Рівновага складеної системи сил

Послідовність дій при розв’язуванні задач

1. Вибрати об’єкт дослідження.
2. Зобразити активні сили та моменти пар активних сил, які задані за умовою задачі.
3. Визначаємо тип в`язей та звільняємось від них.
4. Проводимо аналіз системи сил, прикладеної до об’єкта дослідження.
5. Розрізаємо складену балку в місці врізаного шарніру, прикладаючи реакції відрізаної частини.
6. Записуємо рівняння рівноваги для загальної балки та для відрізаної частини окремо.
   Їх можна записати у трьох формах:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

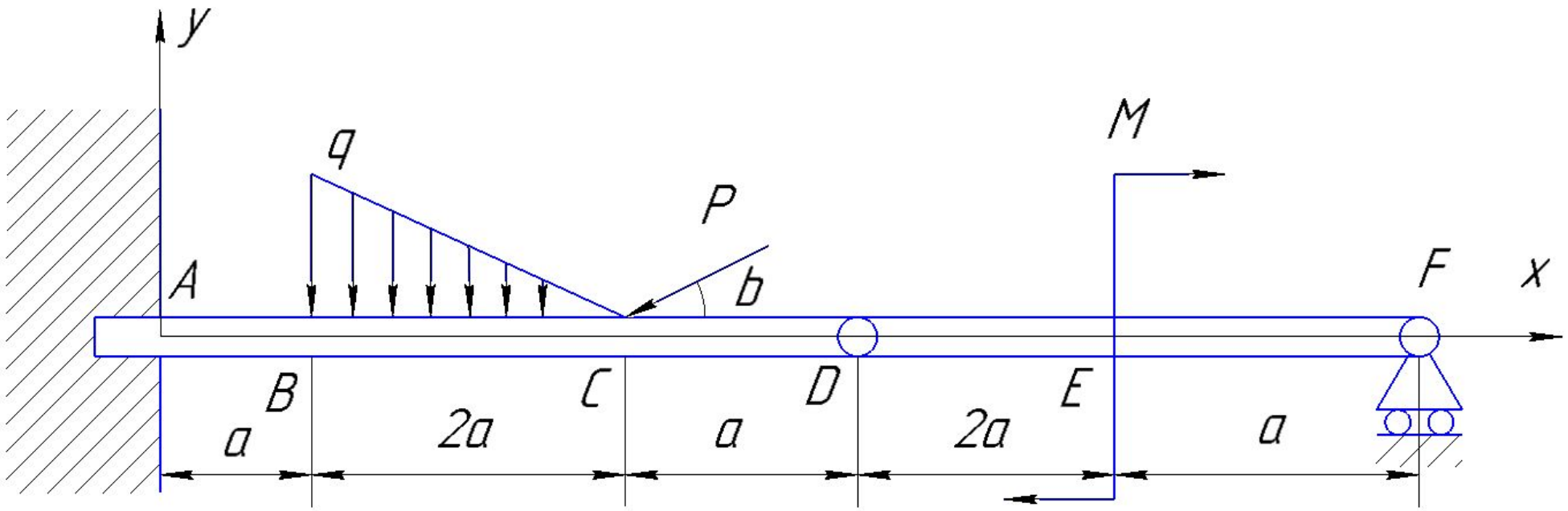
7. Розв’язуємо рівняння та визначаємо числові значення проекцій невідомих сил та моментів.

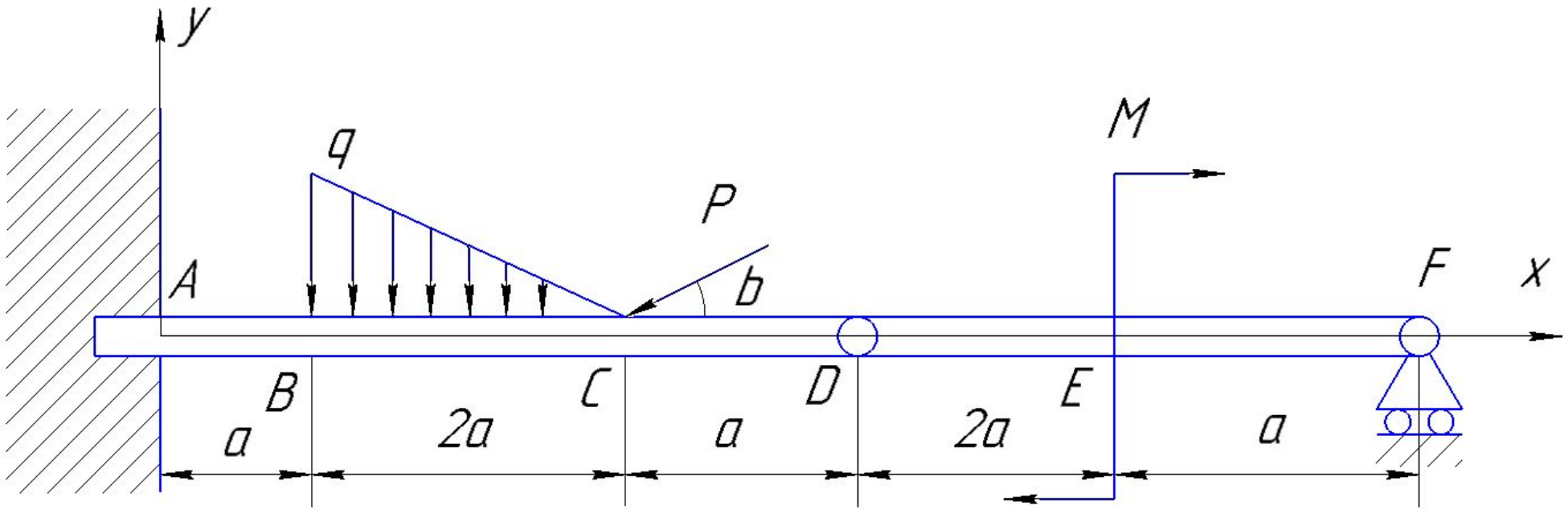
$$: R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.$$

Прізвище Ім’я
Група
Варіант №

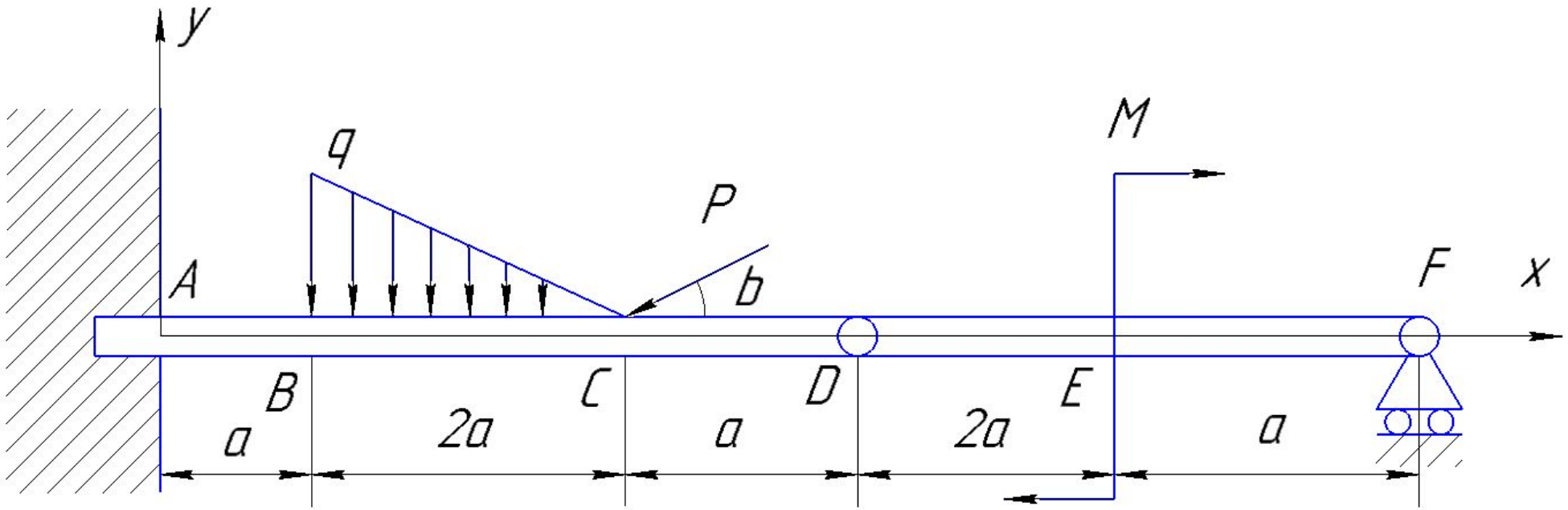
Дано:
q = 5 Н/м,
a = 2 м,
b = 30 °,
M = 4 Нм,
P = 11 Н

Знайти:
$R_A, M_A, R_D, R_F,$

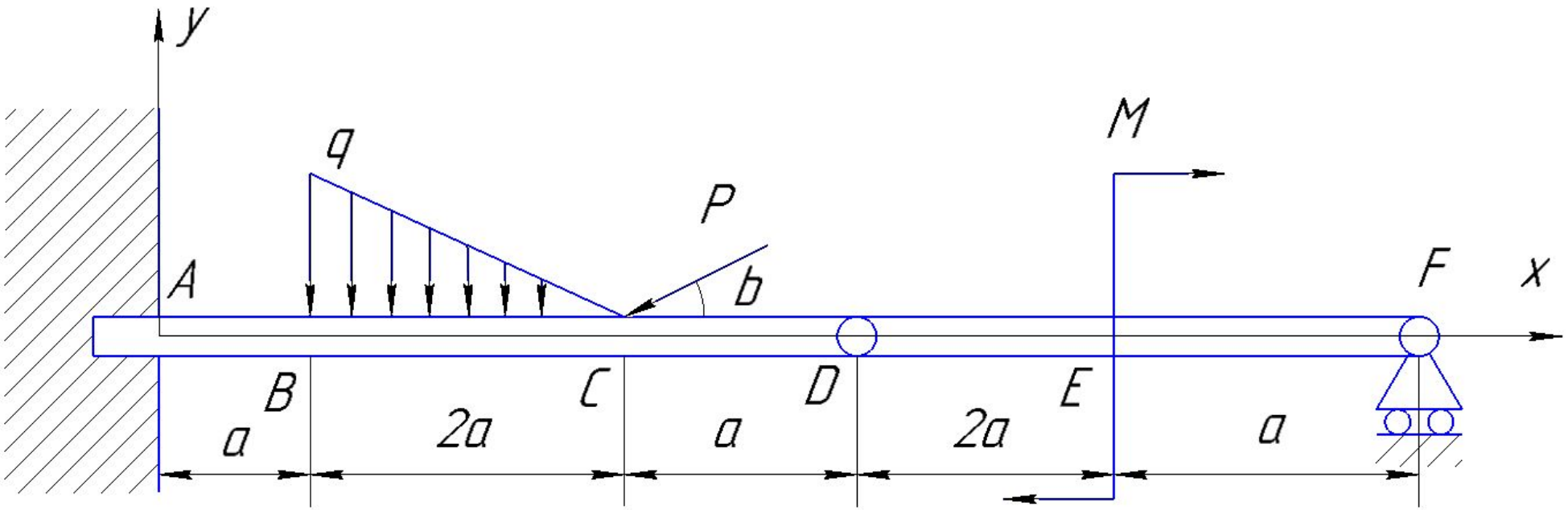




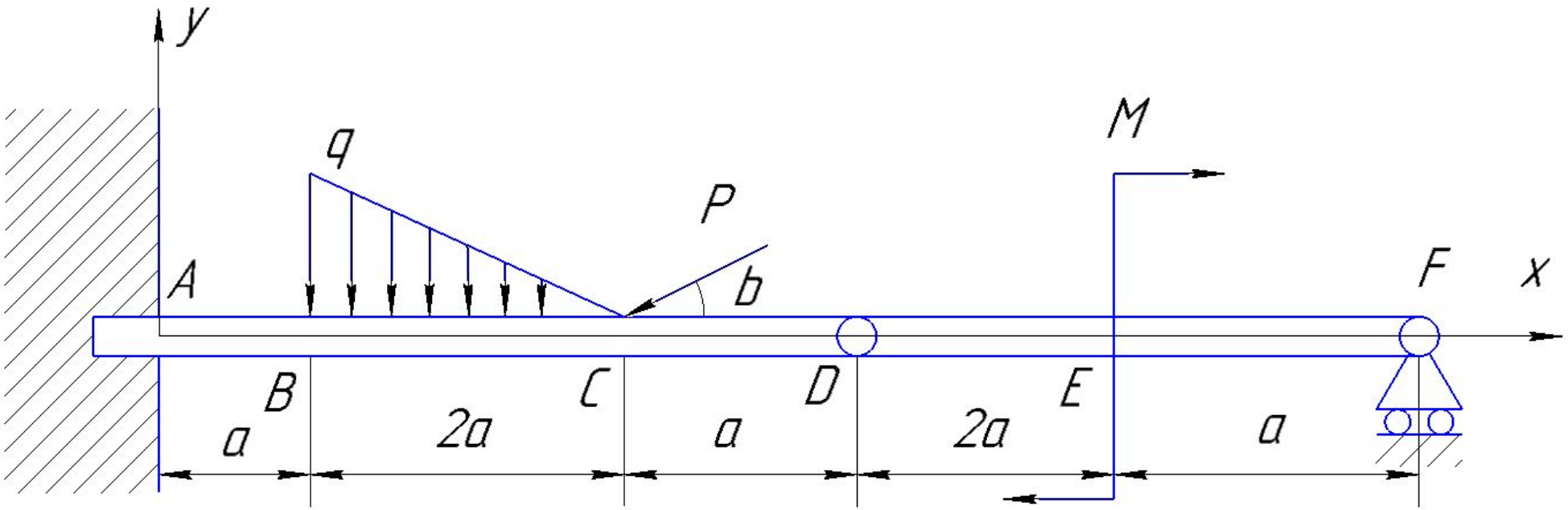
1. Визначаємо об’єкт рівноваги:



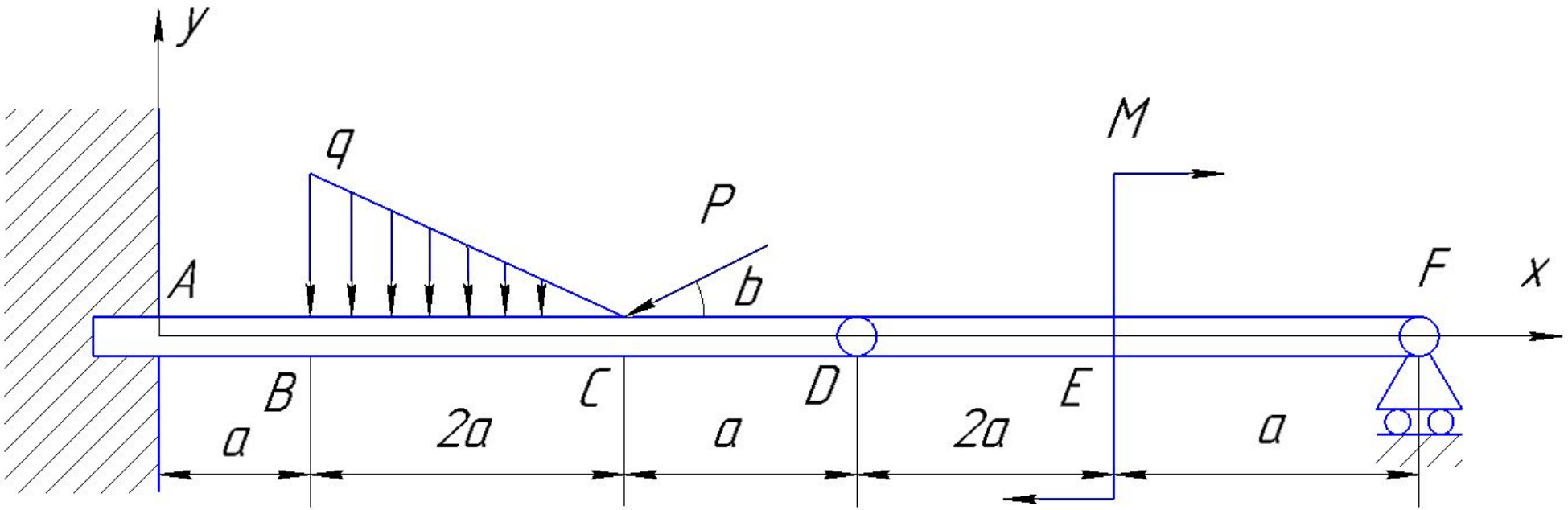
1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.



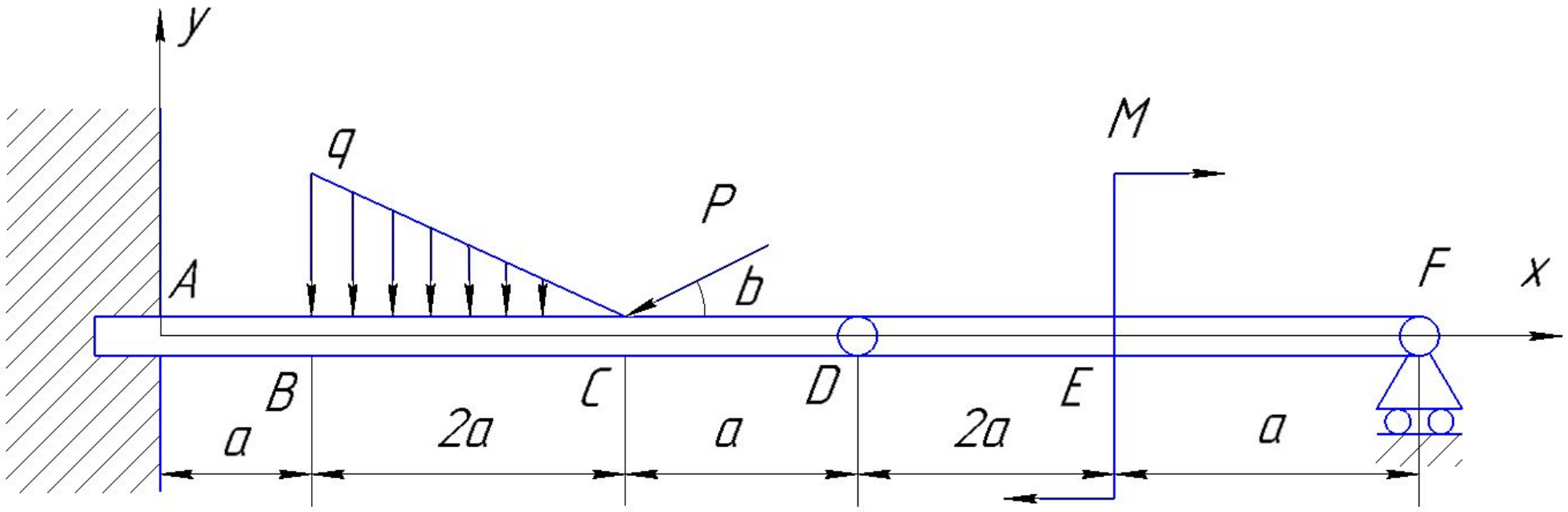
1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:



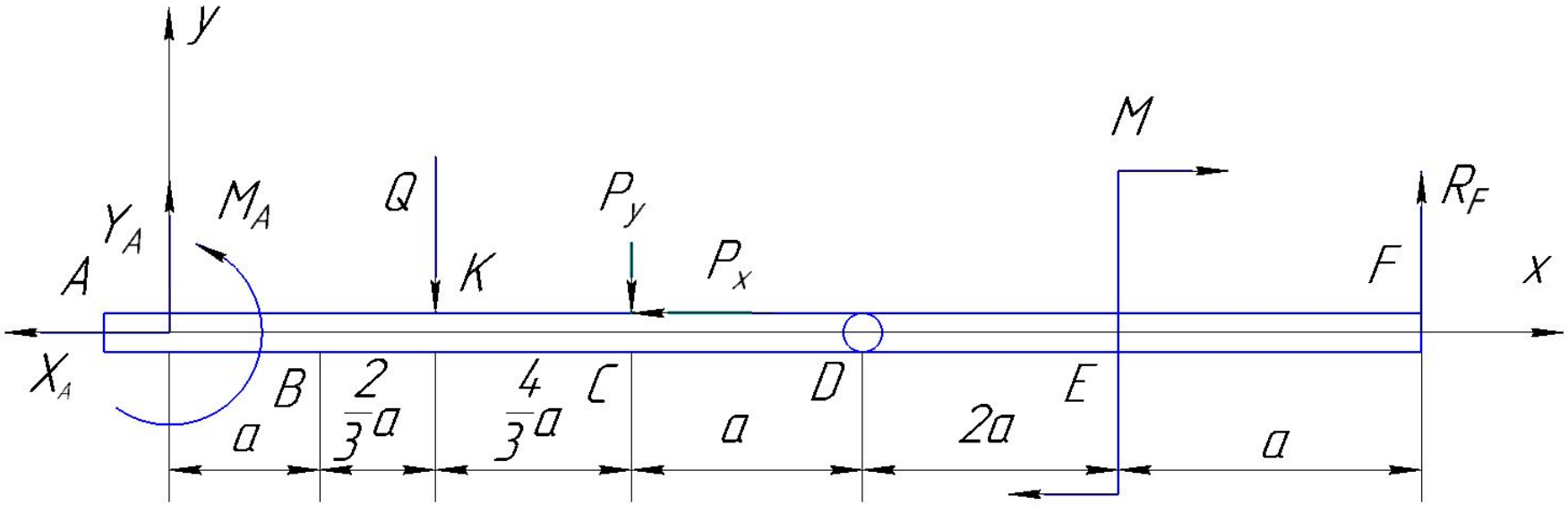
1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля: M, P, q.



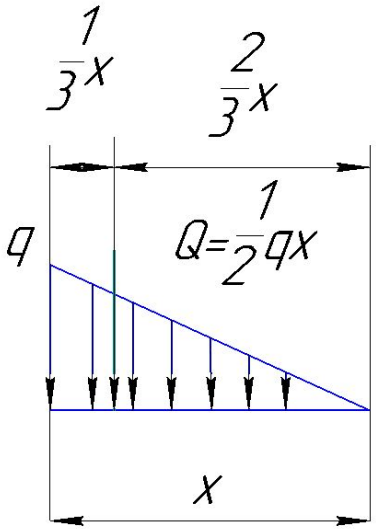
1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля: M, P, q.
3. Визначаємо в’язі та їх реакції:



1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля: M, P, q.
3. Визначаємо в’язі та їх реакції: защемлення - X_A, Y_A, M_A; шарнірно рухома опора - R_F.
4. Заміняємо в’язі їх реакціями та перебудовуємо розрахункову схему з активними силами, розкладаючи силу на вісі x та y, та визначаємо місце прикладання та величину Q.



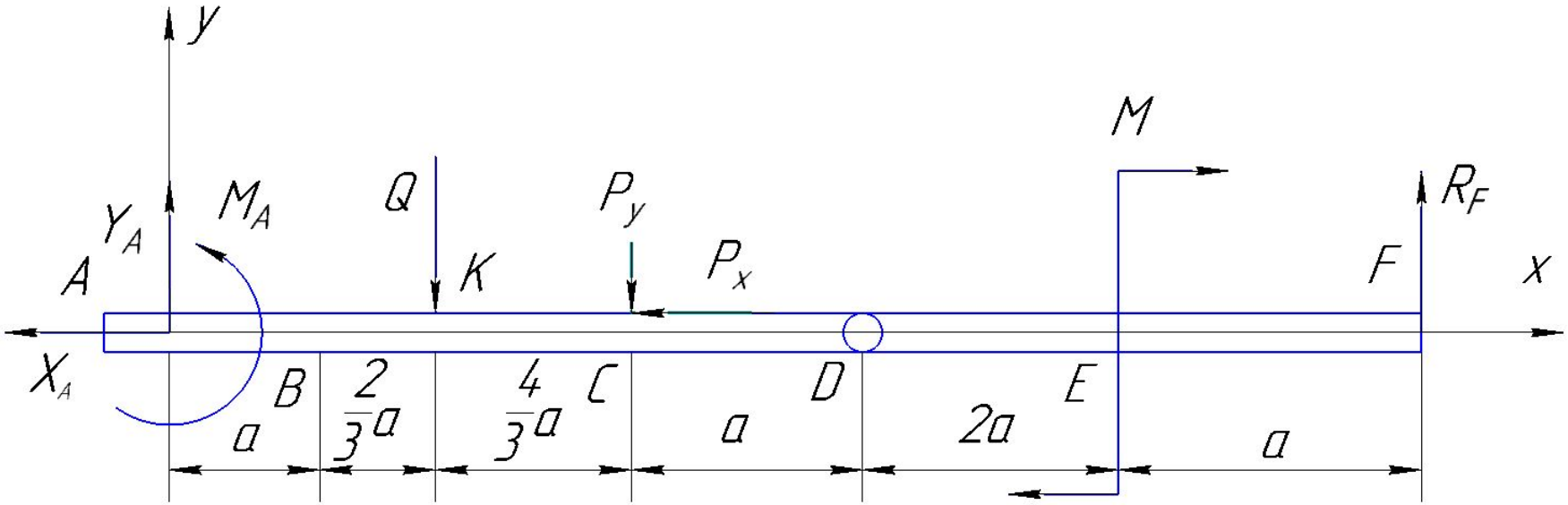
Складаємо рівняння рівноваги:



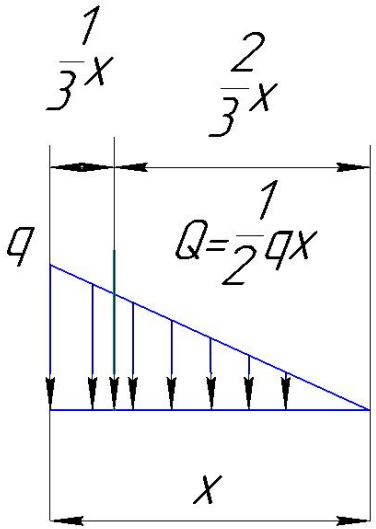
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) =$$



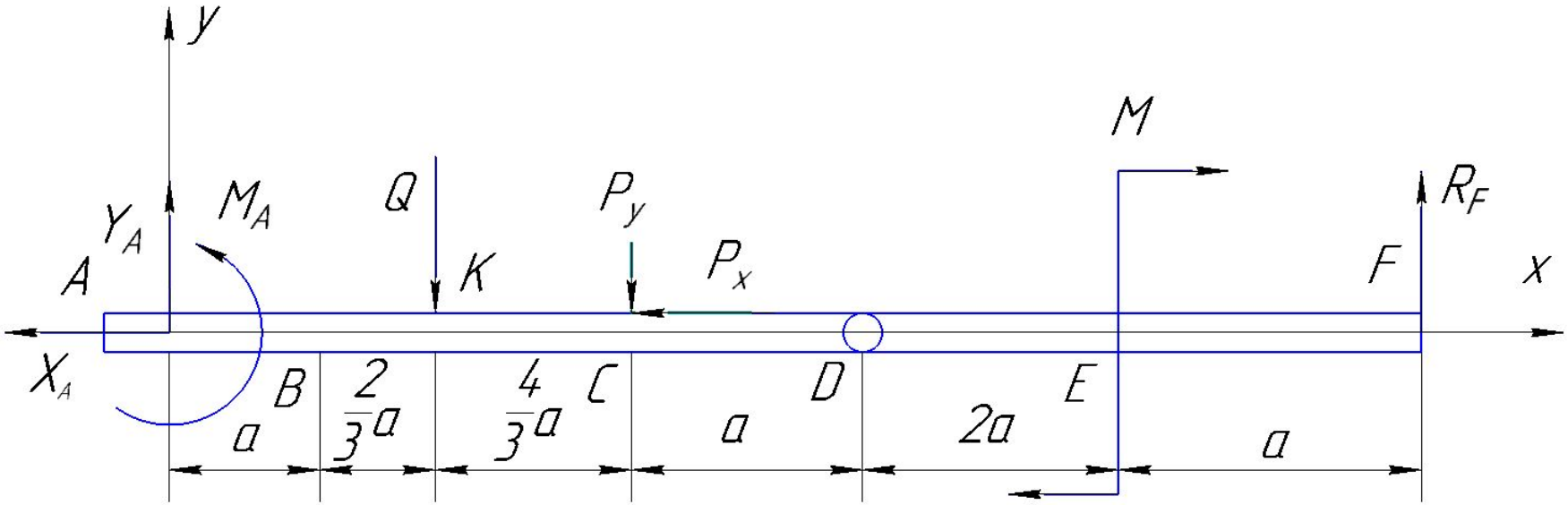
Складаємо рівняння рівноваги:



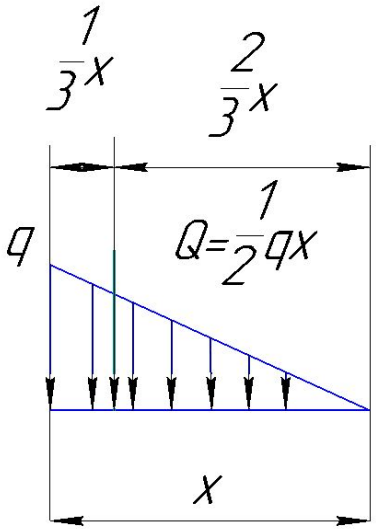
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) =$$



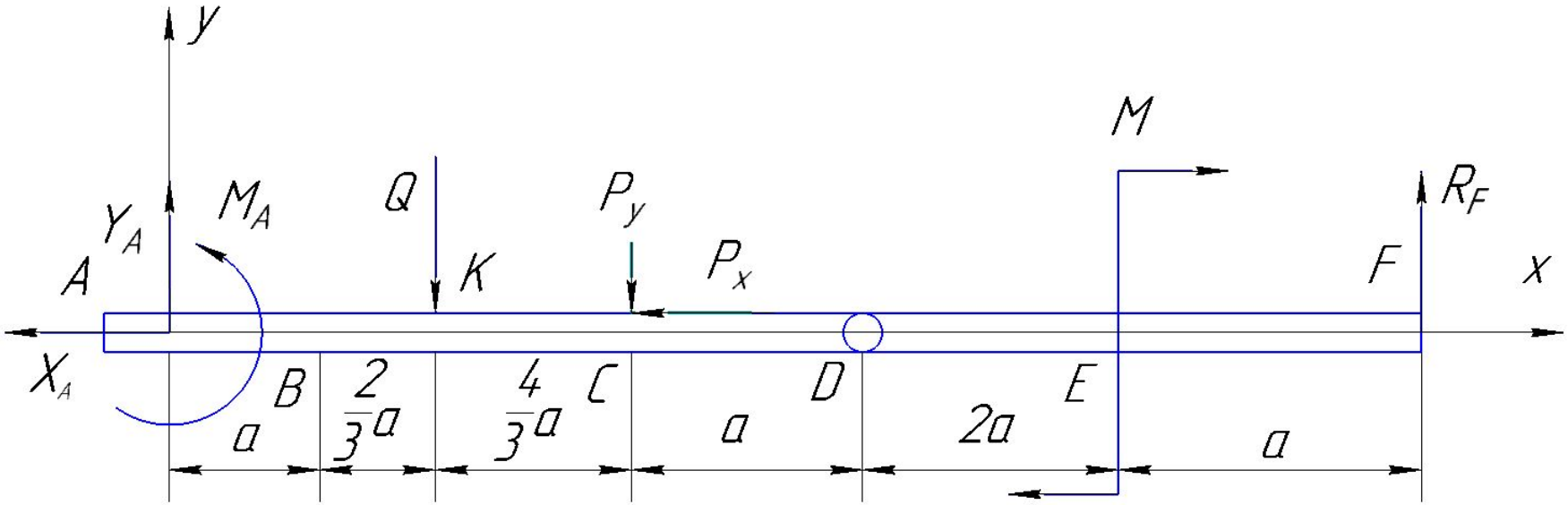
Складаємо рівняння рівноваги:



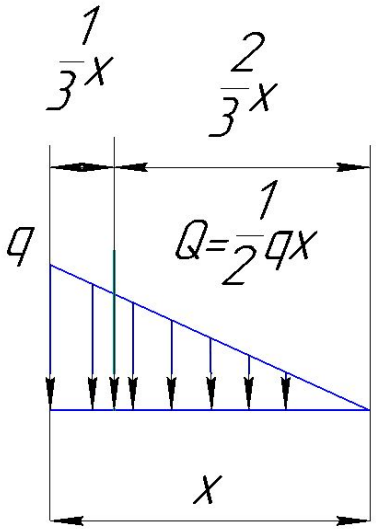
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) =$$



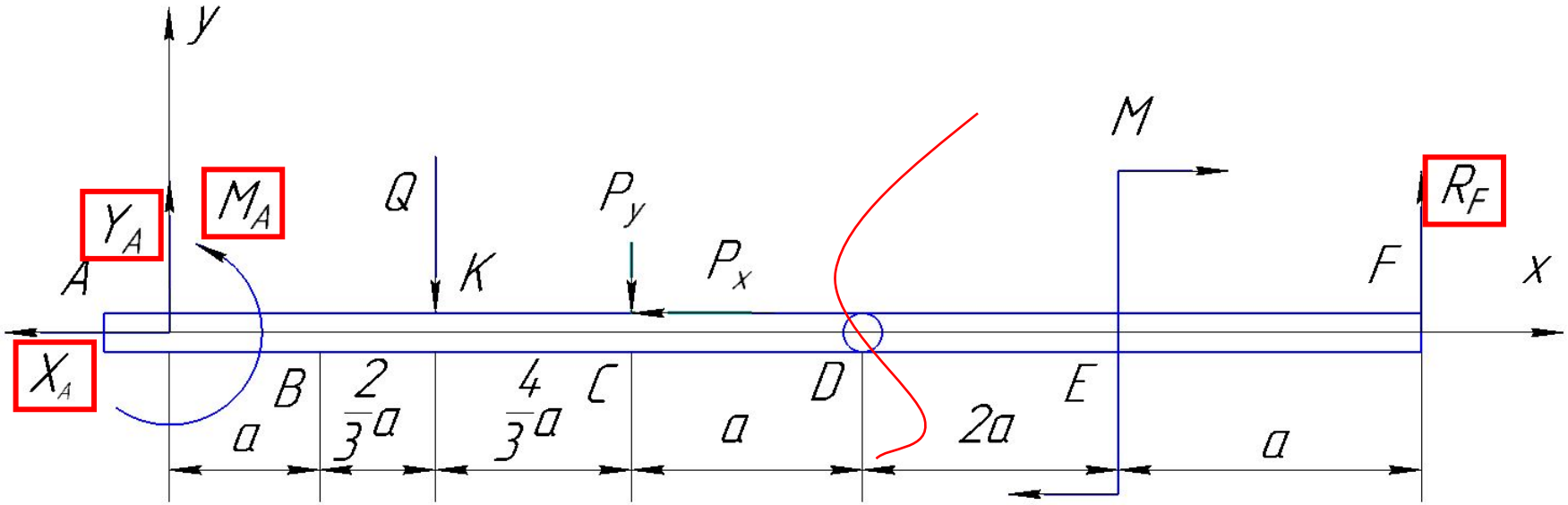
Складаємо рівняння рівноваги:



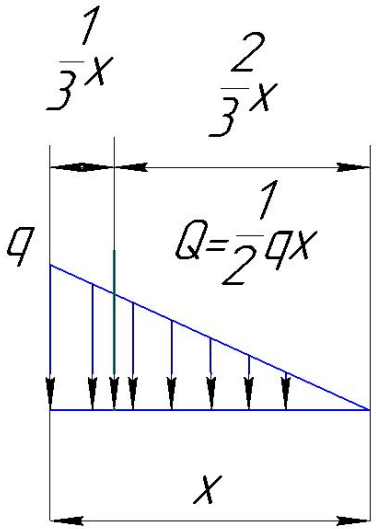
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0$$



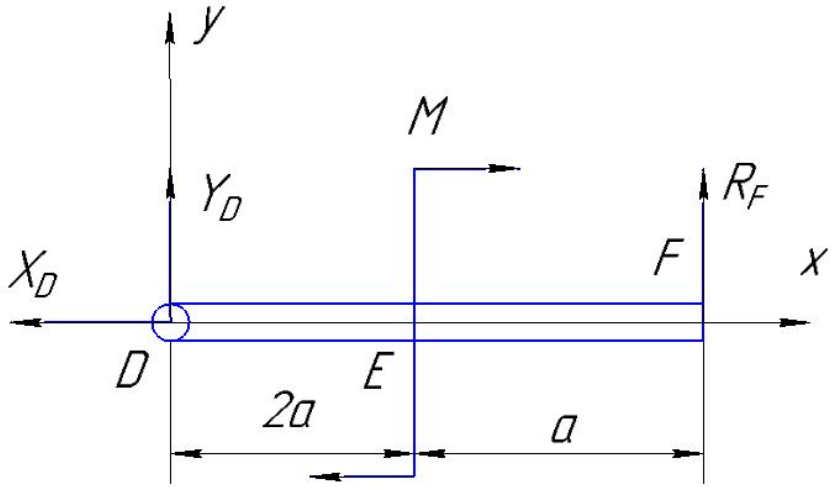
Складаємо рівняння рівноваги:



1 $$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_A - P_x = 0$$

2 $$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + R_F - Q - P_y = 0$$

3 $$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0$$

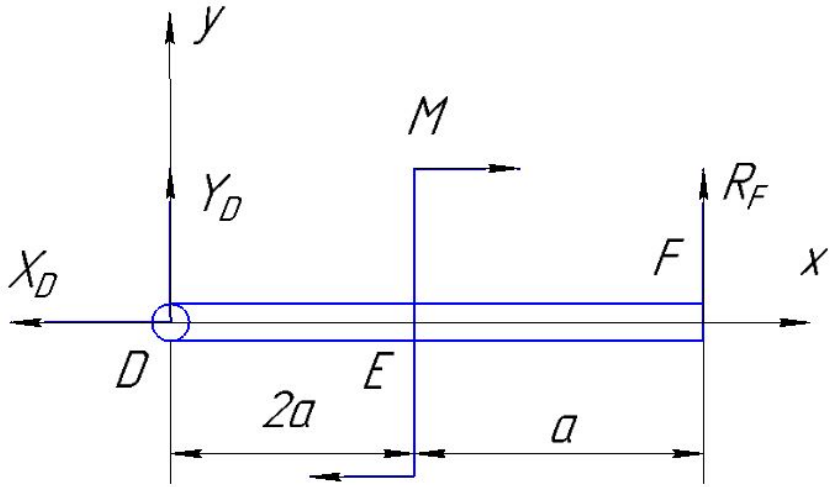


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

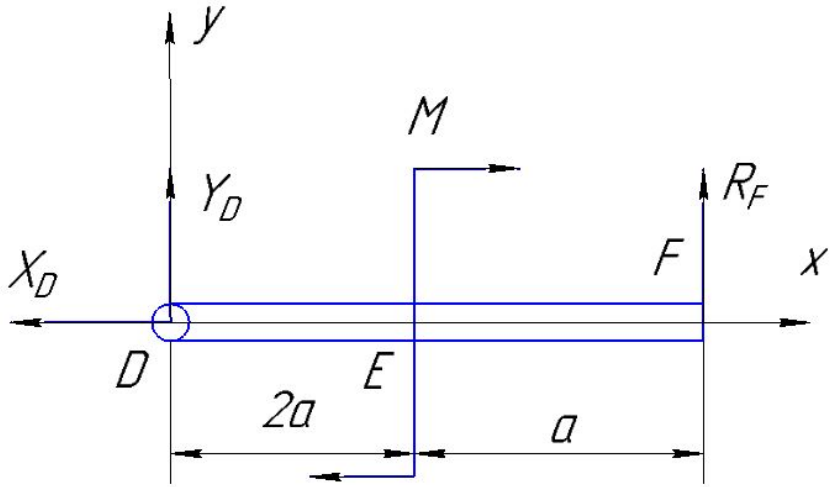


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

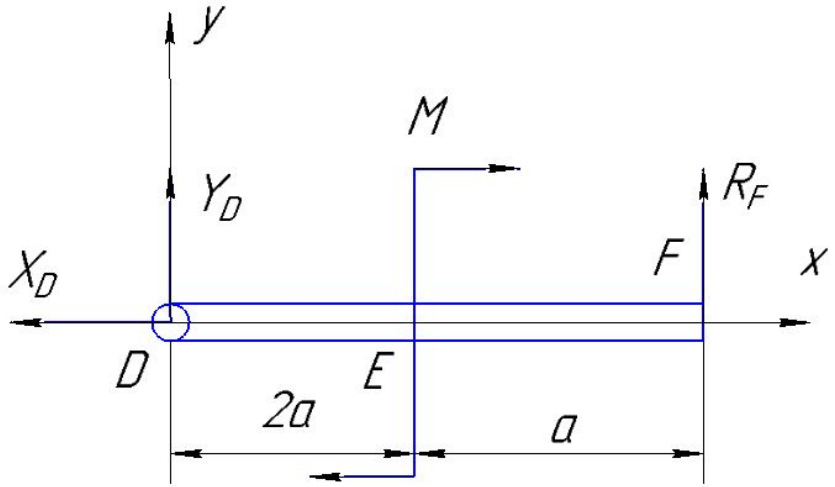


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

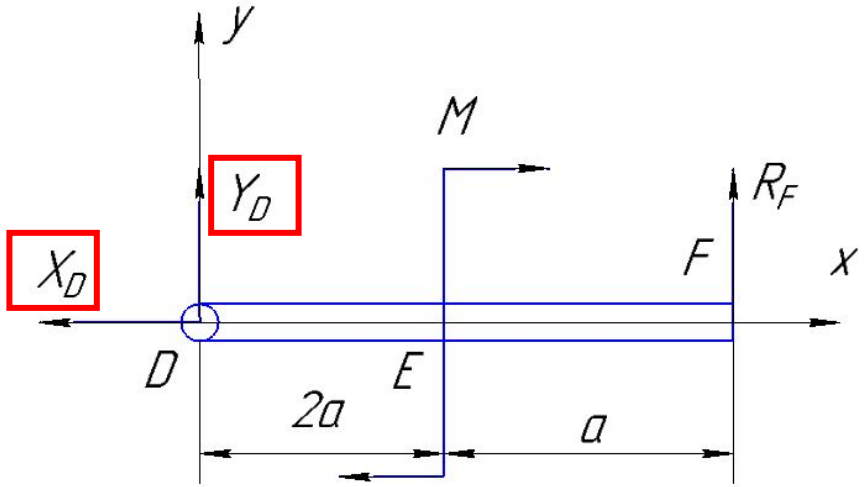


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = -M + R_F * 3a = 0$$



Складаємо рівняння рівноваги:

4 $$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D = 0$$

5 $$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D + R_F = 0$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = -M + R_F * 3a = 0$$

Дано:
q = 5 Н/м,
a = 2 м,
b = 30 °,
M = 4 Нм,
P = 11 Н

Знайти:
$R_A, M_A, R_D, R_F,$

Розв'язуємо систему рівнянь та знаходимо реакції

$$\begin{cases} -X_D = 0 \\ -X_A - P_x = 0 \\ -M + R_F * 3a = 0 \\ Y_D + R_F = 0 \\ Y_A + R_F - Q - P_y = 0 \\ M_A - M + R_F * 7a - Q * \frac{5}{3}a - P_y * 3a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_D = 0 \\ X_A = -Pcos(b) = -11 * cos(30\,°) = -9{,}53 \text{ Н} \\ R_F = \frac{M}{3a} = \frac{4}{3*2} = 0{,}67 \text{ Н} \\ Y_D = -R_F = -0{,}67 \text{ Н} \\ Y_A = -R_F + \frac{1}{2}q * 2a + Psin(b) = -0{,}67 + \underbrace{0{,}5 * 5 * 2 * 2}_{Q} + 11\sin(30\,°) = 14{,}83 \text{ Н} \\ M_A = M - R_F * 7a + Q * \frac{5}{3}a + P_y * 3a = 4 - 0{,}67 * 7 * 2 + 10 * \frac{10}{3} + 3 * 2 * 11 * \sin(30\,°) = 60{,}95 \text{ Нм} \end{cases}$$

Дано:
q = 5 Н/м,
a = 2 м,
b = 30 °,
M = 4 Нм,
P = 11 Н

$D_x = 0$

$X_A = -9{,}53$ Н

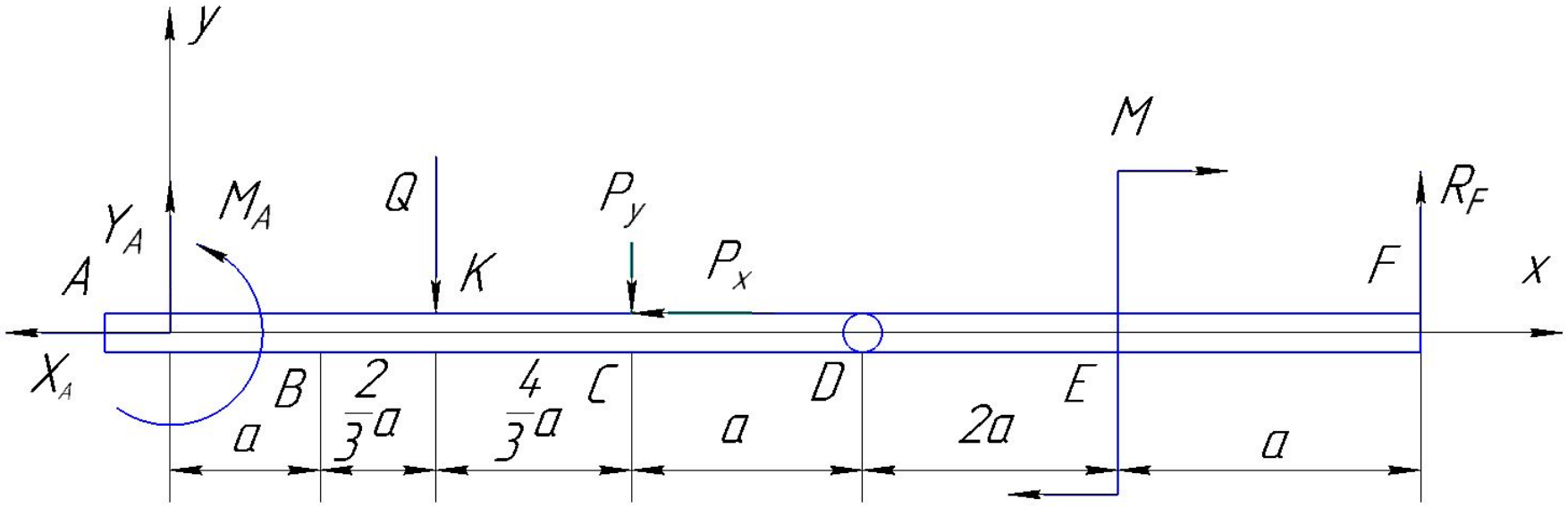
$R_F = 0{,}67$ Н

$D_y = -0{,}67$ Н

$Y_A = 14{,}83$ Н

$M_A = 60{,}95$ Нм

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1}^{n} M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_F(\vec{F}_i) =$$

Дано:
q = 5 Н/м,
a = 2 м,
b = 30 °,
M = 4 Нм,
P = 11 Н

$D_x = 0$

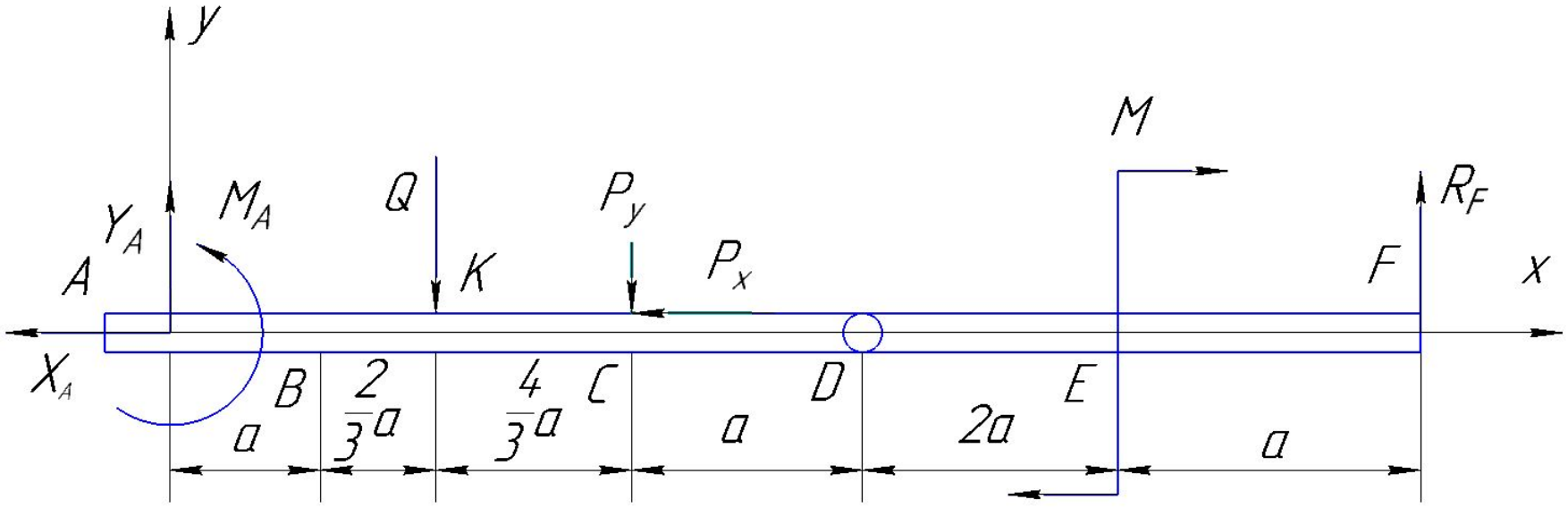
$X_A = -9{,}53$ Н

$R_F = 0{,}67$ Н

$D_y = -0{,}67$ Н

$Y_A = 14{,}83$ Н

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1}^{n} M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_F(\vec{F}_i) = -M + P_y * 4a + Q * 5\frac{1}{3}a - Y_A * 7a + M_A =$$

$$= -4 + 11 * 8 * \sin(30°) + 10 * \frac{32}{3} - 14{,}83 * 14 + 60{,}95 = -4 + 44 + 106{,}67 - 207{,}62 + 60{,}95 =$$

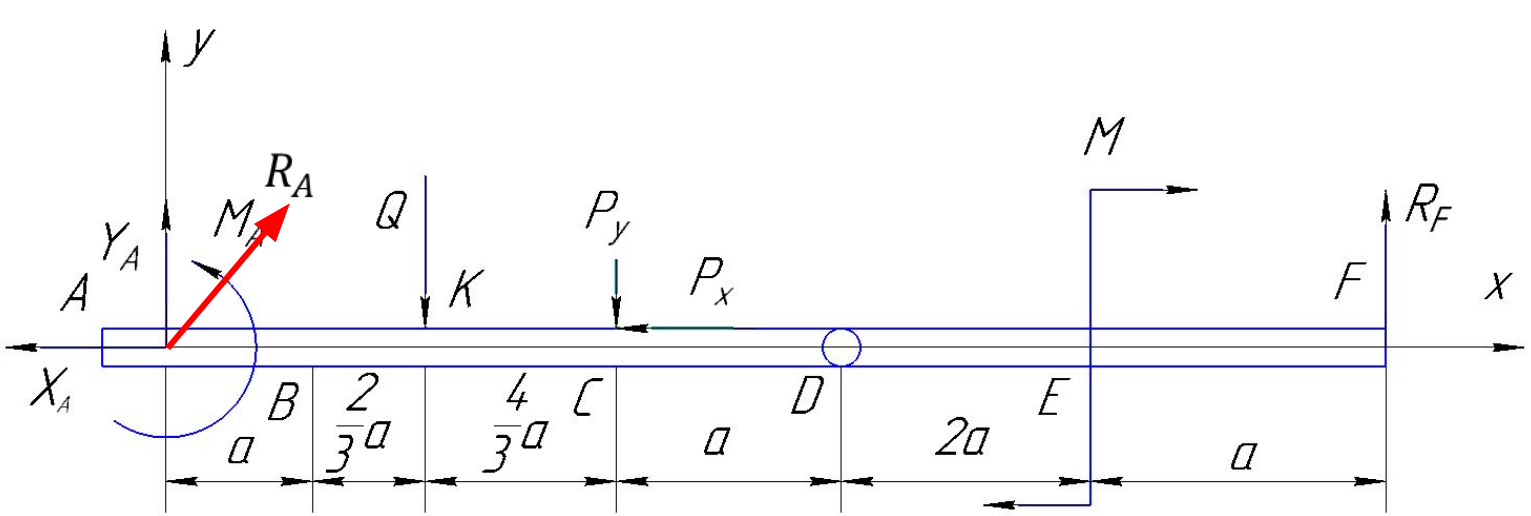
$$207{,}62 - 207{,}62 = 0$$

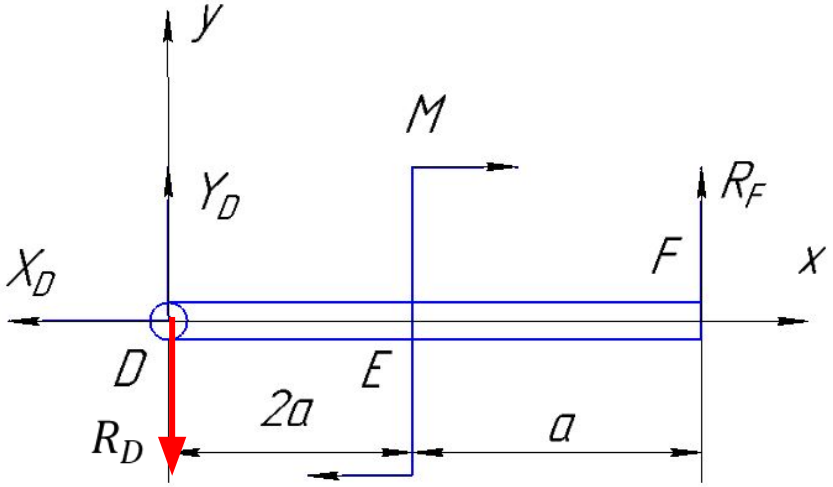
Знаходимо реакції в шарнірах та записуємо відповідь

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-9{,}53)^2 + 14{,}83^2} = 17{,}63 \text{ Н}$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{0^2 + (-0{,}67)^2} = 0{,}67 \text{ Н}$$

Відповідь: $R_D = 0{,}67\ H$, $R_A = 17{,}63$ Н, $R_F = 0{,}67$ Н, $M_A = 60{,}95$ Нм

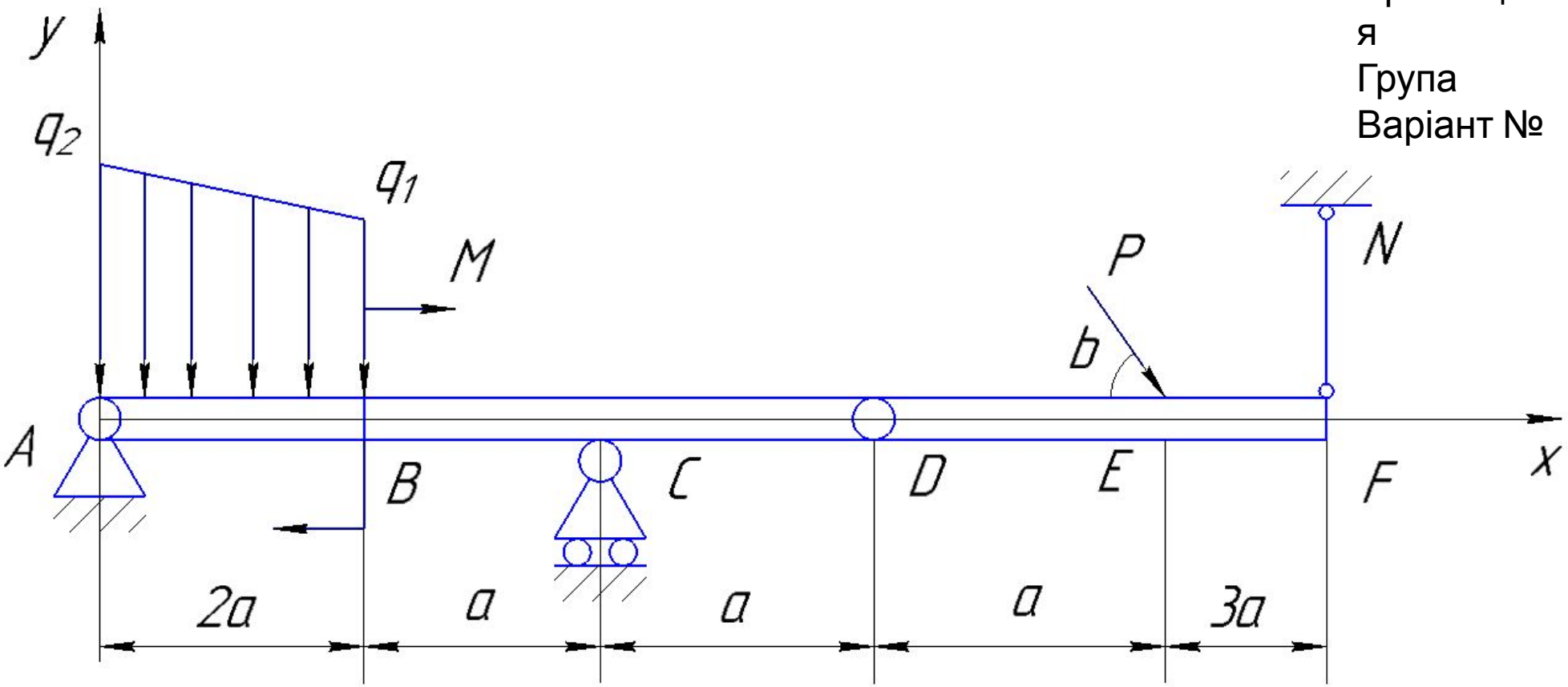


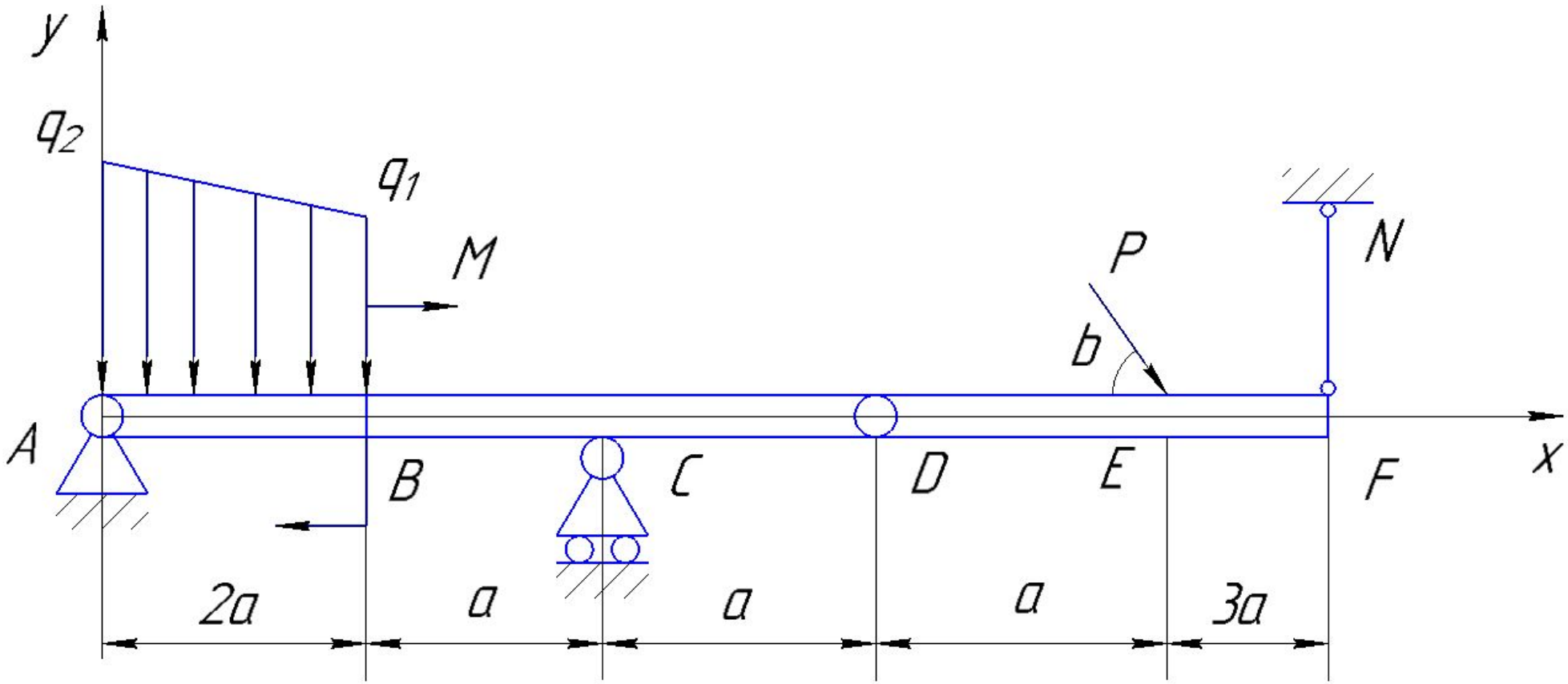


Прізвище Ім’я
Група
Варіант №

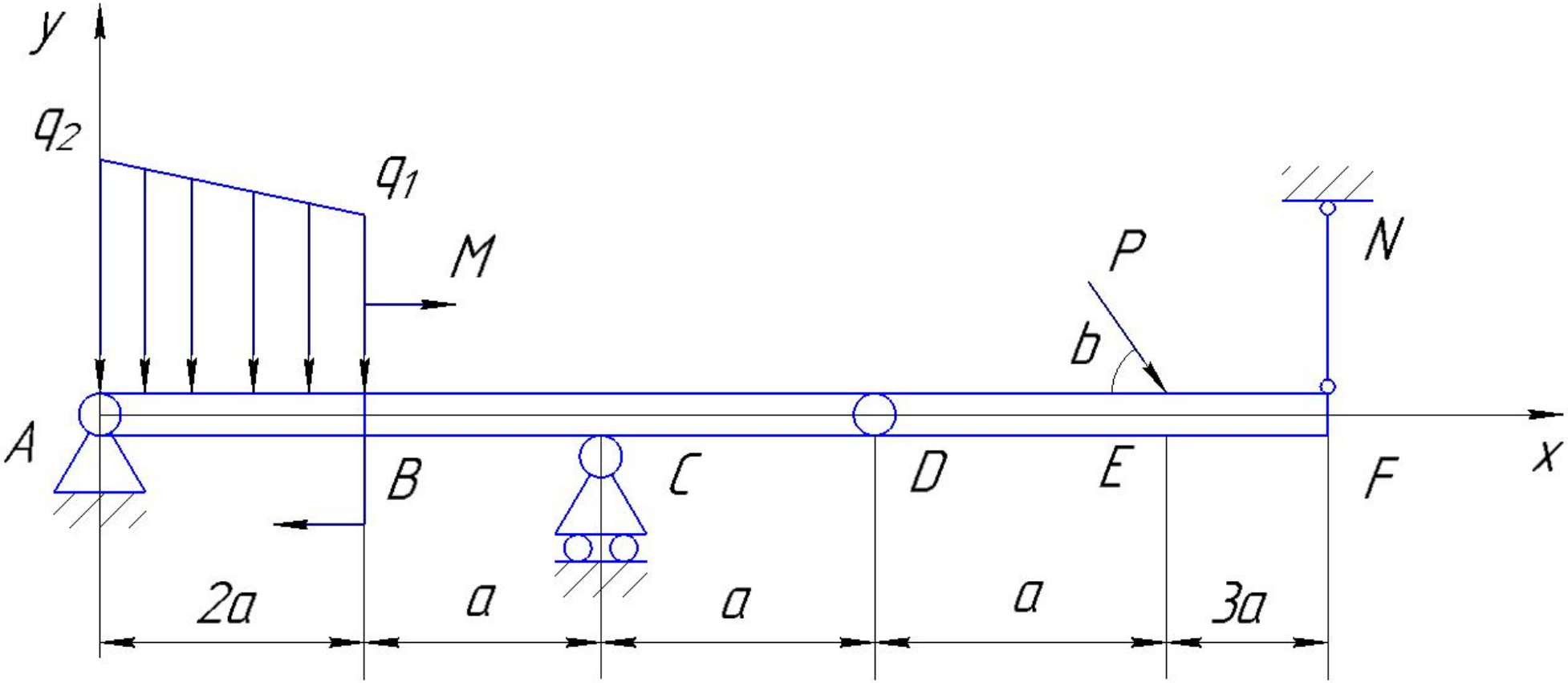
Дано:
q_1 = 3 Н/м,
q_2 = 4 Н/м,
a = 1 м,
b = 45 °,
M = 3 Нм,
P = 10 Н

Знайти:
$R_A, R_D, R_C, R_F,$

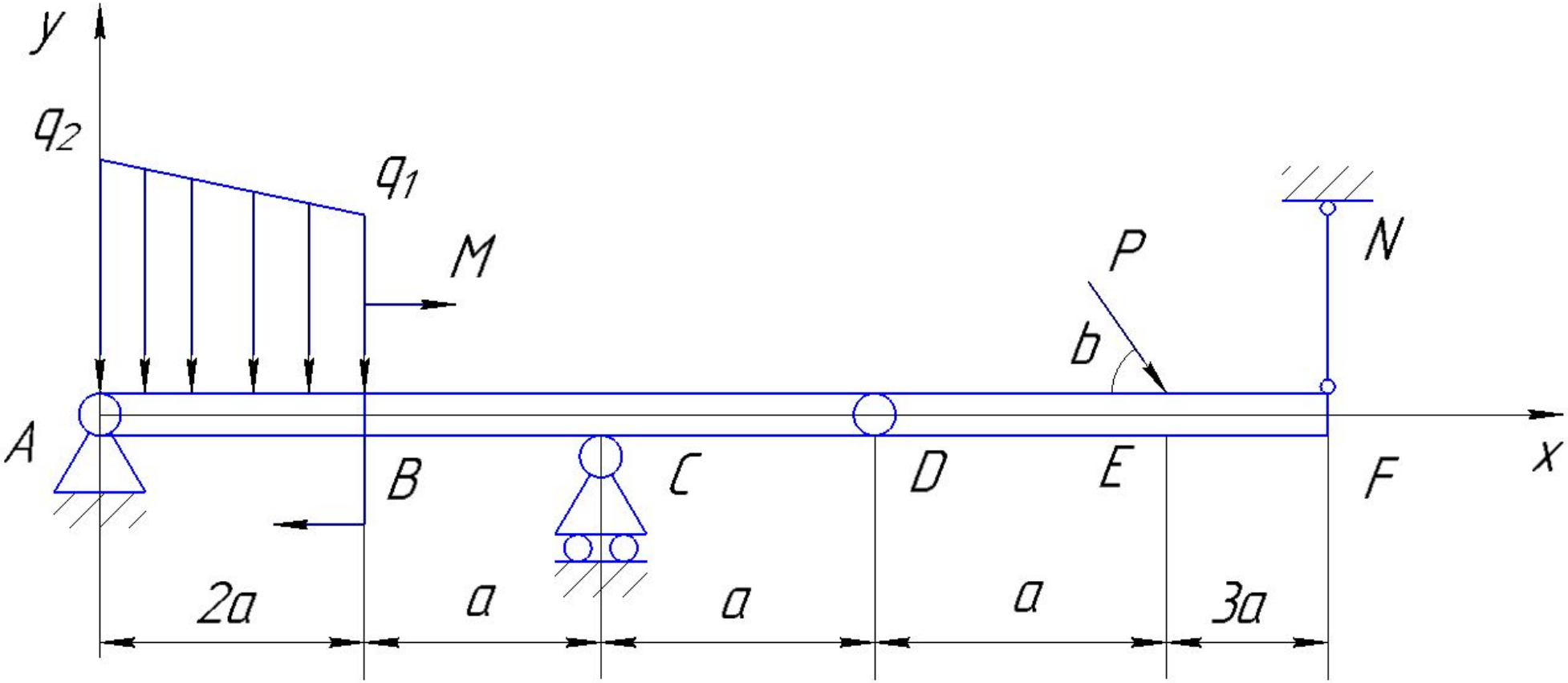




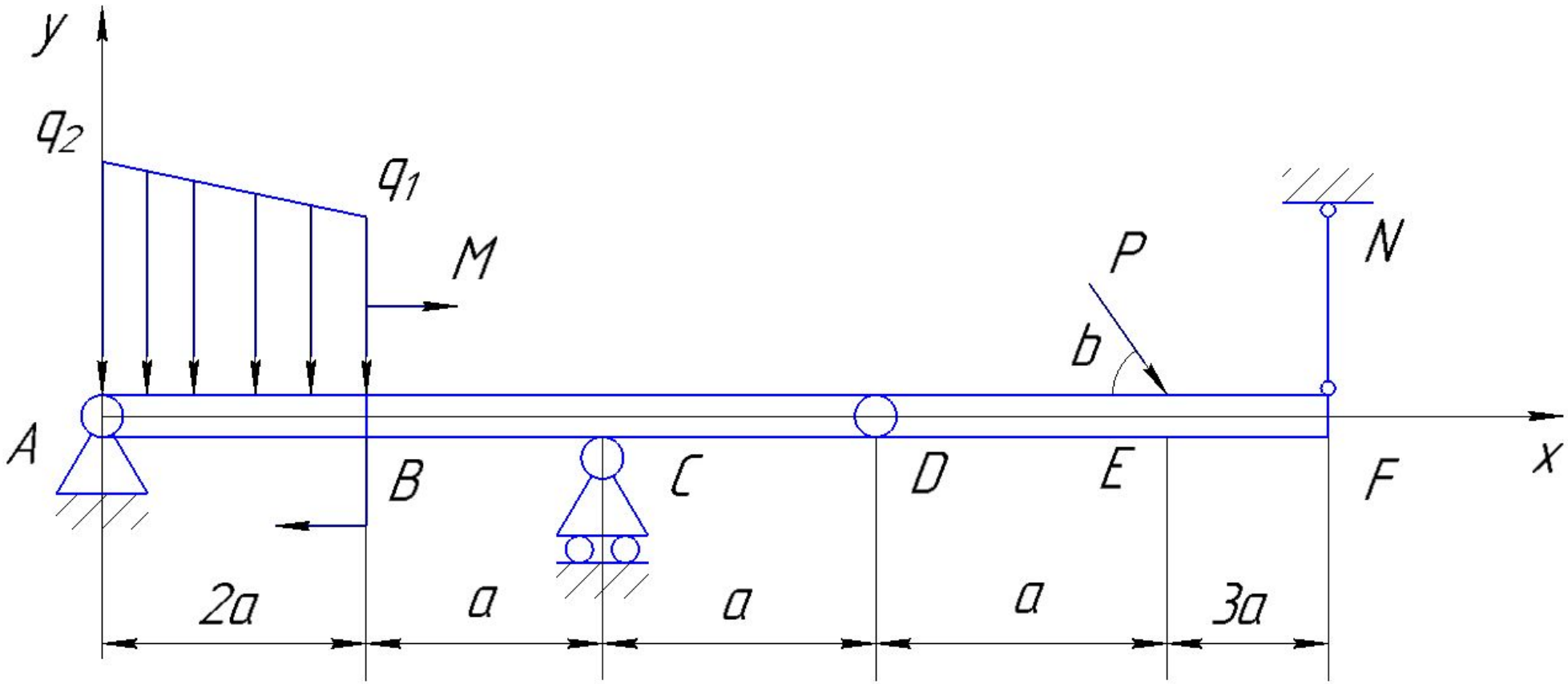
1. Визначаємо об’єкт рівноваги:



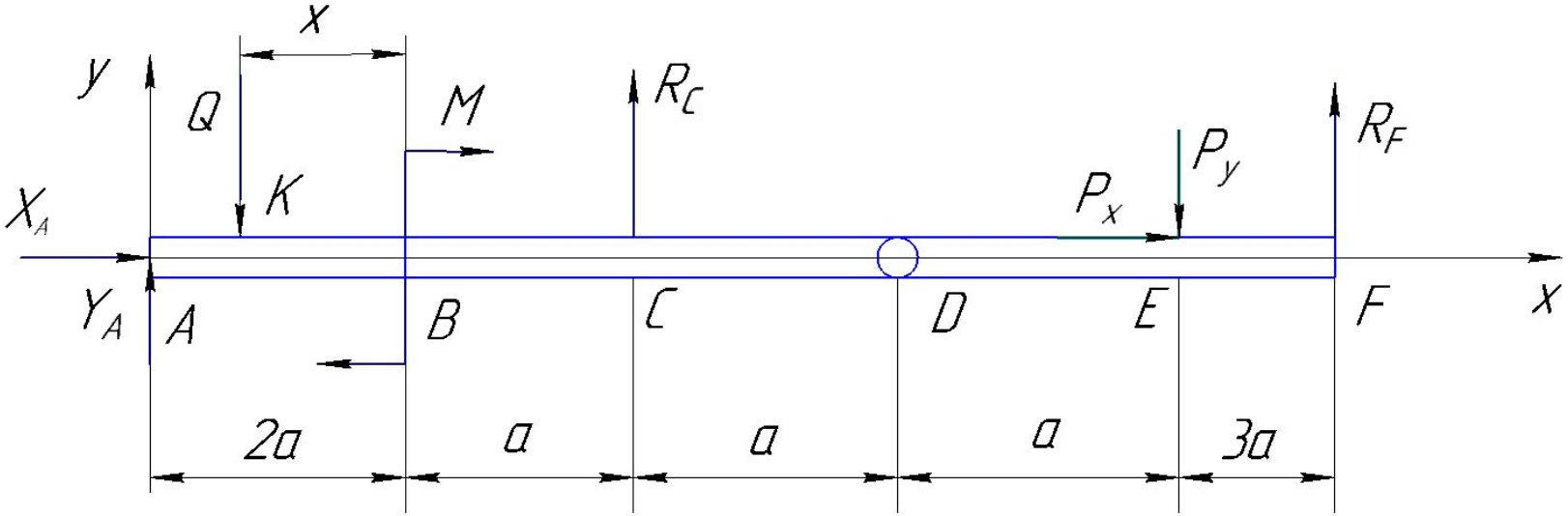
1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля:

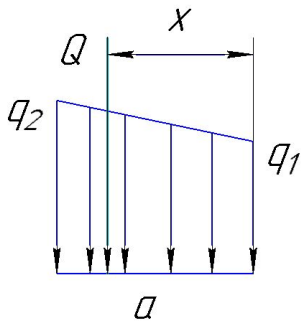


1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля: M, P, q.
3. Визначаємо в’язі та їх реакції:



1. Визначаємо об’єкт рівноваги: складена балка.
2. Визначаємо активні зусилля: M, P, q.
3. Визначаємо в’язі та їх реакції: шарнірно нерухома опора - X_A, Y_A;
шарнірно рухома опора - R_C, підвіс - R_F.
4. Заміняємо в’язі їх реакціями та перебудовуємо розрахункову схему з активними силами, розкладаючи силу на вісі x та y, та визначаємо місце прикладання та величину Q.





$$x=\frac{a}{3}\frac{2q_2+q_1}{q_1+q_2}$$

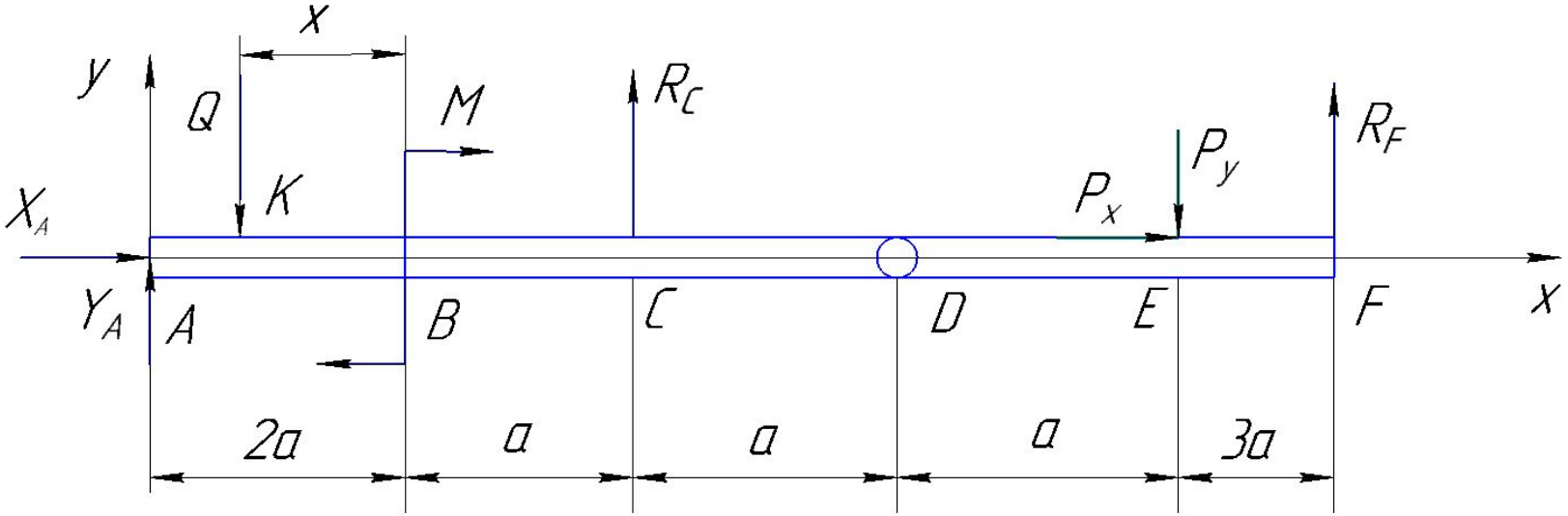
$$Q=\frac{q_1+q_2}{2}a$$

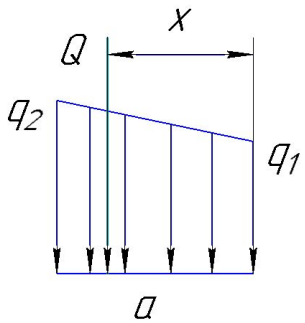
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) =$$





$$x=\frac{a}{3}\frac{2q_2+q_1}{q_1+q_2}$$

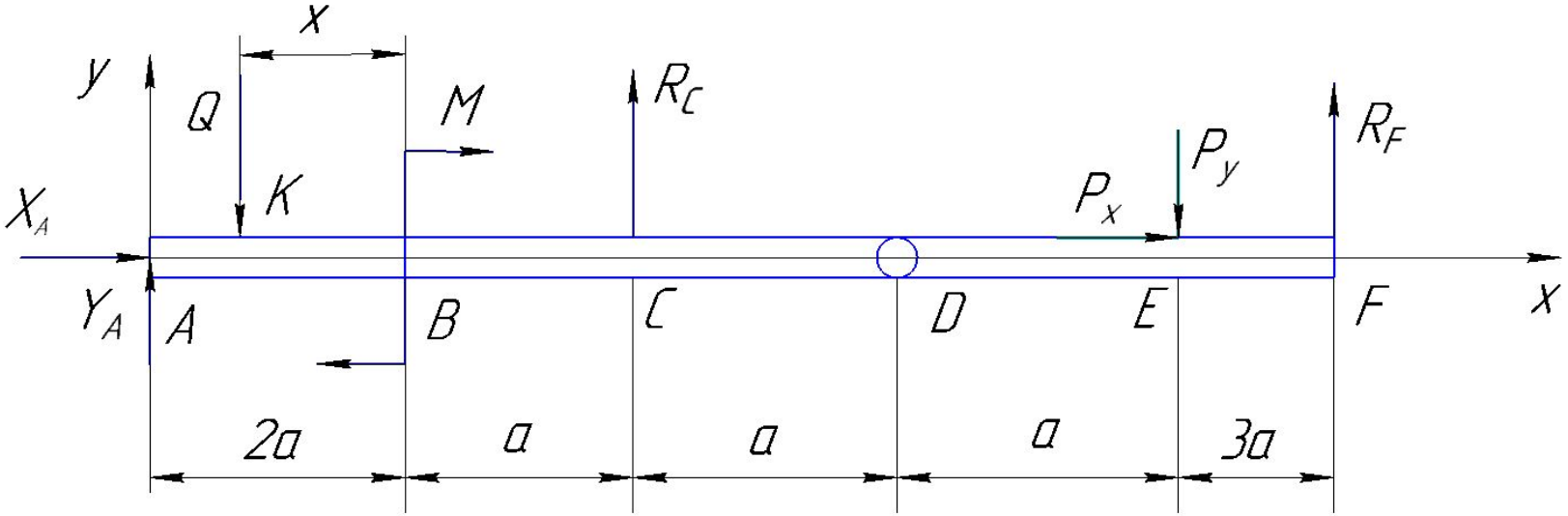
$$Q=\frac{q_1+q_2}{2}a$$

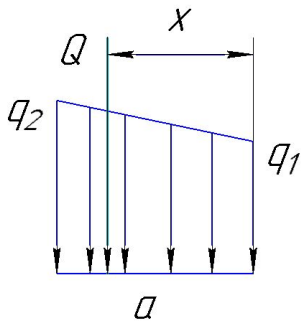
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=X_A+P_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=$$





$$x=\frac{a}{3}\frac{2q_2+q_1}{q_1+q_2}$$

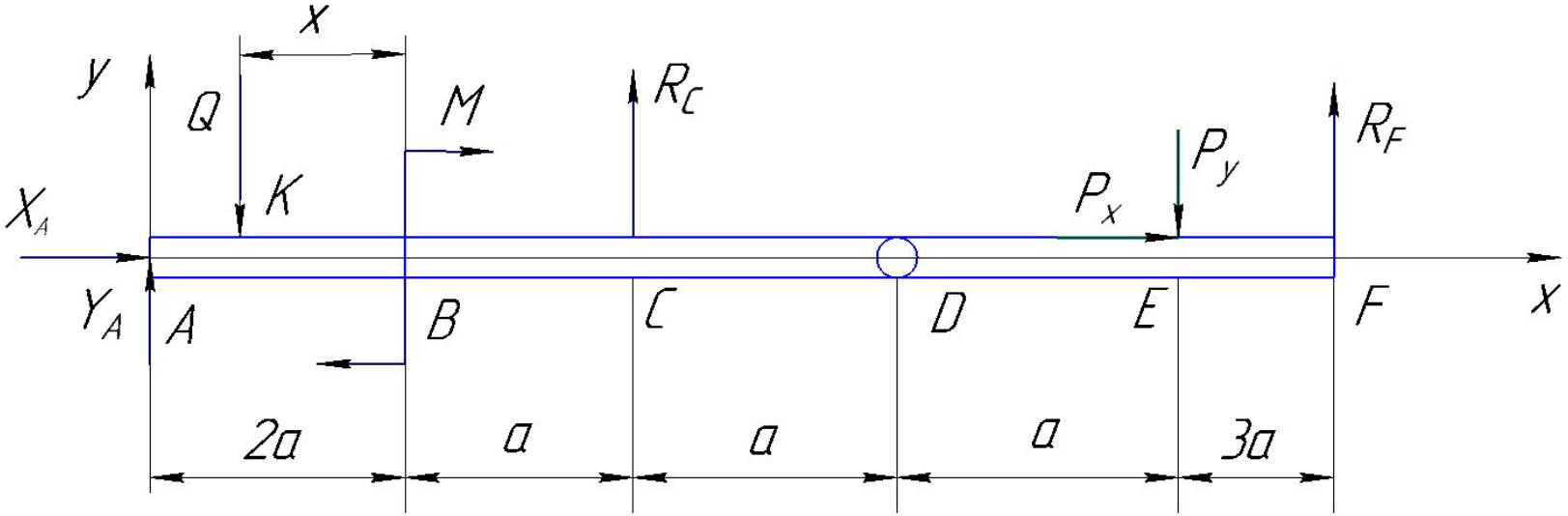
$$Q=\frac{q_1+q_2}{2}a$$

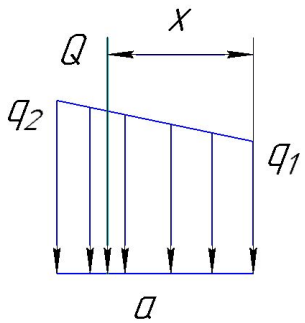
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=X_A+P_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=Y_A-Q+R_C-P_y+R_F=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=$$





$$x=\frac{a}{3}\frac{2q_2+q_1}{q_1+q_2}$$

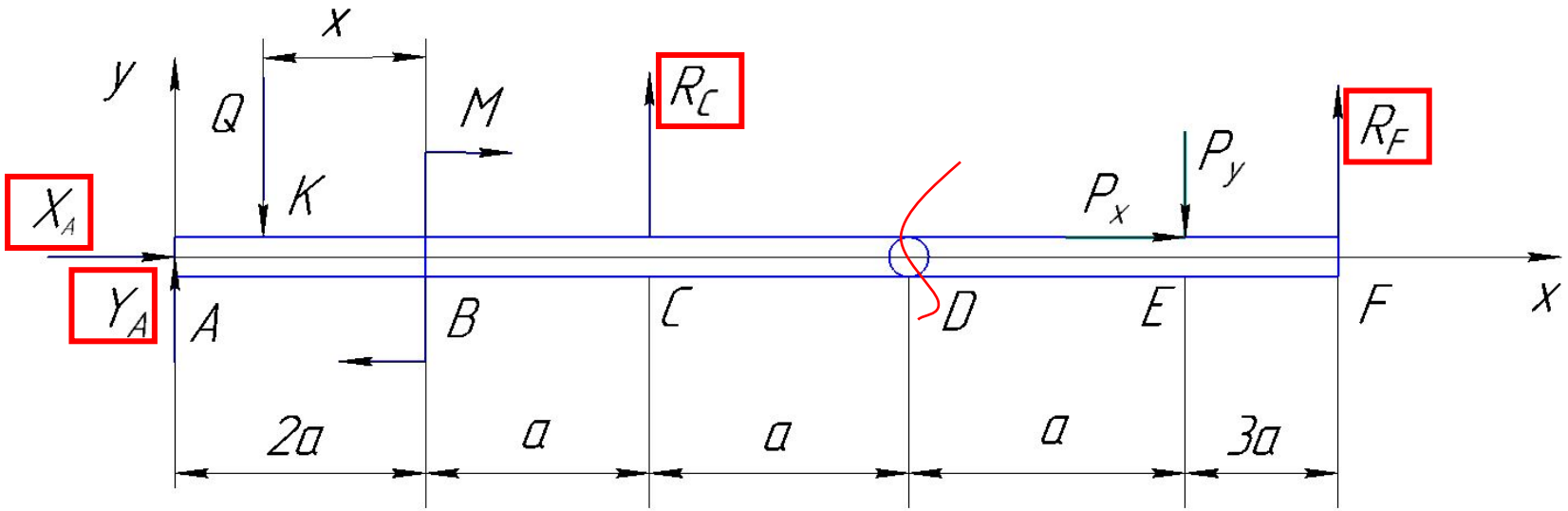
$$Q=\frac{q_1+q_2}{2}a$$

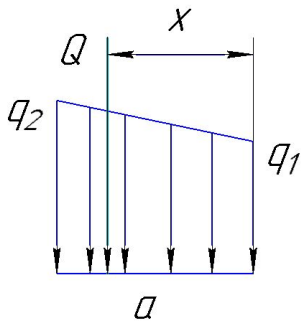
Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=X_A+P_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=Y_A-Q+R_C-P_y+R_F=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=-Q*(2a-x)-M+R_C*3a-P_y*5a+R_F*8a=0$$





$$x=\frac{a}{3}\frac{2q_2+q_1}{q_1+q_2}$$

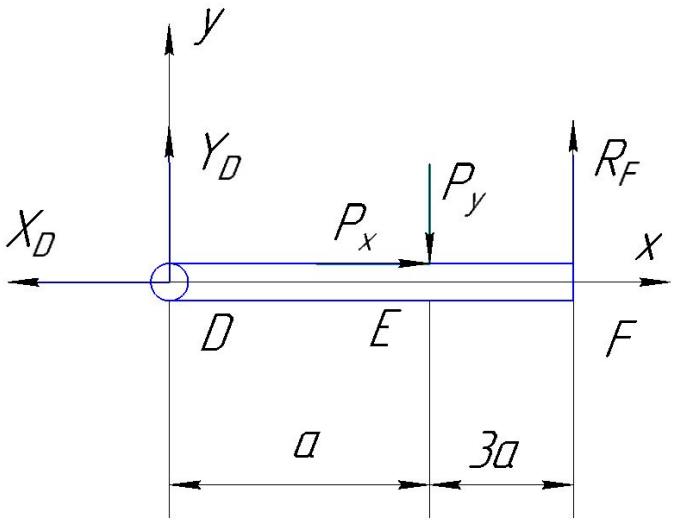
$$Q=\frac{q_1+q_2}{2}a$$

Складаємо рівняння рівноваги:

1 $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=X_A+P_x=0$

2 $\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=Y_A-Q+R_C-P_y+R_F=0$

3 $\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i)=-Q*(2a-x)-M+R_C*3a-P_y*5a+R_F*8a=0$

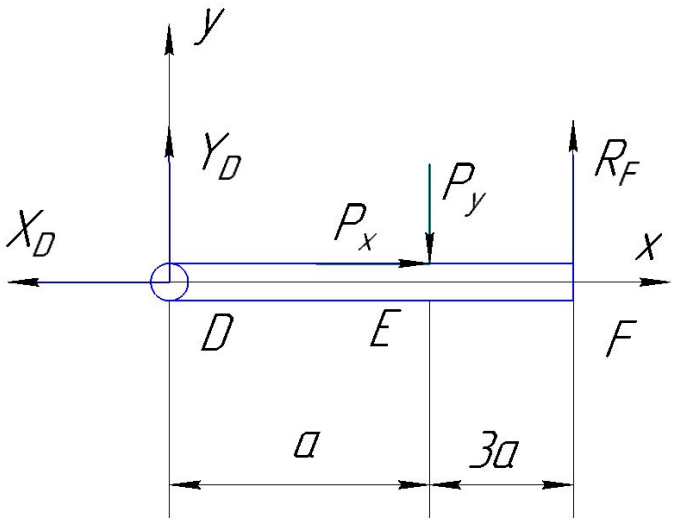


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

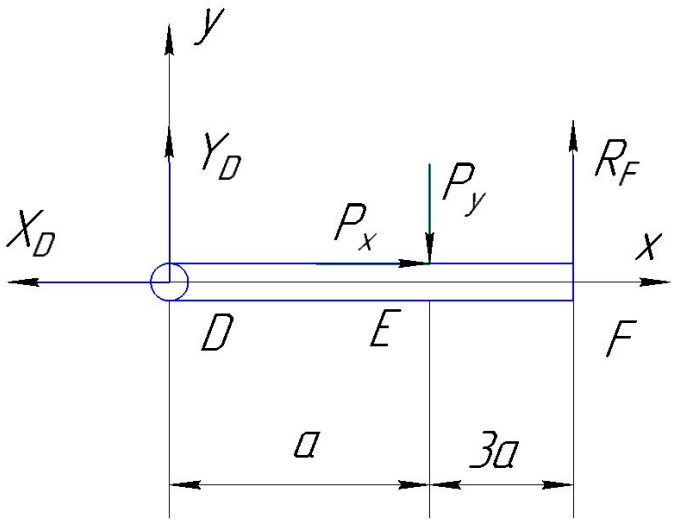


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

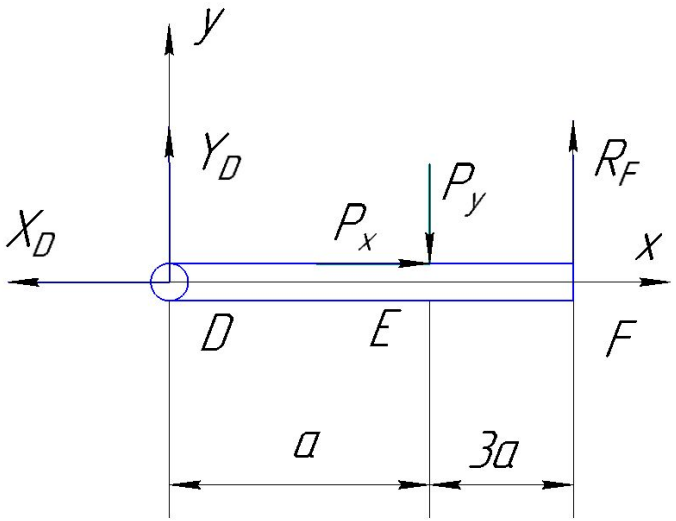


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) =$$

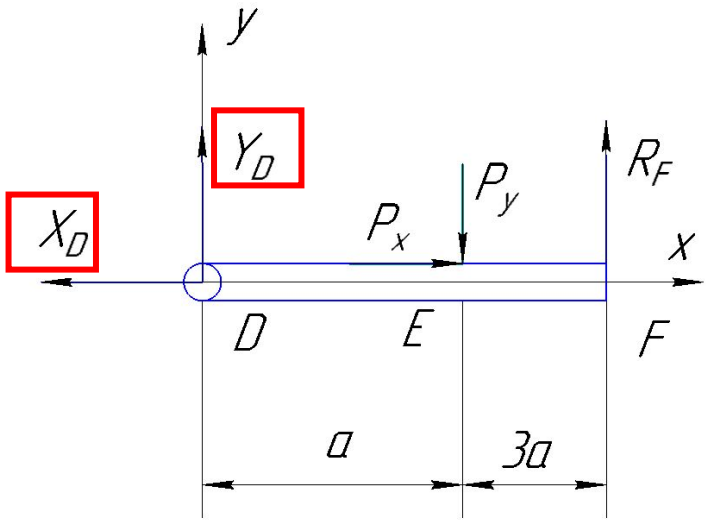


Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = -P_y * a + R_F * 4a = 0$$



Складаємо рівняння рівноваги:

4 $$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -X_D + P_x = 0$$

5 $$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_D - P_y + R_F = 0$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_D(\vec{F}_i) = -P_y * a + R_F * 4a = 0$$

Розв’язуємо систему рівнянь та знаходимо реакції

Дано:
q_1 = 3 Н/м,
q_2 = 4 Н/м,
a = 1 м,
b = 45 °,
M = 3 Нм,
P = 10 Н

$$\begin{cases} X_A + P_x = 0 \\ -X_D + P_x = 0 \\ -P_y * a + R_F * 4a = 0 \\ Y_D - P_y + R_F = 0 \\ -Q * (2a - x) - M + R_C * 3a - P_y * 5a + R_F * 8a = 0 \\ Y_A - Q + R_C - P_y + R_F = 0 \end{cases}$$

$$Q = \frac{q_1+q_2}{2} * 2\text{a} = \frac{3+4}{2} * 2 * 1 = 7 \text{ Н}$$

$$x = \frac{a}{3}\frac{2q_2 + q_1}{q_2 + q_1} = \frac{1}{3}\frac{2 * 4 + 3}{4 + 3} = 0{,}52 \text{ м}$$

$$X_A = -Pcos(b) = -10 * cos(45\ °) = -7{,}07 \text{ Н}$$

$$X_D = Pcos(b) = 10 * cos(45\ °) = 7{,}07 \text{ Н}$$

$$R_F = \frac{Psin(b)}{4} = \frac{10 * sin(45\ °)}{4} = 1{,}77 \text{ Н}$$

$$Y_D = P_y - R_F = 10 * sin(45\ °) - 1{,}77 = 5{,}30 \text{ Н}$$

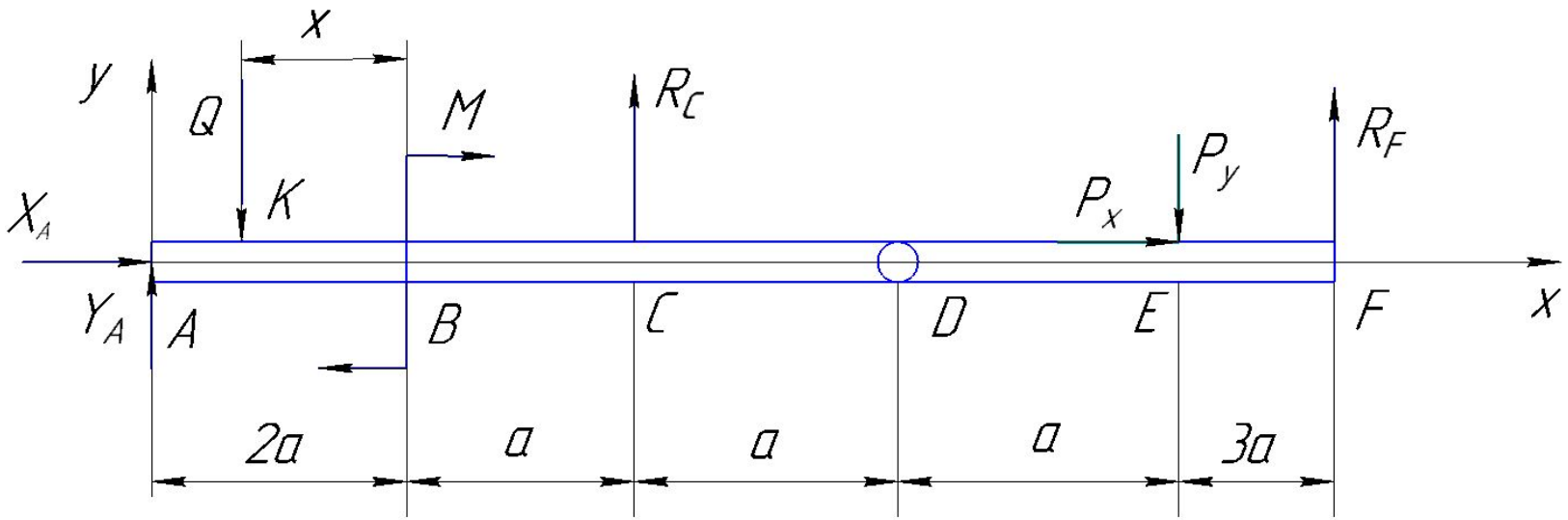
$$R_C = \frac{Q * (2a - x) + M + P_y * 5a - R_F * 8a}{3a} = \frac{7 * (2 - 0{,}52) + 3 + 10 * sin(45\ °) * 5 - 1{,}77 * 8}{3} = 11{,}52 \text{ Н}$$

$$Y_A = Q - R_C + P_y - R_F = 7 - 11{,}52 + 10 * sin(45\ °) - 1{,}77 = 0{,}78 \text{ Н}$$

Дано:
q_1 = 3 Н/м,
q_2 = 4 Н/м,
a = 1 м,
b = 45 °,
M = 3 Нм,
P = 10 Н

$X_A = -7{,}07$ Н
$X_D = 7{,}07$ Н
$R_F = 1{,}77$ Н
$Y_D = 5{,}30$ Н
$R_C = 11{,}52$ Н
$Y_A = 0{,}78$ Н
$Q = 7$ Н
$x = 0{,}52$ м

Робимо перевірку



$$\sum_{i=1} M_F(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_F(\vec{F}_i) = -Y_A * 8a + Q * (6a + x) - M - R_C * 5a + P*\sin(b)*3a =$$

$$= -0{,}78 * 8 + 7 * (6 + 0{,}52) - 3 - 11{,}37 * 5 + 10 * \sin(45\,°)*3 =$$

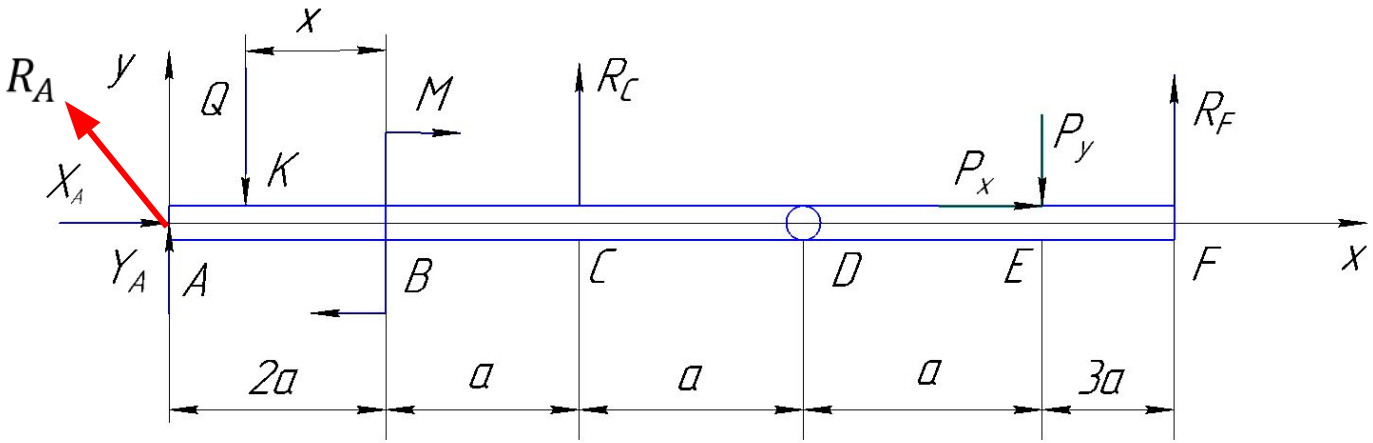
$$= -6{,}24 + 45{,}64 - 3 - 56{,}85 + 21{,}21 = 66{,}85 - 66{,}09 = 0$$

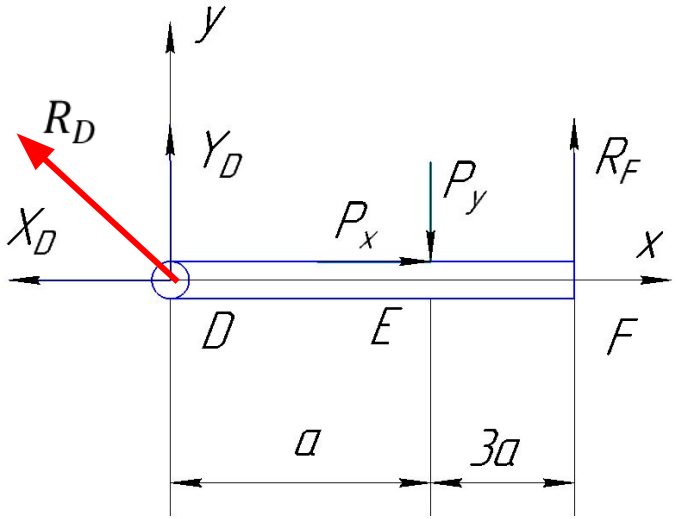
Знаходимо реакції в шарнірах та записуємо відповідь

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-7{,}07)^2 + 0{,}78^2} = 7{,}11 \text{ Н}$$

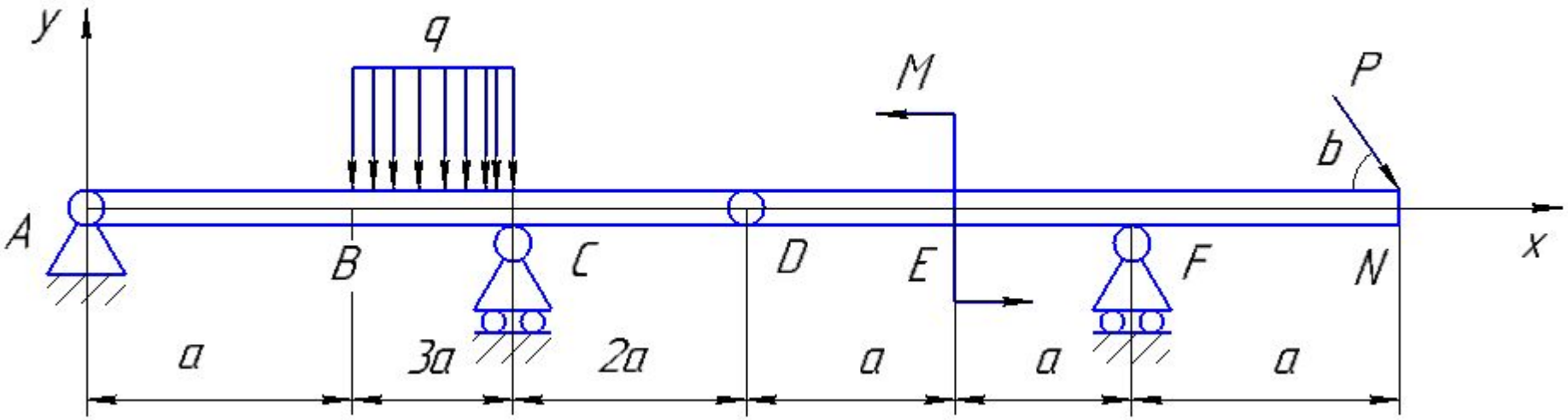
$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{7{,}07^2 + (5{,}30)^2} = 8{,}84 \text{ Н}$$

Відповідь: $R_D = 8{,}84\ H$, $R_A = 7{,}11$ Н, $R_F = 1{,}77$ Н, $R_C = 11{,}52$ Н





Домашнє завдання

Дано:
q = 2 Н/м,
a = 3 м,
b = 60 °,
M = 6 Нм,
P = 15 Н

Знайти:
$R_A, R_D, R_C, R_F,$