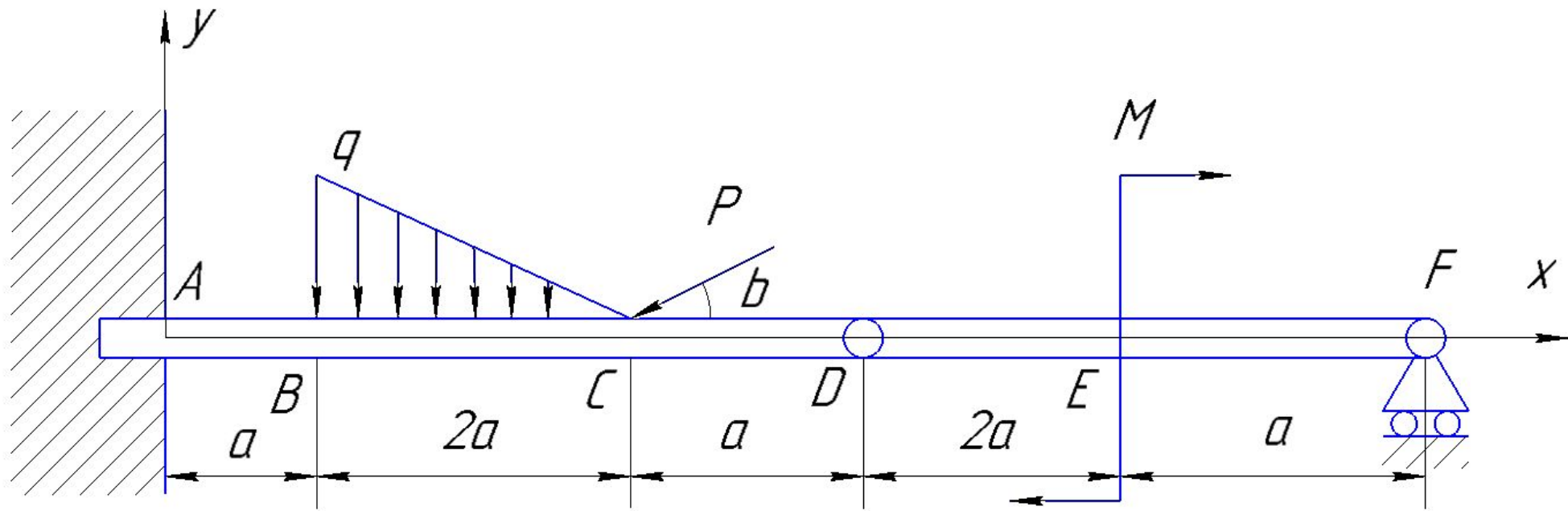
1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.



1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:

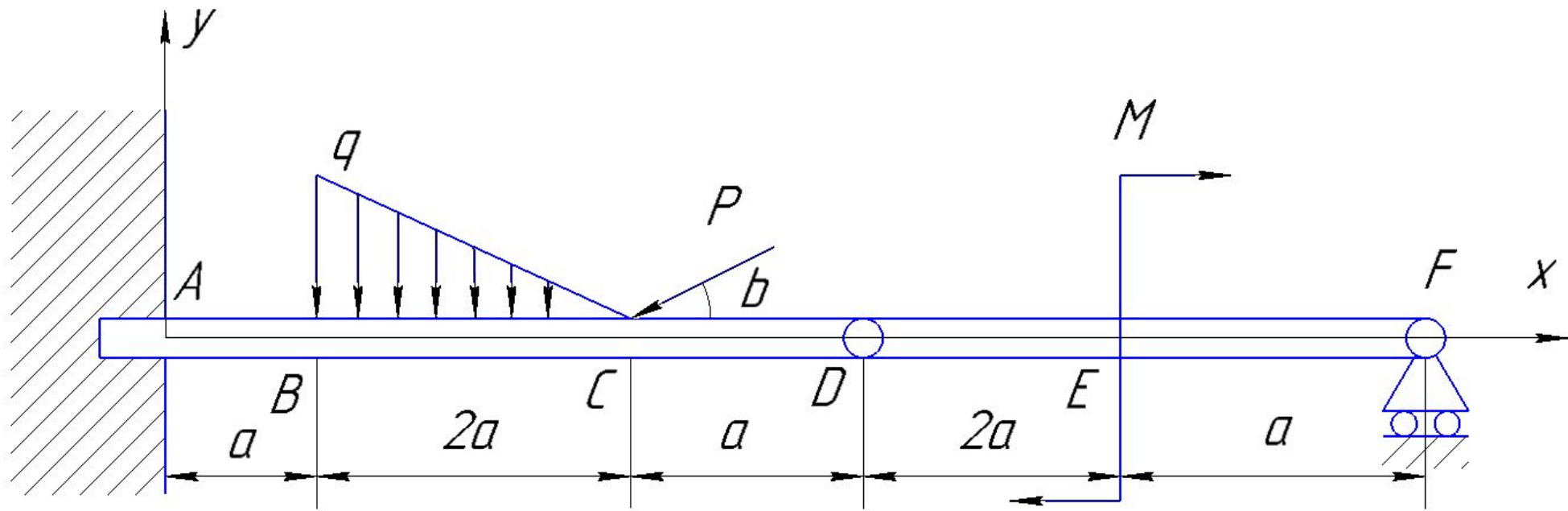


1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:  $M$ ,  $P$ ,  $q$ .

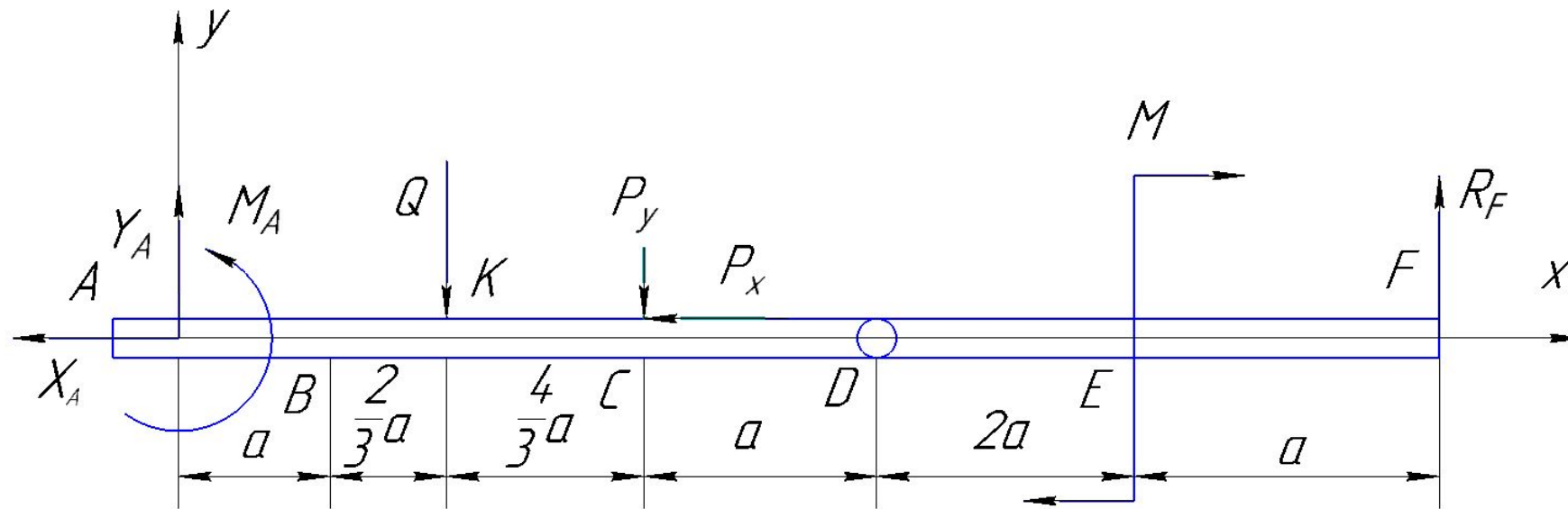


1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:  $M$ ,  $P$ ,  $q$ .
3. Визначаємо в'язі та їх реакції:

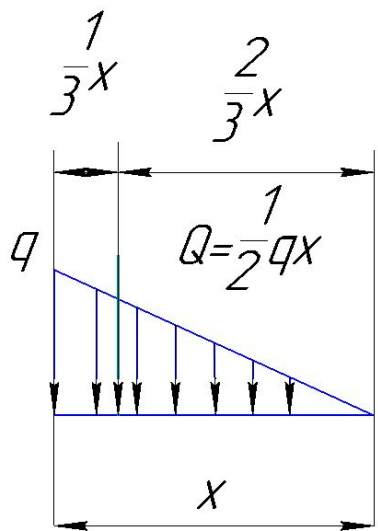




1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:  $M$ ,  $P$ ,  $q$ .
3. Визначаємо в'язі та їх реакції: защемлення -  $X_A, Y_A, M_A$ ; шарнірно рухома опора -  $R_F$ .
4. Заміняємо в'язі їх реакціями та перебудовуємо розрахункову схему з активними силами, розкладаючи силу на вісі  $x$  та  $y$ , та визначаємо місце прикладання та величину  $Q$ .



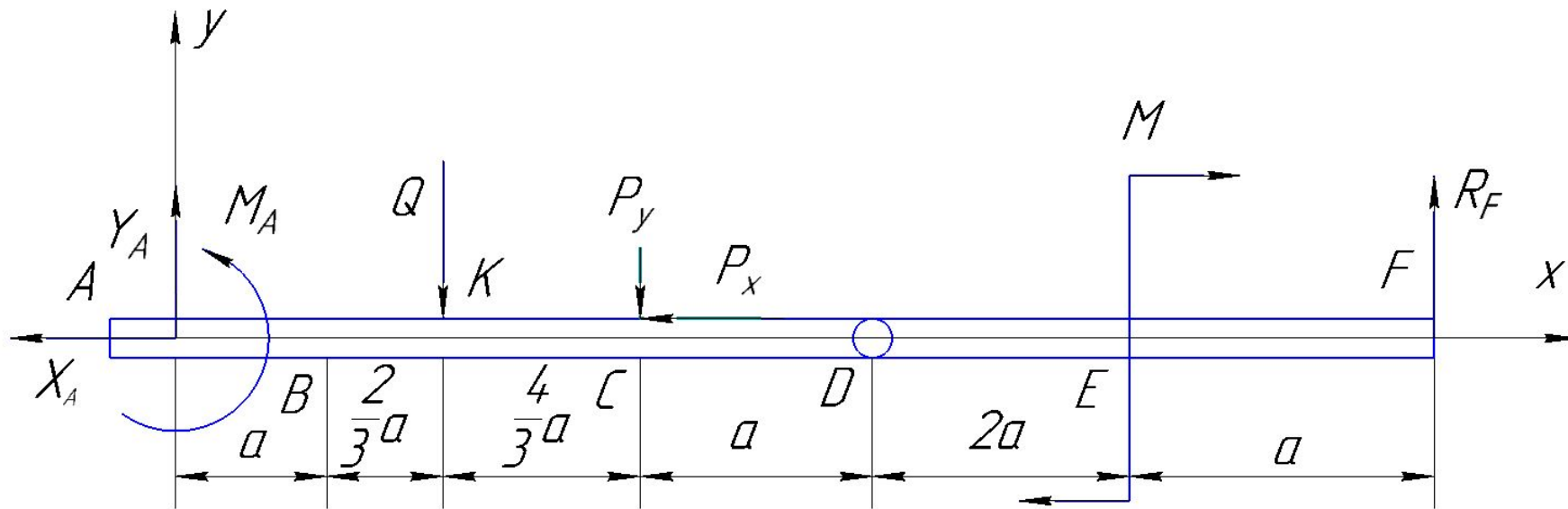
Складаємо рівняння рівноваги:



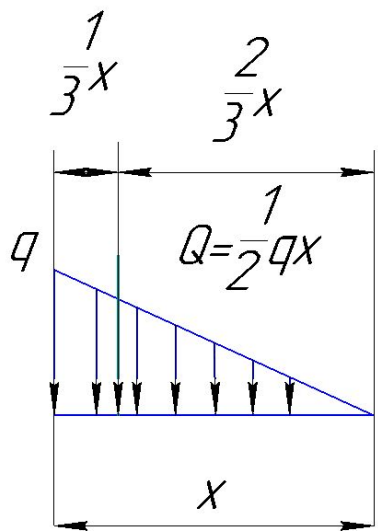
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



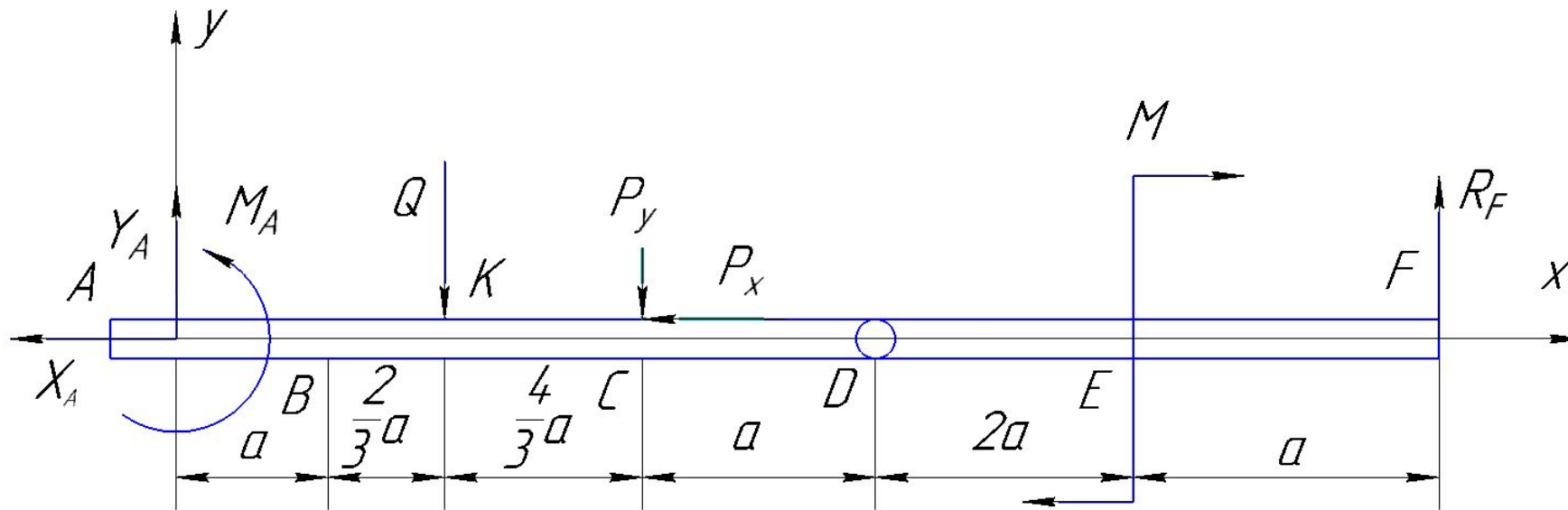
Складаємо рівняння рівноваги:



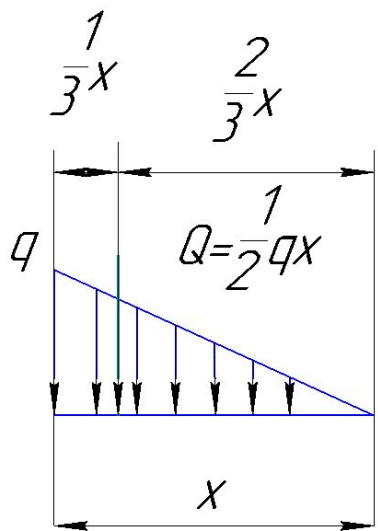
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



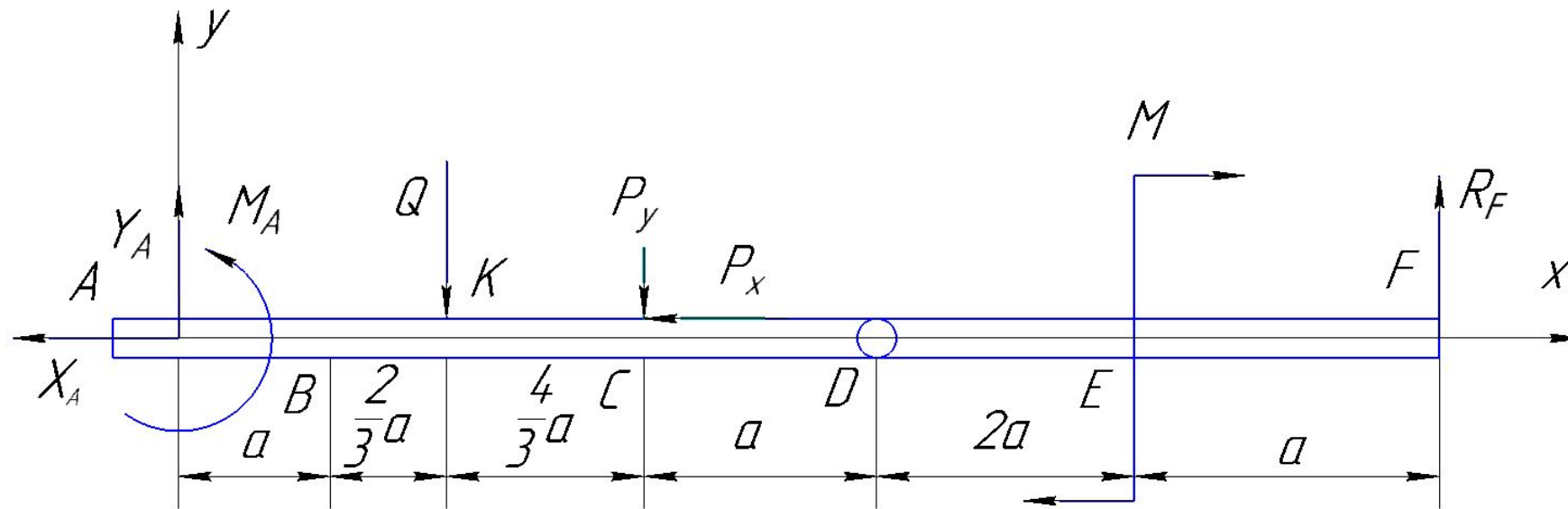
Складаємо рівняння рівноваги:



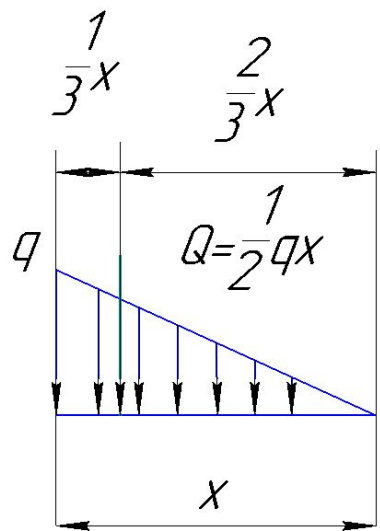
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



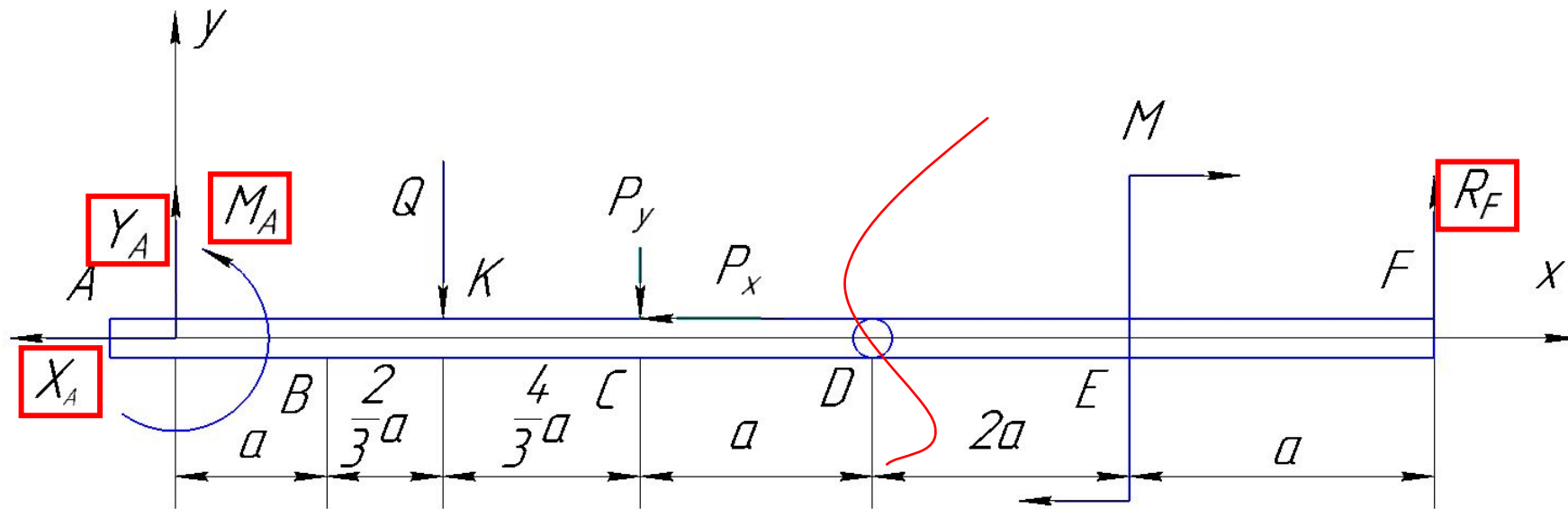
Складаємо рівняння рівноваги:



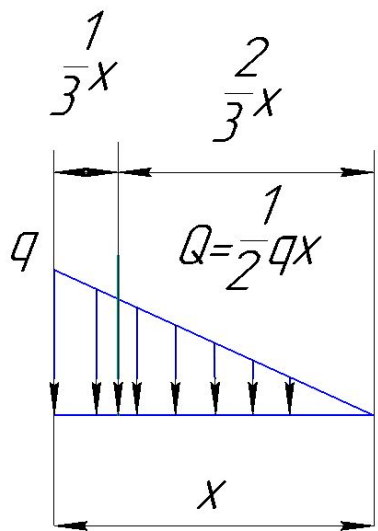
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0$$



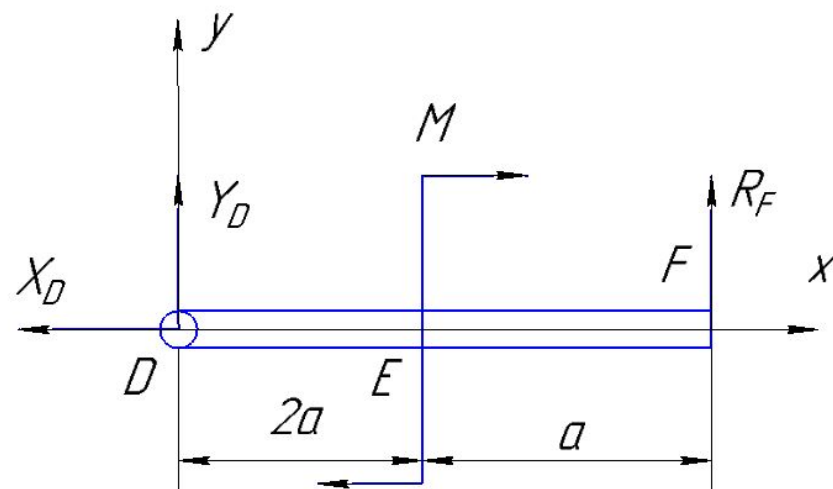
Складаємо рівняння рівноваги:



$$1 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$2 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$3 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0$$

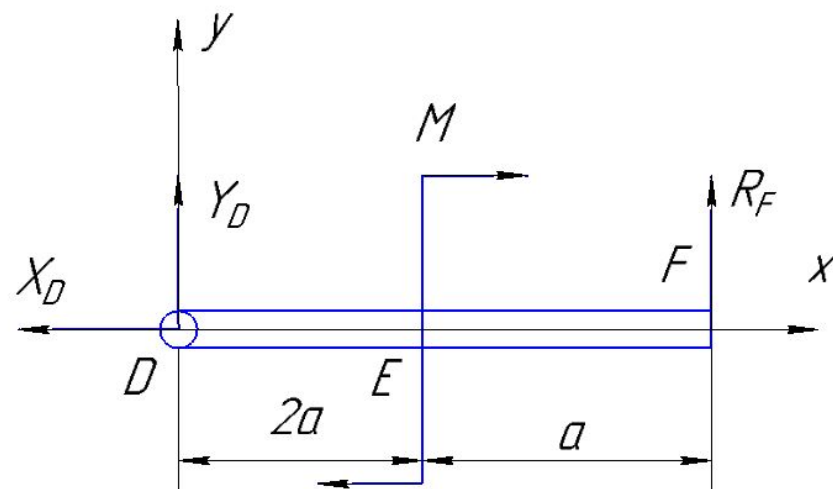


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$



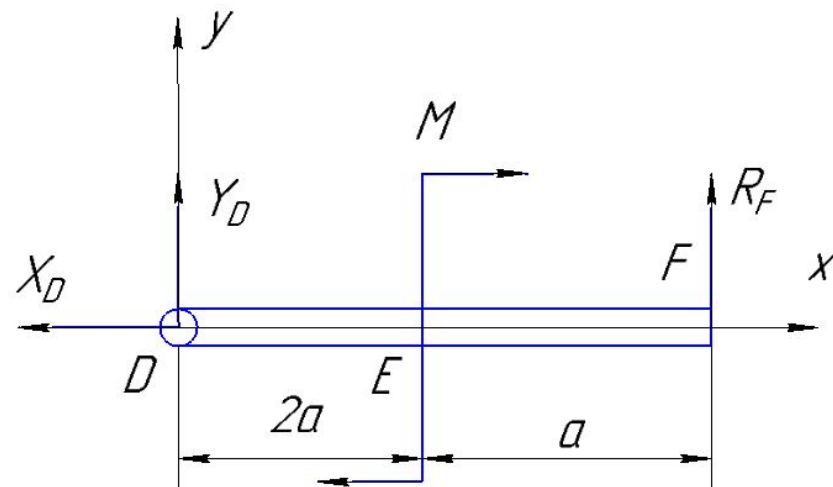
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$



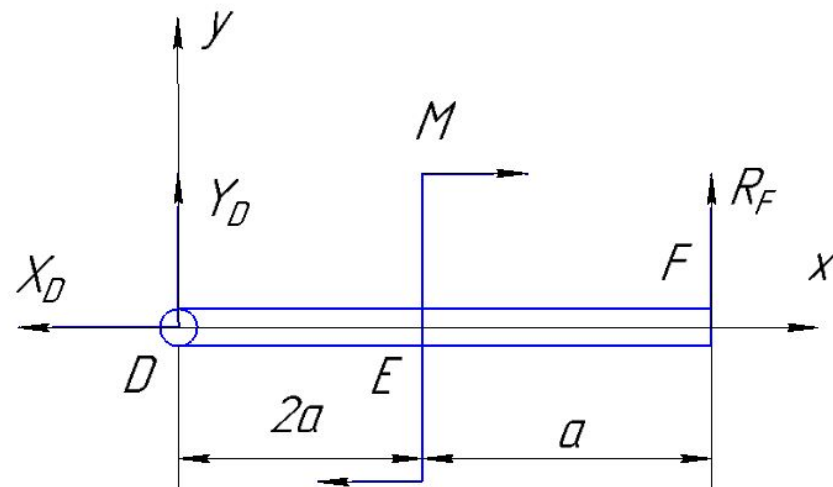


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$

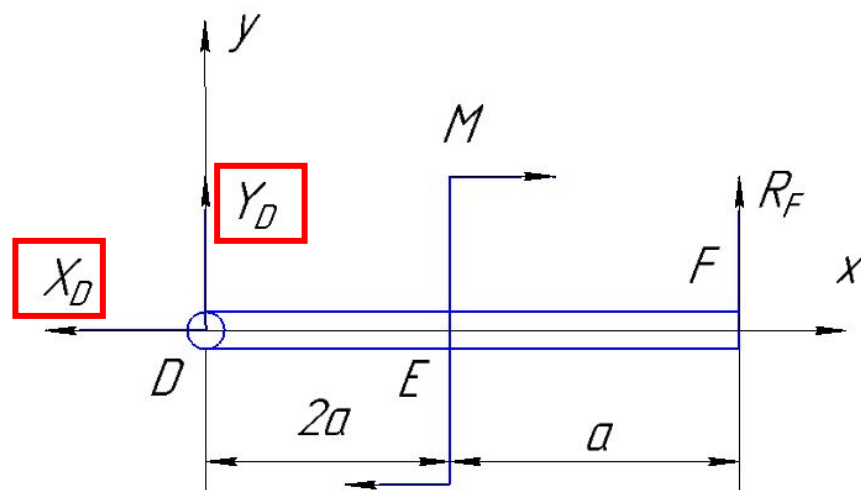


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = -M + R_F * 3a = 0$$



Складаємо рівняння рівноваги:

$$4 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D = 0$$

$$5 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

$$6 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = -M + R_F * 3a = 0$$

Дано:

$$q = 5 \text{ Н/м,}$$

$$a = 2 \text{ м,}$$

$$b = 30^\circ,$$

$$M = 4 \text{ Нм,}$$

$$P = 11 \text{ Н}$$

Знайти:

$$R_A, M_A, R_D, R_F,$$

Розв'язуємо систему рівнянь та знаходимо реакції

$$-X_D = 0$$

$$-X_A - P_x = 0$$

$$-M + R_F * 3a = 0$$

$$Y_D + R_F = 0$$

$$Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0$$

$$X_D = 0$$

$$X_A = -P \cos(b) = -11 * \cos(30^\circ) = -9,53 \text{ Н}$$

$$R_F = \frac{M}{3a} = \frac{4}{3*2} = 0,67 \text{ Н}$$

$$Y_D = -R_F = -0,67 \text{ Н}$$

$$Y_A = -R_F + \frac{1}{2}q * 2a + P \sin(b) = -0,67 + \overbrace{0,5 * 5 * 2 * 2}^Q + 11 \sin(30^\circ) = 14,83 \text{ Н}$$

$$M_A = M - R_F * 7a + Q * \frac{5}{3}a + P_y * 3a = 4 - 0,67 * 7 * 2 + 10 * \frac{10}{3} + 3 * 2 * 11 * \sin(30^\circ) = 60,95 \text{ Нм}$$

Дано:

$$q = 5 \text{ Н/м,}$$

$$a = 2 \text{ м,}$$

$$b = 30^\circ,$$

$$M = 4 \text{ Нм,}$$

$$P = 11 \text{ Н}$$

$$D_x = 0$$

$$X_A = -9,53 \text{ Н}$$

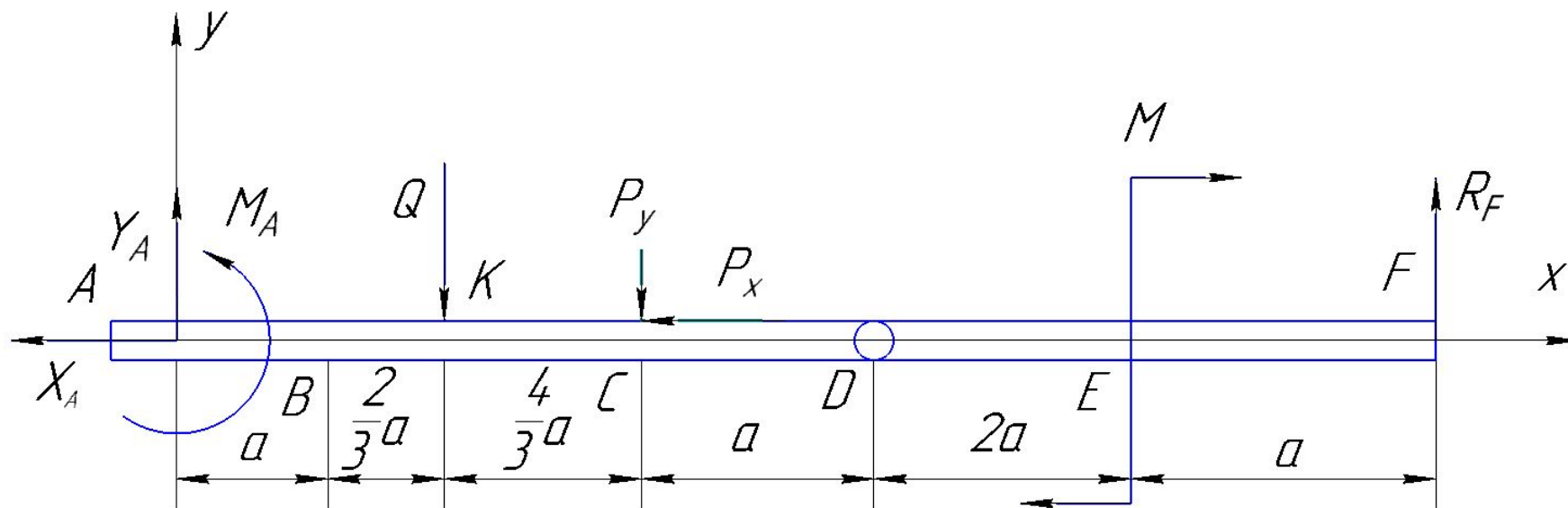
$$R_F = 0,67 \text{ Н}$$

$$D_y = -0,67 \text{ Н}$$

$$Y_A = 14,83 \text{ Н}$$

$$M_A = 60,95 \text{ Нм}$$

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) =$$

Дано:

$$q = 5 \text{ Н/м,}$$

$$a = 2 \text{ м,}$$

$$b = 30^\circ,$$

$$M = 4 \text{ Нм,}$$

$$P = 11 \text{ Н}$$

$$D_x = 0$$

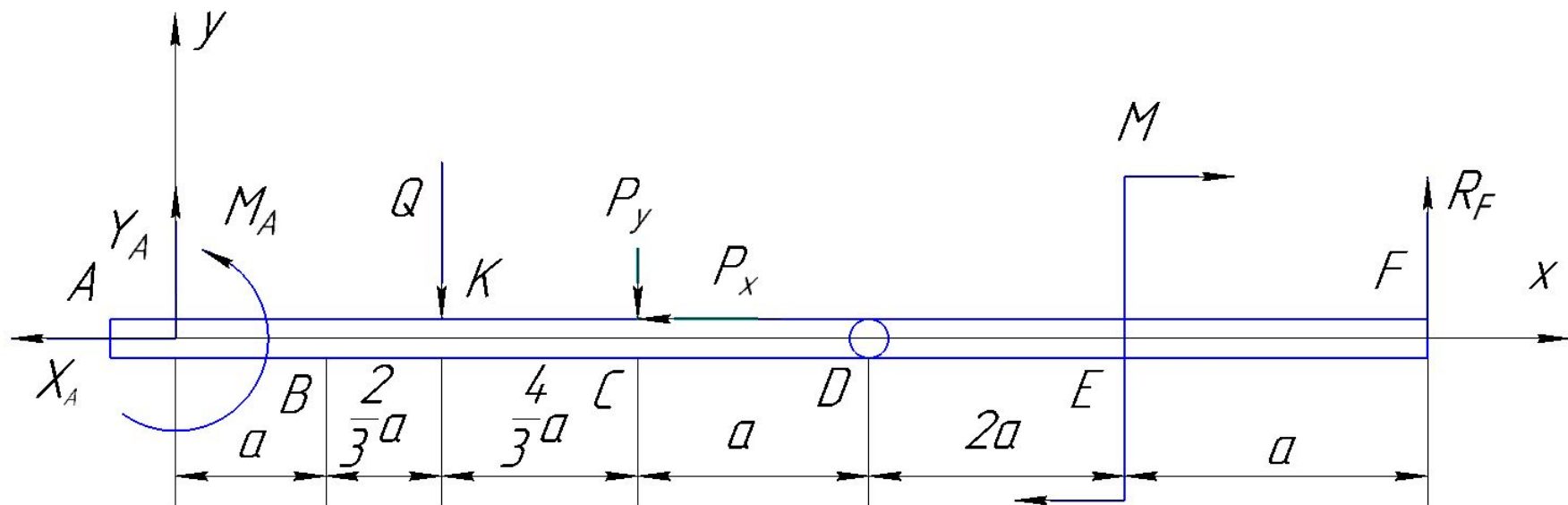
$$X_A = -9,53 \text{ Н}$$

$$R_F = 0,67 \text{ Н}$$

$$D_y = -0,67 \text{ Н}$$

$$Y_A = 14,83 \text{ Н}$$

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) = -M + P_y * 4a + Q * 5\frac{1}{3}a - Y_A * 7a + M_A =$$

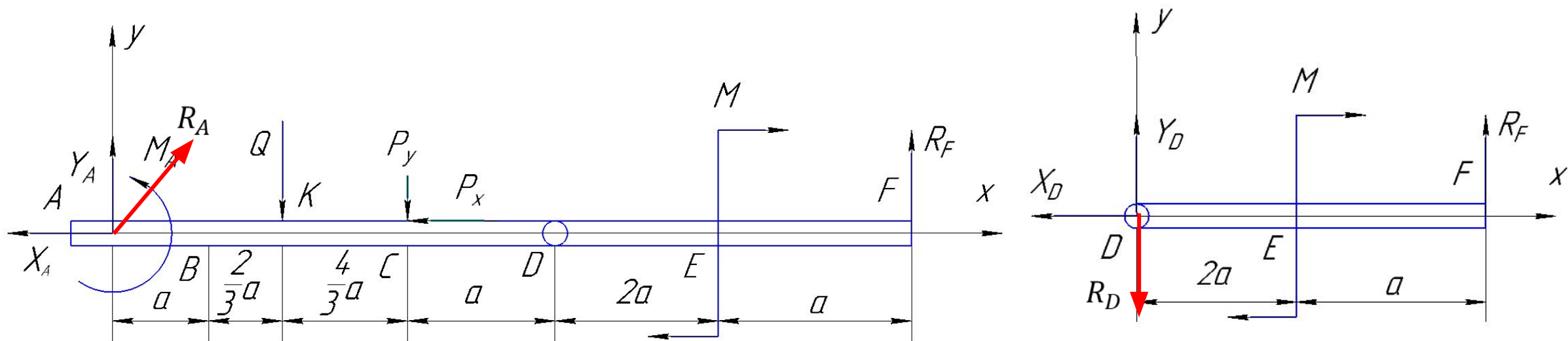
$$= -4 + 11 * 8 * \sin(30^\circ) + 10 * \frac{32}{3} - 14,83 * 14 + 60,95 = -4 + 44 + 106,67 - 207,62 + 60,95 = 207,62 - 207,62 = 0$$

Знаходимо реакції в шарнірах та запишемо відповідь

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-9,53)^2 + 14,83^2} = 17,63 \text{ Н}$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{0^2 + (-0,67)^2} = 0,67 \text{ Н}$$

Відповідь:  $R_D = 0,67 \text{ Н}$ ,  $R_A = 17,63 \text{ Н}$ ,  $R_F = 0,67 \text{ Н}$ ,  $M_A = 60,95 \text{ Нм}$



Дано:

$$q_1 = 3 \text{ Н/м,}$$

$$q_2 = 4 \text{ Н/м,}$$

$$a = 1 \text{ м,}$$

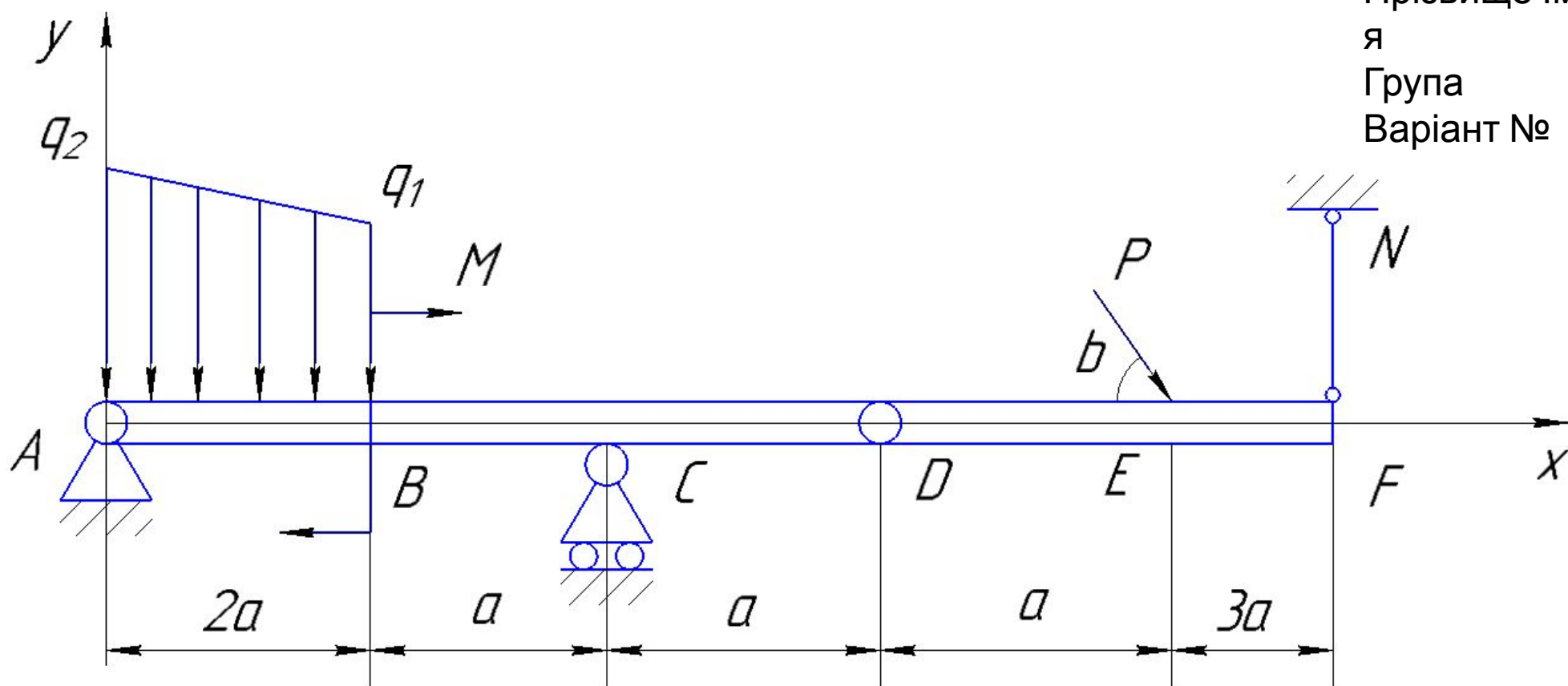
$$b = 45^\circ,$$

$$M = 3 \text{ Нм,}$$

$$P = 10 \text{ Н}$$

Знайти:

$$R_A, R_D, R_C, R_F,$$



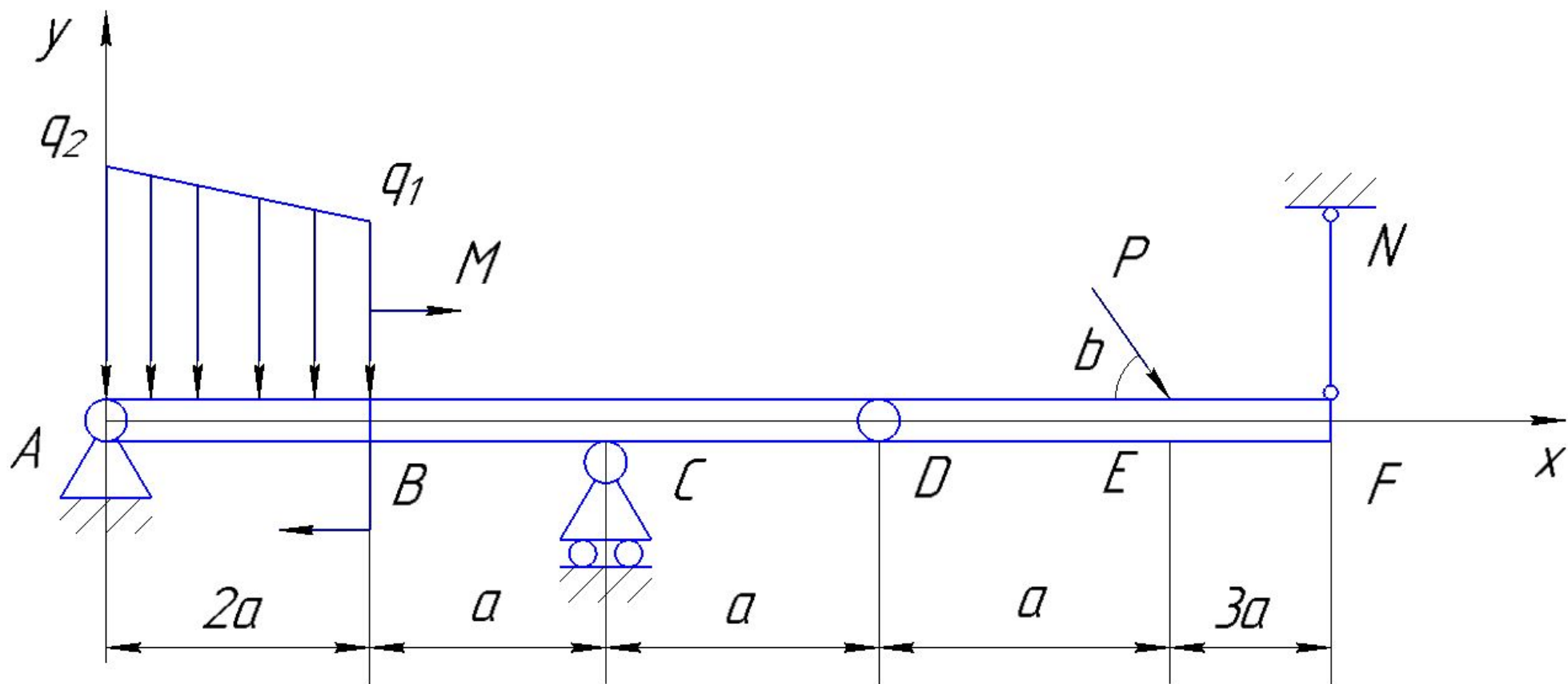
Прізвище Ім'

я

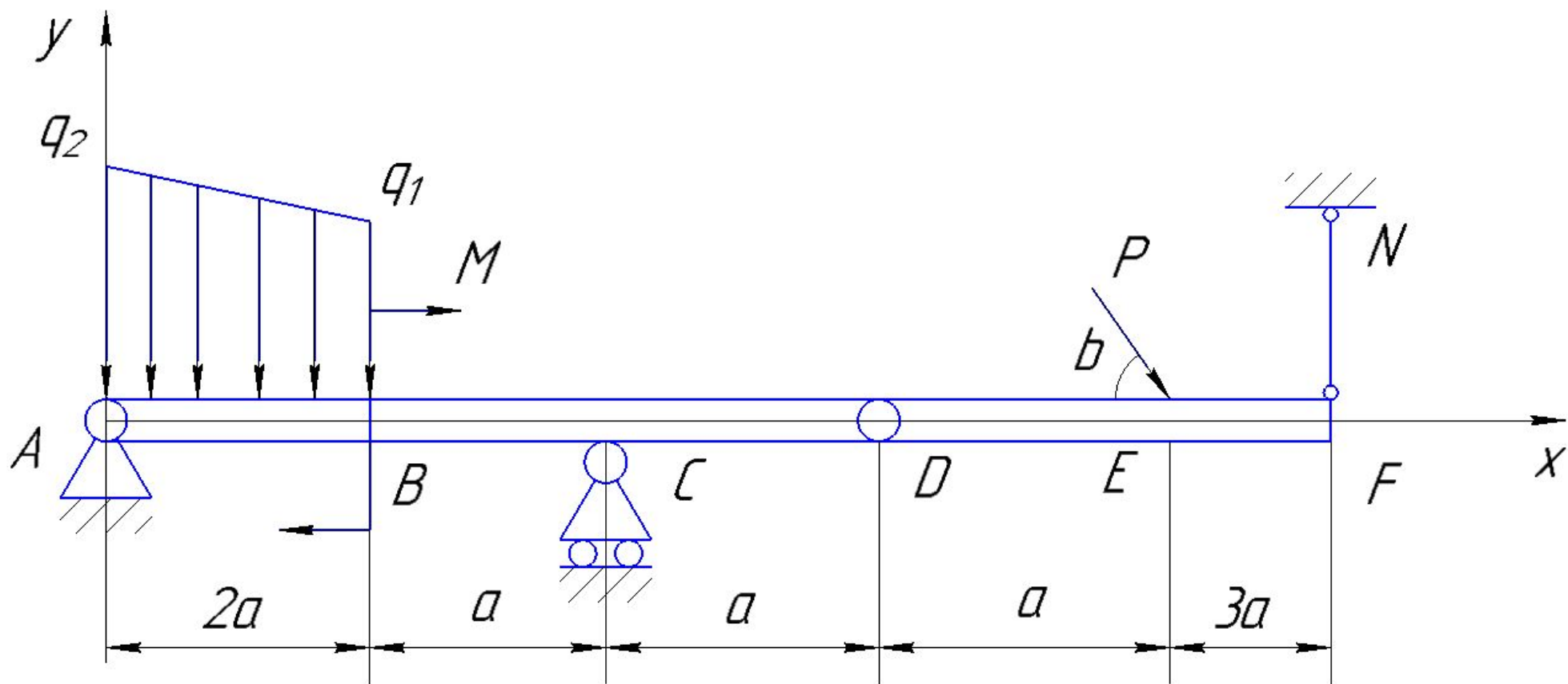
Група

Варіант №

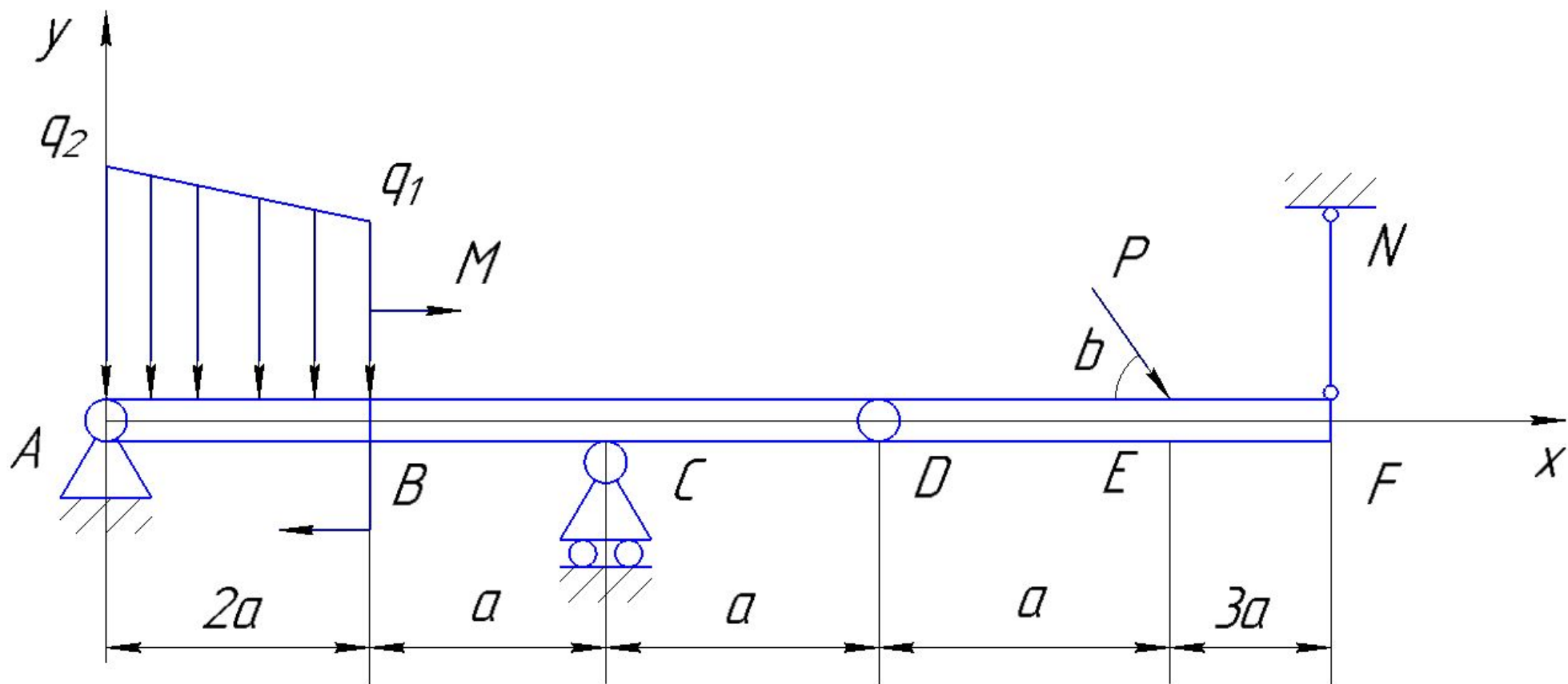




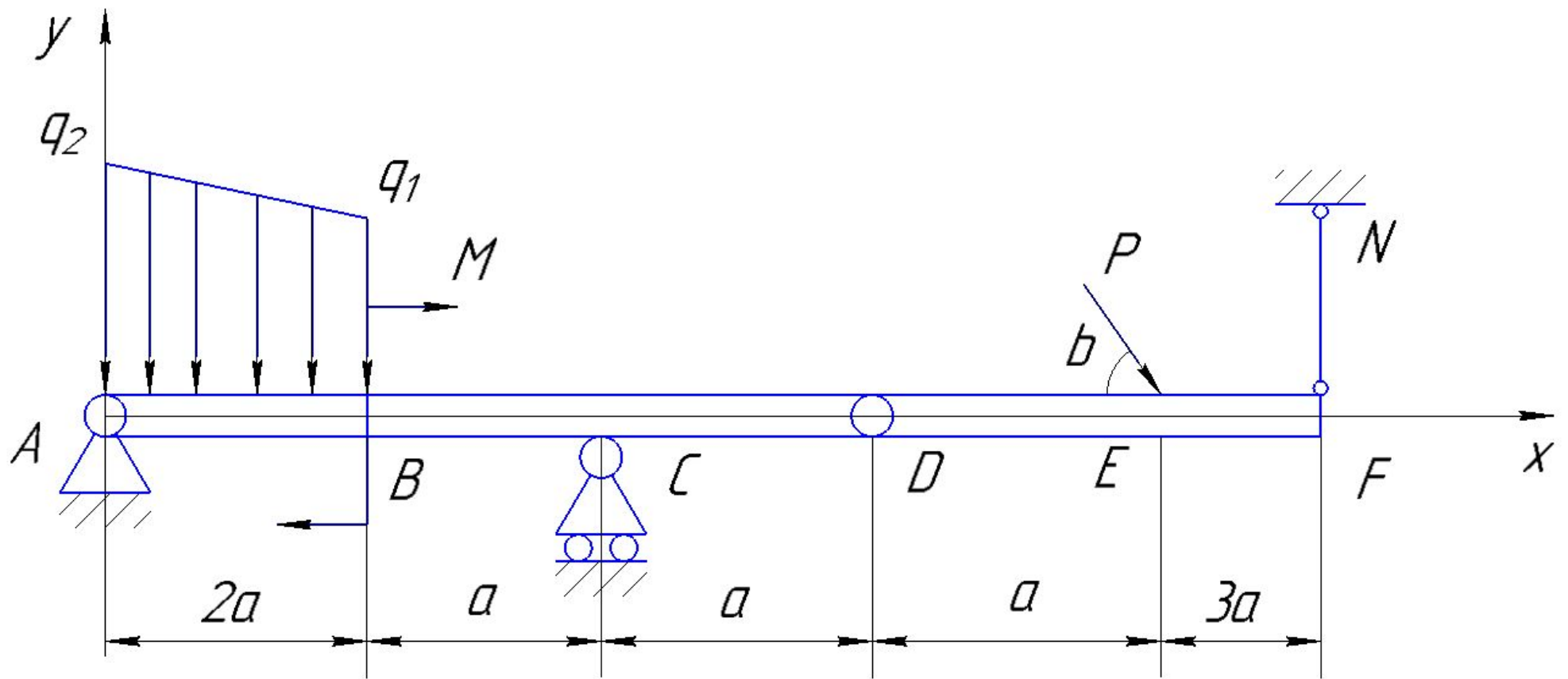
1. Визначаємо об'єкт рівноваги:



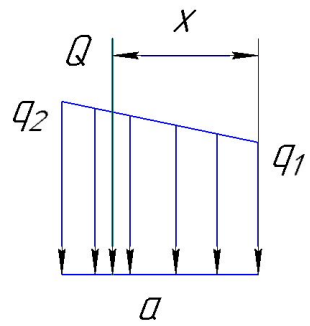
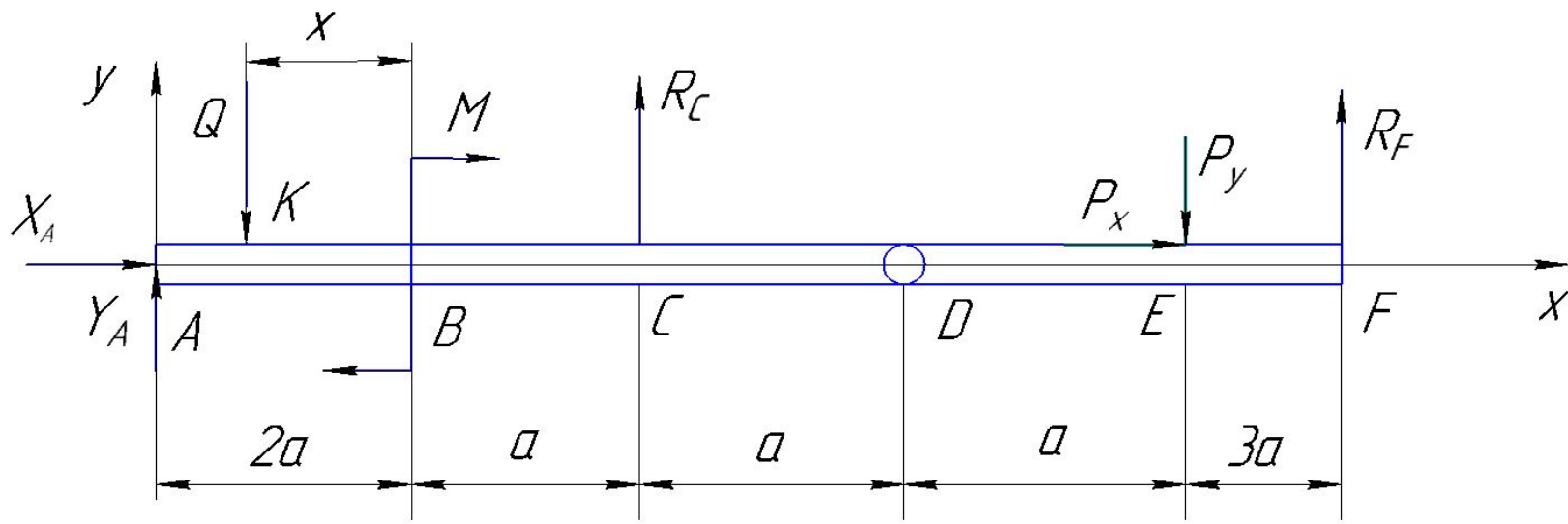
1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:



1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:  $M, P, q$ .
3. Визначаємо в'язі та їх реакції:



1. Визначаємо об'єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:  $M$ ,  $P$ ,  $q$ .
3. Визначаємо в'язі та їх реакції: шарнірно нерухома опора -  $X_A, Y_A$ ; шарнірно рухома опора -  $R_C$ , підвіс -  $R_F$ .
4. Заміняємо в'язі їх реакціями та перебудовуємо розрахункову схему з активними силами, розкладаючи силу на вісі  $x$  та  $y$ , та визначаємо місце прикладання та величину  $Q$ .



$$x = \frac{a}{3} \frac{2q_2 + q_1}{q_1 + q_2}$$

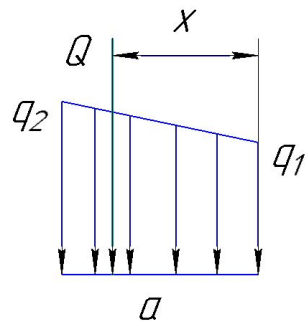
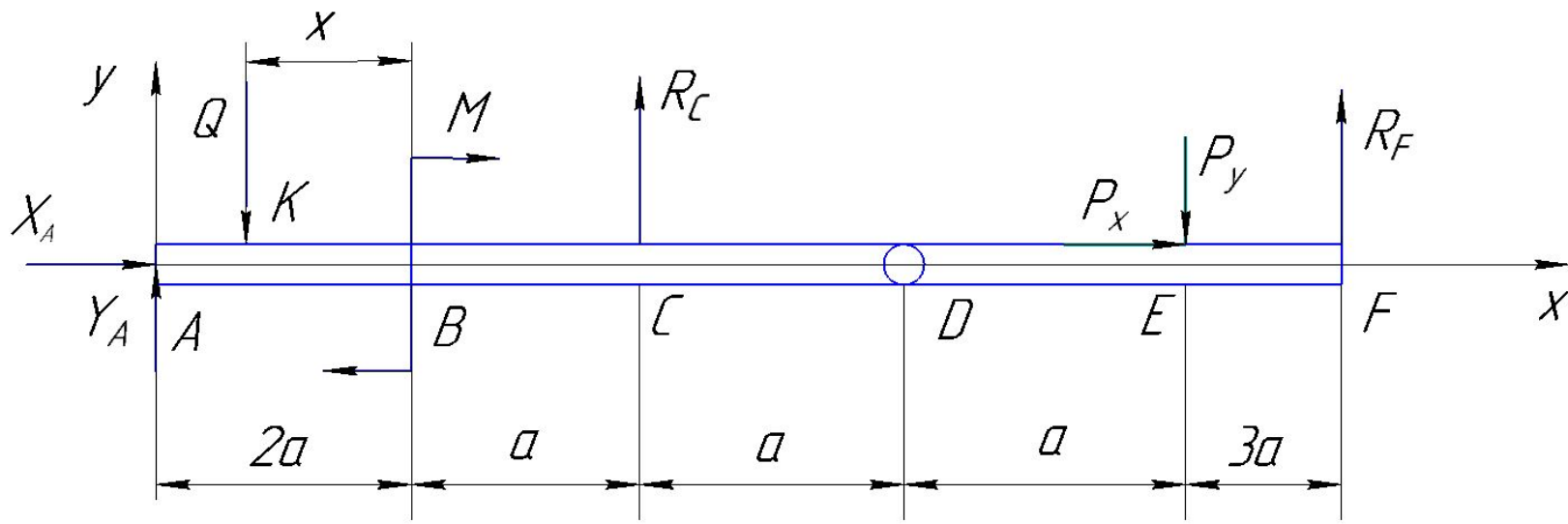
$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} a$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



$$x = \frac{a(2q_2 + q_1)}{q_1 + q_2}$$

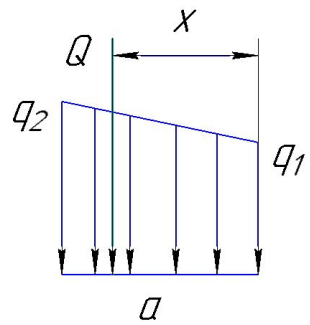
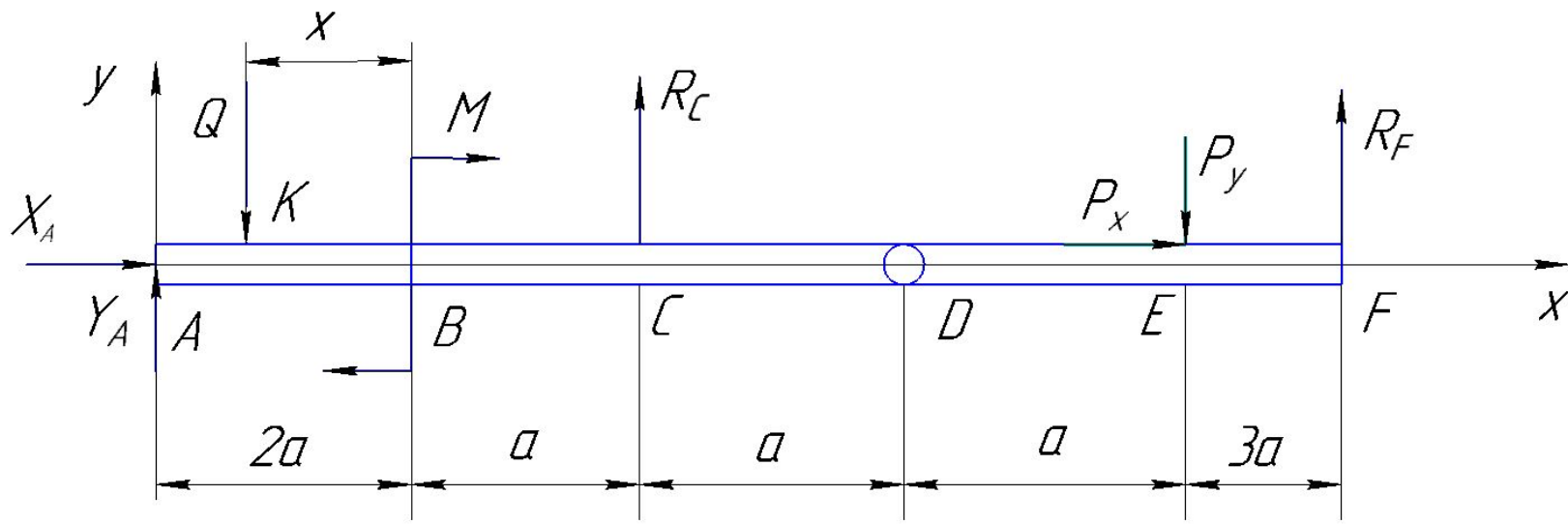
$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} a$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



$$x = \frac{a}{3} \frac{2q_2 + q_1}{q_1 + q_2}$$

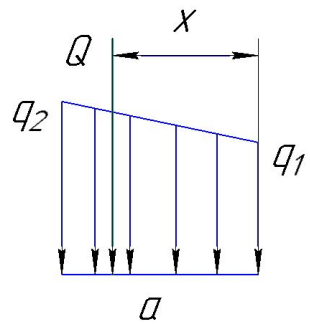
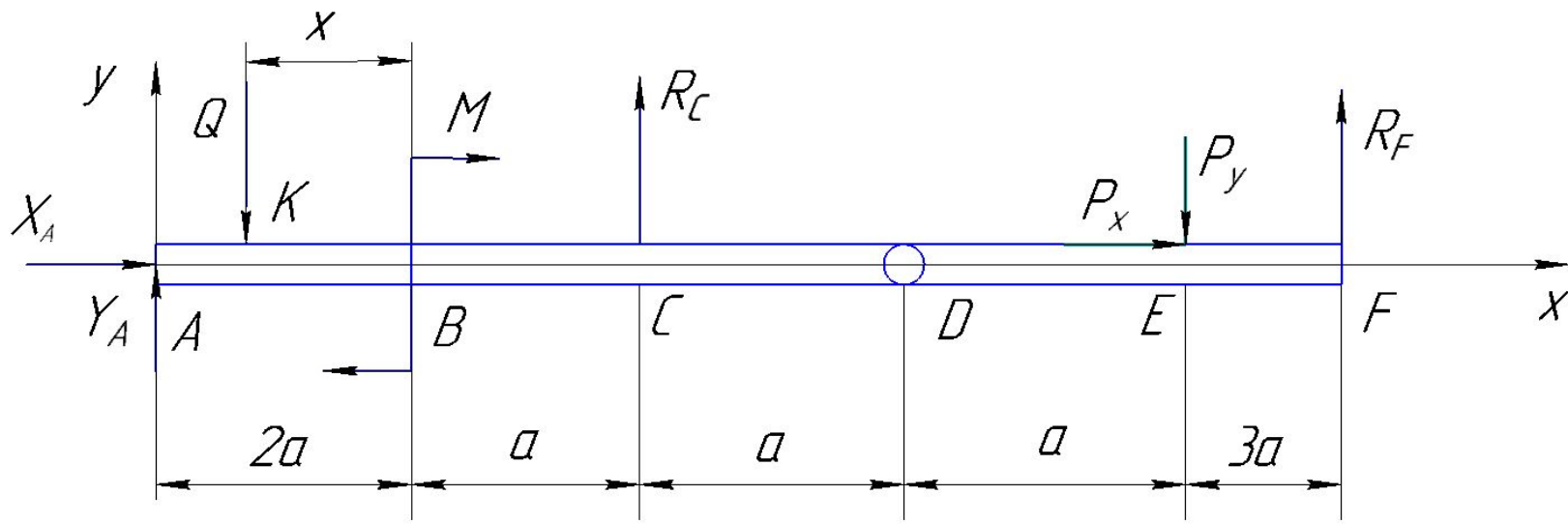
$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} a$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Q + R_C - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) =$$



$$x = \frac{a}{3} \frac{2q_2 + q_1}{q_1 + q_2}$$

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} a$$

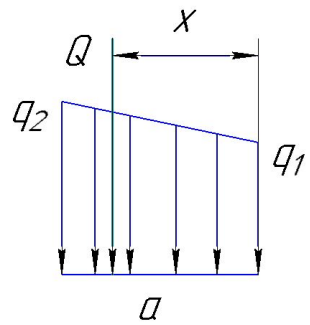
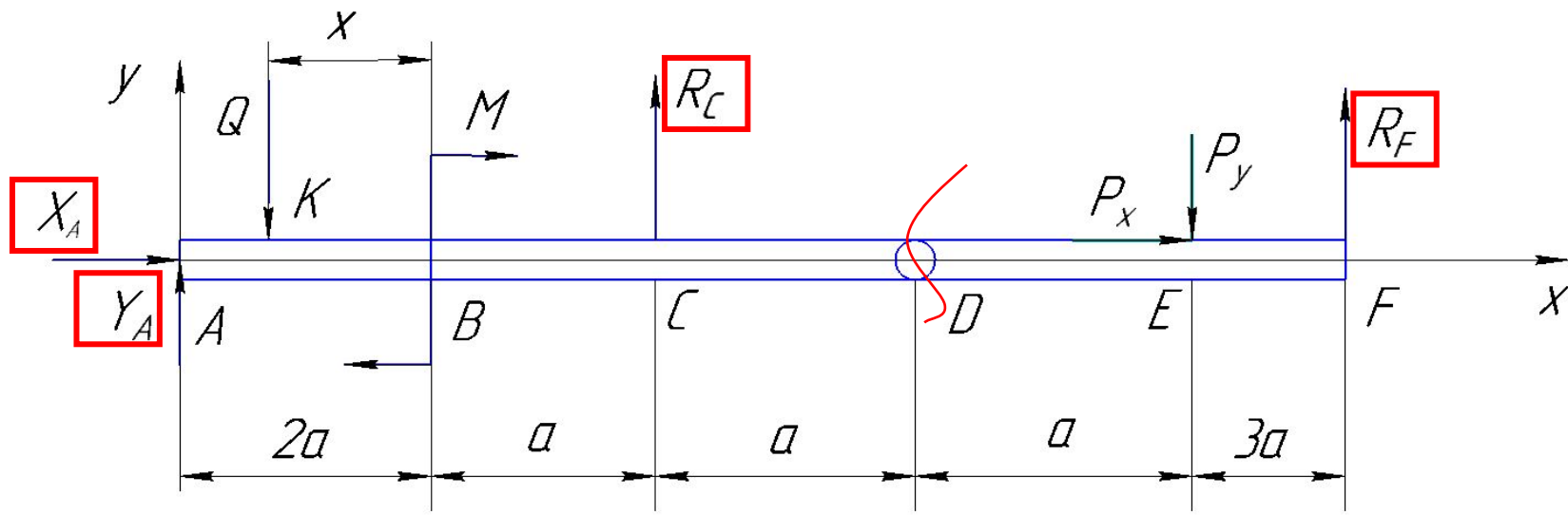
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Q + R_C - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = -Q * (2a - x) - M + R_C * 3a - P_y * 5a + R_F * 8a = 0$$





$$x = \frac{a(2q_2 + q_1)}{q_1 + q_2}$$

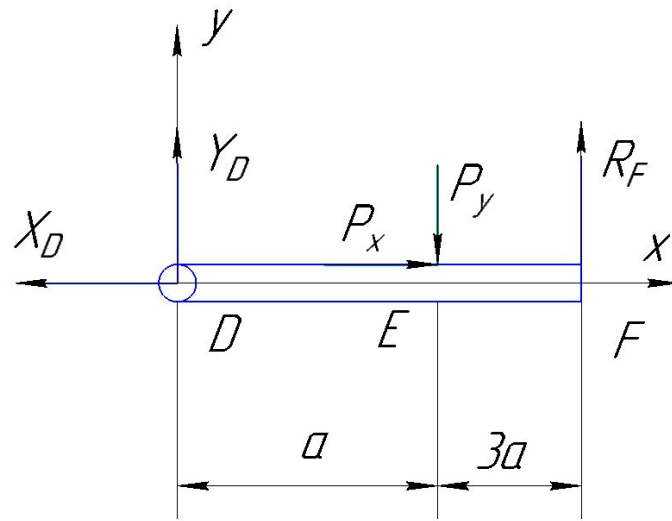
$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} a$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$$1 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_x = 0$$

$$2 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Q + R_C - P_y + R_F = 0$$

$$3 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = -Q * (2a - x) - M + R_C * 3a - P_y * 5a + R_F * 8a = 0$$

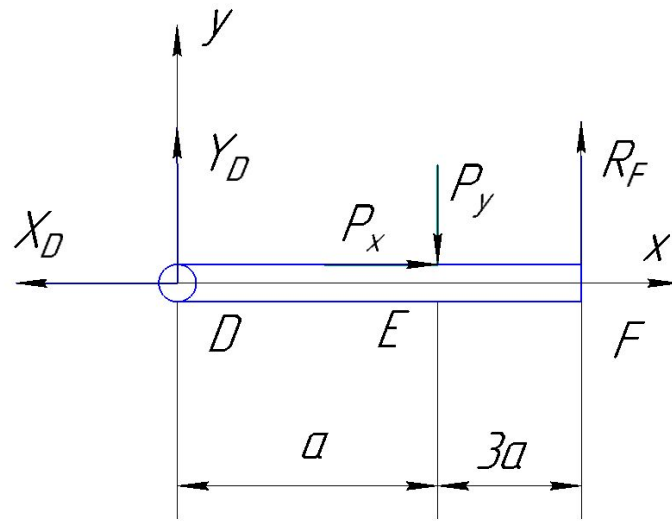


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$

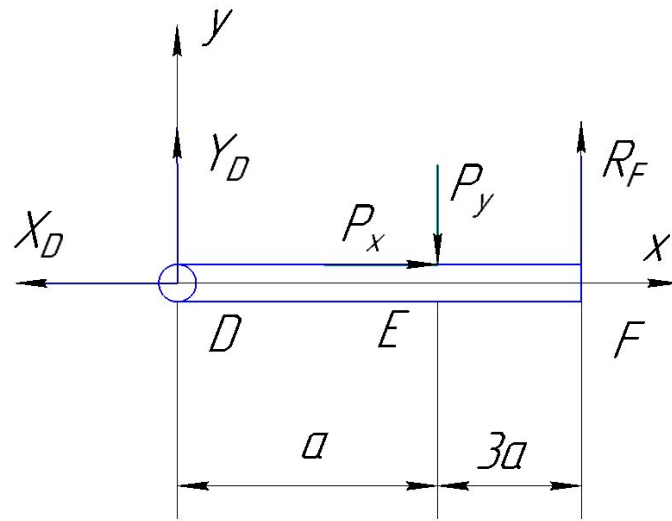


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$

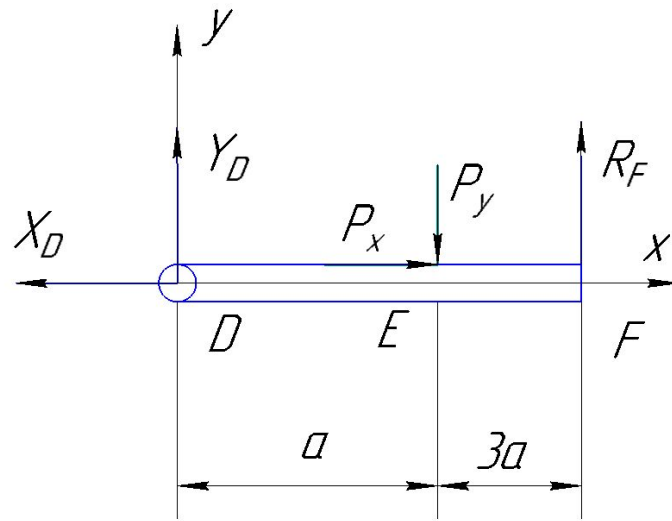


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) =$$

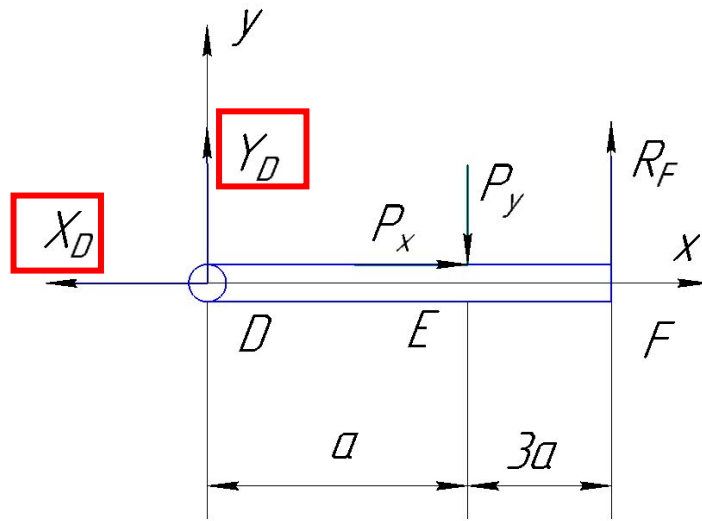


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = -P_y * a + R_F * 4a = 0$$



Складаємо рівняння рівноваги:

$$4 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$5 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$6 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = -P_y * a + R_F * 4a = 0$$

Розв'язуємо систему рівнянь та знаходимо реакції

Дано:

$$q_1 = 3 \text{ Н/м,}$$

$$q_2 = 4 \text{ Н/м,}$$

$$a = 1 \text{ м,}$$

$$b = 45^\circ,$$

$$M = 3 \text{ Нм,}$$

$$P = 10 \text{ Н}$$

$$X_A + P_x = 0$$

$$-X_D + P_x = 0$$

$$-P_y * a + R_F * 4a = 0$$

$$Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$-Q * (2a - x) - M + R_C * 3a - P_y * 5a + R_F * 8a = 0$$

$$Y_A - Q + R_C - P_y + R_F = 0$$

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2} * 2a = \frac{3 + 4}{2} * 2 * 1 = 7 \text{ Н}$$

$$x = \frac{a * 2q_2 + q_1}{3 * q_2 + q_1} = \frac{1 * 2 * 4 + 3}{3 * 4 + 3} = 0,52 \text{ м}$$

$$X_A = -P \cos(b) = -10 * \cos(45^\circ) = -7,07 \text{ Н}$$

$$X_D = P \cos(b) = 10 * \cos(45^\circ) = 7,07 \text{ Н}$$

$$R_F = \frac{P \sin(b)}{4} = \frac{10 * \sin(45^\circ)}{4} = 1,77 \text{ Н}$$

$$Y_D = P_y - R_F = 10 * \sin(45^\circ) - 1,77 = 5,30 \text{ Н}$$

$$R_C = \frac{Q * (2a - x) + M + P_y * 5a - R_F * 8a}{3a} = \frac{7 * (2 - 0,52) + 3 + 10 * \sin(45^\circ) * 5 - 1,77 * 8}{3} = 11,52 \text{ Н}$$

$$Y_A = Q - R_C + P_y - R_F = 7 - 11,52 + 10 * \sin(45^\circ) - 1,77 = 0,78 \text{ Н}$$

Дано:

$$q_1 = 3 \text{ Н/м,}$$

$$q_2 = 4 \text{ Н/м,}$$

$$a = 1 \text{ м,}$$

$$b = 45^\circ,$$

$$M = 3 \text{ Нм,}$$

$$P = 10 \text{ Н}$$

$$X_A = -7,07 \text{ Н}$$

$$X_D = 7,07 \text{ Н}$$

$$R_F = 1,77 \text{ Н}$$

$$Y_D = 5,30 \text{ Н}$$

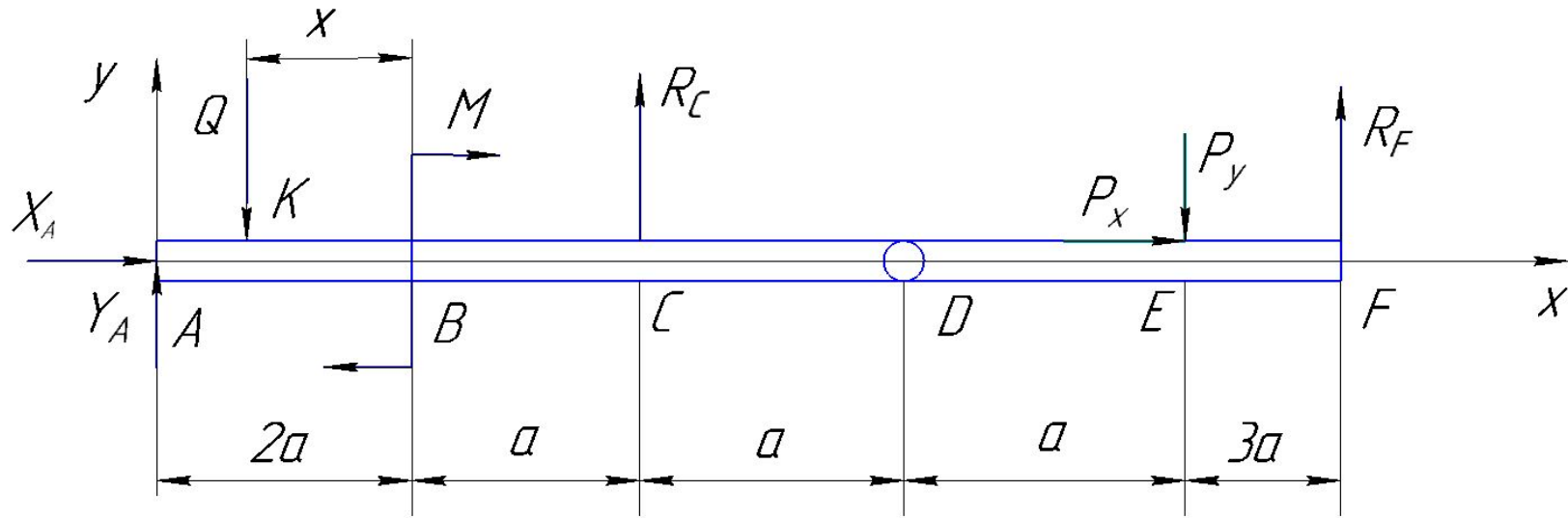
$$R_C = 11,52 \text{ Н}$$

$$Y_A = 0,78 \text{ Н}$$

$$Q = 7 \text{ Н}$$

$$x = 0,52 \text{ м}$$

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_F(\vec{F}_i) = -Y_A * 8a + Q * (6a + x) - M - R_C * 5a + P * \sin(b) * 3a =$$

$$= -0,78 * 8 + 7 * (6 + 0,52) - 3 - 11,37 * 5 + 10 * \sin(45^\circ) * 3 =$$

$$= -6,24 + 45,64 - 3 - 56,85 + 21,21 = 66,85 - 66,09 = 0$$

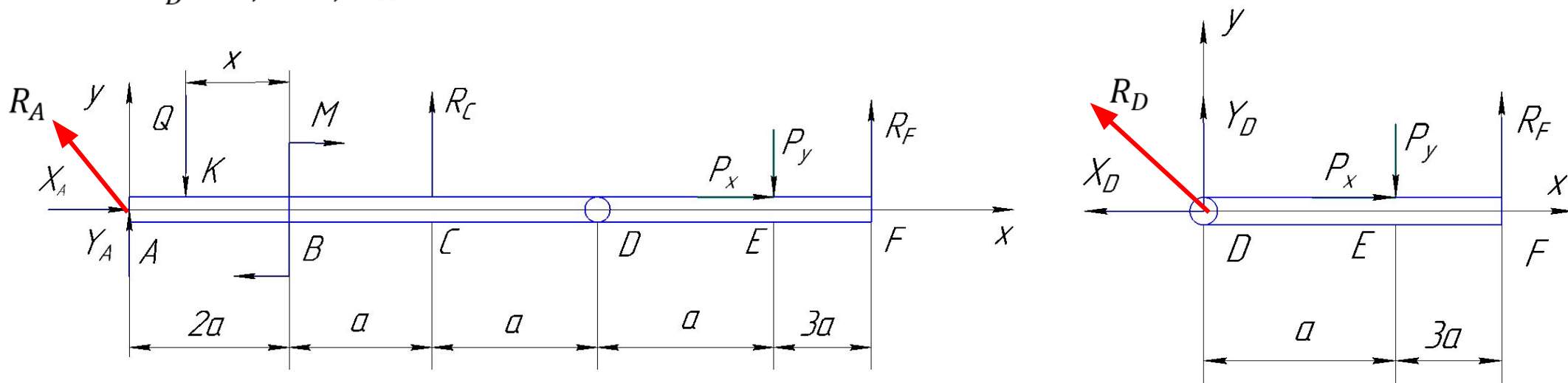


Знаходимо реакції в шарнірах та записуємо відповідь

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-7,07)^2 + 0,78^2} = 7,11 \text{ Н}$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{7,07^2 + (5,30)^2} = 8,84 \text{ Н}$$

Відповідь:  $R_D = 8,84 \text{ Н}$ ,  $R_A = 7,11 \text{ Н}$ ,  $R_F = 1,77 \text{ Н}$ ,  $R_C = 11,52 \text{ Н}$



## Домашнє завдання

Дано:

$$q = 2 \text{ Н/м,}$$

$$a = 3 \text{ м,}$$

$$b = 60^\circ,$$

$$M = 6 \text{ Нм,}$$

$$P = 15 \text{ Н}$$

Знайти:

$$R_A, R_D, R_C, R_F,$$

