ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В РАЗЛИЧНЫХ НАУКАХ.

Выполнила: Коновалова А.С.
Студентка 1 курса
ГД.09.19.1.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В МАТЕМАТИКЕ.

Сведения из истории

Сведения из истории. Лозунгом многих математиков XVII в. был: «Двигайтесь вперёд, и вера в правильность результатов к вам придёт». Термин «производная» - (франц. derivee - позади, за) ввёл в 1797 г. Ж . Лагранж. Он же ввёл современные обозначения y ' , f ' Обозначение lim –сокращение латинского слова limes (межа, граница). Термин «предел» ввёл И. Ньютон. И. Ньютон называл производную флюксией, а саму функцию - флюентой. Г. Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную так:

Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) французский математик и механик


Нахождение производной называют дифференцированием
$(kx+b)'=k$
$(C)'=0$
$(x^2)'=2x$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$

Таблица производных

$f(x)$	$f\ (x)$	$f(x)$	$f\ (x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	ex	ex
$x2$	$2x$	ax	$ax\ \ln a$
xn	$nxn–1$	$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos 2x$
$1/x$	$– 1/x2$	$\mathrm{ctg}\, x$	$– 1/\sin 2x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$– \sin x$	$\log a\ x$	$1/(x \ln a)$

Правила нахождения производной

1. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их сумма u(x) + v(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v) = u + v$$

2. Если функция u(x) имеет в точке x производную и C – данное число, то функция C·u(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu) = C \cdot u$$

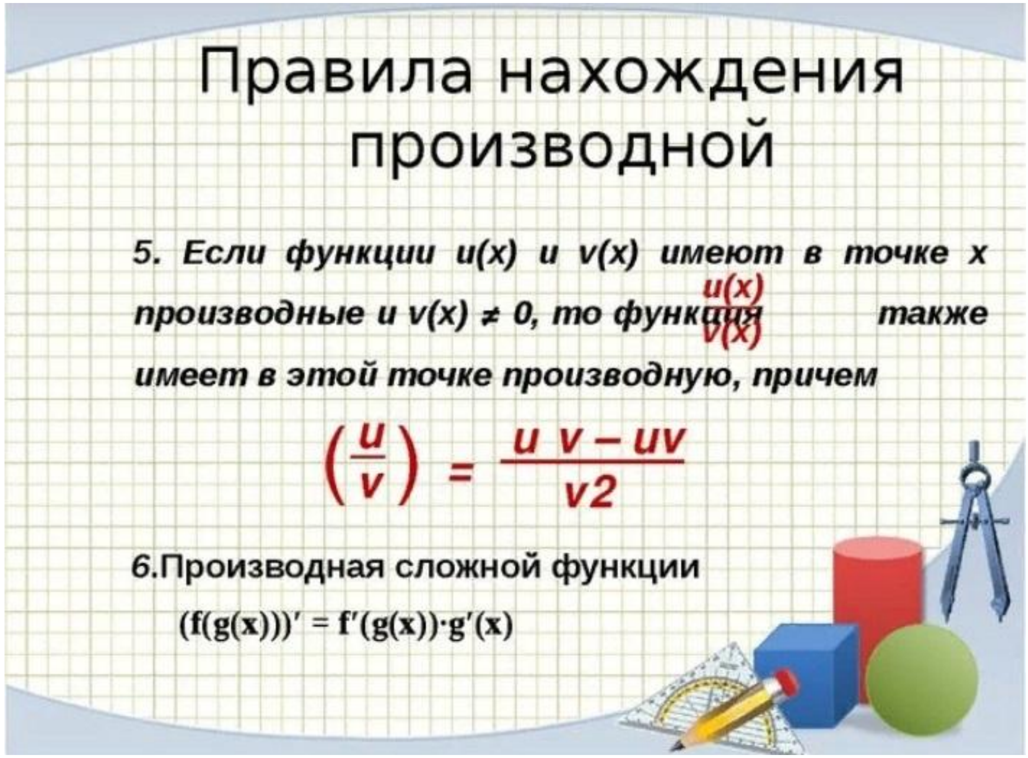
Правила нахождения производной

3. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их произведение u(x) · v(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v) = u \cdot v + u \cdot v$$

4. Если функция v(x) имеет в точке x производную и v(x) ≠ 0, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{v}{v2}$$


Правила нахождения производной
5. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные и v(x) ≠ 0, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем
$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\ v - uv}{v2}$
6.Производная сложной функции
$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Примеры

1) $g(x) = x^2 - 3x + 4$

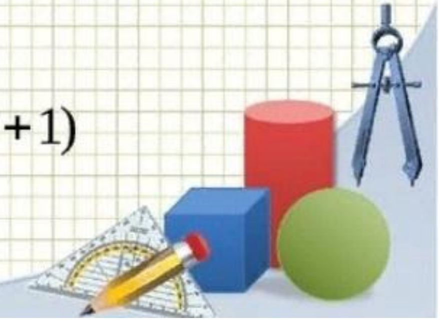
Ответ: $g'(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$

Ответ: $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

3) $h(x) = (2x+1)^2$

Ответ: $h'(x) = 4(2x+1)$



Примеры

4) $y = \sin 2x$

Ответ: $y' = 2\cos 2x$

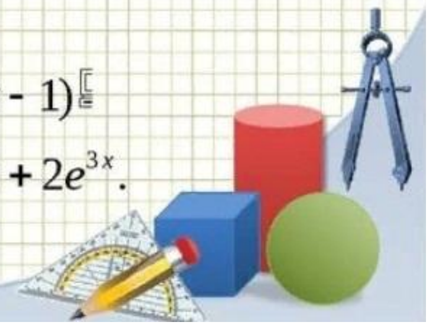
5) $y = 3x^2 + \cos x.$

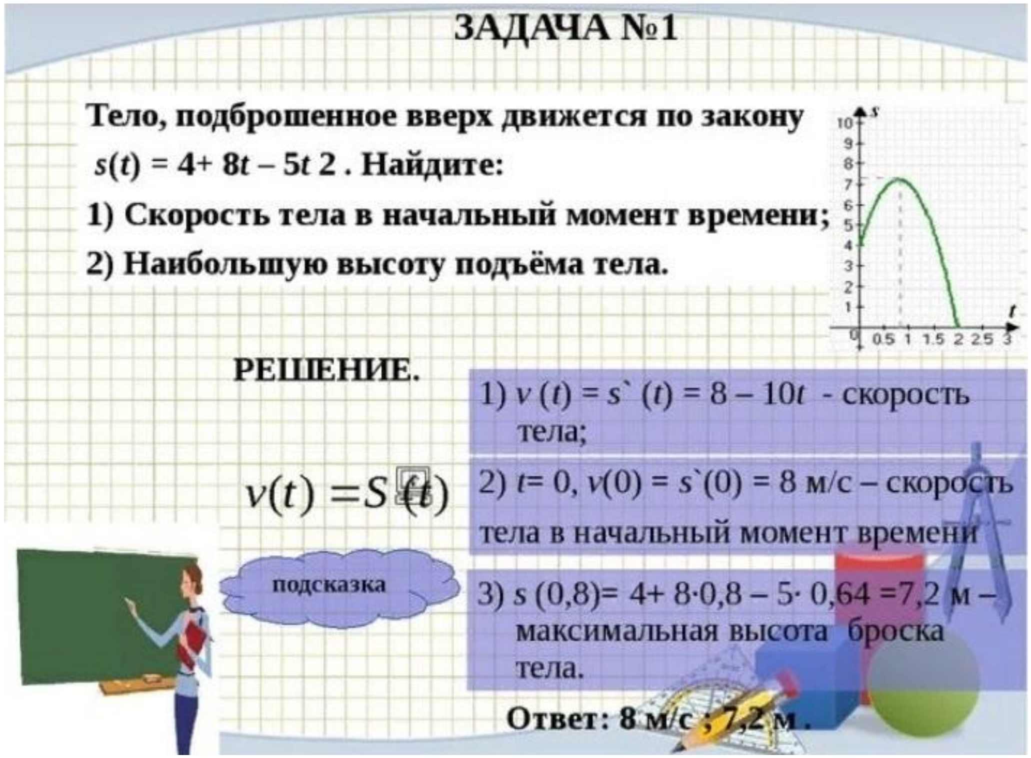
Ответ: $y' = 6x - \sin x$

6) $y = e^{3x}(2x - 1).$

$y' = (e^{3x})'(2x - 1) + e^{3x}(2x - 1)'$

Ответ: $y' = 3e^{3x}(2x - 1) + 2e^{3x}.$




ЗАДАЧА №1
Тело, подброшенное вверх движется по закону
s(t) = 4+ 8t – 5t 2 . Найдите:
1) Скорость тела в начальный момент времени;
2) Наибольшую высоту подъёма тела.
РЕШЕНИЕ.
1) v (t) = s` (t) = 8 – 10t - скорость тела;
v(t) = S'(t)
2) t= 0, v(0) = s`(0) = 8 м/с – скорость тела в начальный момент времени
подсказка
3) s (0,8)= 4+ 8·0,8 – 5· 0,64 =7,2 м – максимальная высота броска тела.
Ответ: 8 м/с ; 7,2 м .

ЗАДАЧА №2

При каких значениях x значение производной функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ равно 0

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ $\quad f'(x)=2\cdot 3x^{3-1}-2\cdot 3x^{2-1}-12$

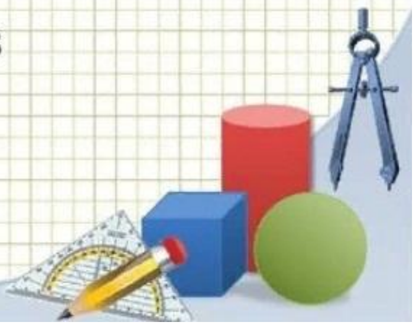
$f'(x)=6x^2-6x-12$ $\quad f'(x)=0$

$6x^2-6x-12=0(:6)$ $\quad x^2-x-2=0$

$D=1-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9;\sqrt{D}=3$

$x_1=\dfrac{1+3}{2}=2$ $\quad x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1$

$Ответ: x_1=2, x_2=-1$



Применение производной в исследовании функции.

План исследования функции.

– Для построения графика функции нужно:

1) найти область определения и область значений функции.

2) установить, является ли функция чётной или нечётной, 3) определить, является ли функция периодической или нет.

4) найти нули функции и её значения при $x = 0$.

5) найти интервалы знакопостоянства.

6) найти интервалы монотонности.

7) найти точки экстремума и значения функции в этих точках.

8) проанализировать поведение функции вблизи особых точек и при больших значениях модуля x.

Касательная к кривой.

Пусть функция имеем кривую и на ней фиксированную точку M и точку N.

– Касательной к точке M называется прямая, положение которой стремится занять хорда MN, если точку N неограниченно приближать по кривой к M.

– Рассмотрим функцию f(x) и соответствующую этой функции кривую y = f(x). При некотором значении x функция имеет значение y = f(x). Этим значениям на кривой соответствует точка M(x 0, y 0). Введем новый аргумент x 0 + x, его значению соответствует значение функции y 0 + y = f(x 0 + x). Соответствующая точка - N(x 0 + x, y 0 + y). Проведем секущую MN и обозначим φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Из рисунка видно, что y / x = tg φ. Если теперь x будет приближаться к 0, то точка N будет перемещаться вдоль кривой, секущая MN - поворачиваться вокруг точки M, а угол φ - меняться. Если при x 0 угол φ стремится к некоторому α, то прямая, проходящая через M и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой касательной. Применение производной в исследовании функции.

Применение производной в физике.

Механический смысл производной.

Механическое истолкование производной было впервые дано И. Ньютоном.

Оно заключается в следующем:

скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е.

. Таким образом, если закон движения материальной точки задан уравнением s=f(t), то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый
момент времени нужно найти производную s’=f ’(t) и подставить в неё соответствующее значение t.

Механический смысл второй производной.

Ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \quad = s$$

Решение задач.

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$$

1. Точка движется по закону

а) выведите формулу для вычисления скорости движения точки в любой момент времени t (t > 0);

б) найдите скорость в в момент t = 2с;

в) через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Решение:

а) v(t) = - t 2 + 4 t + 5.

б) v(2) = - 2 2 + 4·2 + 5 = - 4 + 8 + 5 = 9(м/с).

в) v(t) = 0, - t 2 + 4 t + 5 = 0, t1 = -1, t2 = 5,

-1 < 0, не удовлетворяет условию задачи.

Точка остановится через 5 секунд после начала движения.

Решение задачи.

2. Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v0 движется по закону, $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ где h – путь в метрах, t- время в секундах.

Найдите наибольшую высоту, которую достигнет тело, если , g = 10м/с2.

Решение:

$$h'(t) = v_0 - gt$$

$$h'(t) = 50 - 10t,$$

h (5) = **125.**

Ответ: **125 м.**

Рис. 12

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

С помощью производных функций, характеризующих физические явления, задаются и другие физические величины. Рассмотрим некоторые из них.

1) Мощность есть производная работы по времени

$$N = A'(t)$$

2) Пусть дан неоднородный стержень длиной l и массой m(l), начало которого в точке l = 0. Тогда производная функции массы стержня по его длине l есть линейная плотность стержня в данной точке:

$$\rho(l) = m'(l)$$

3) Теплоёмкость есть производная теплоты по температуре:

$$C(t) = Q'(t)$$

4) Сила тока есть производная заряда по времени:

$$I = q'(t)$$

Решение задач.

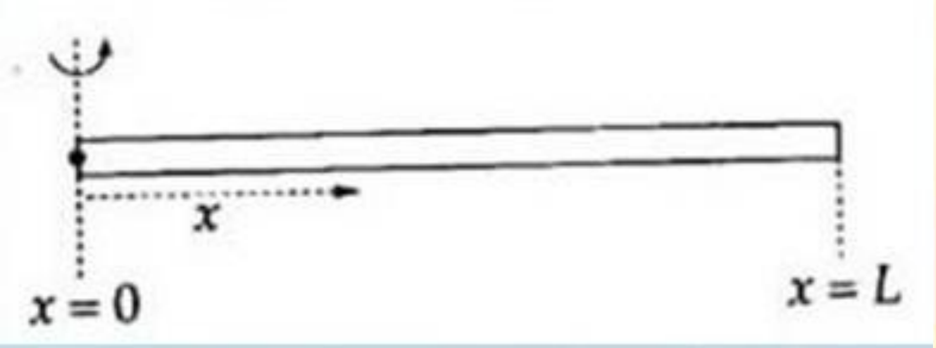
1. В тонком неоднородном стержне, имеющем длину 25 см, масса (в граммах) распределяется по закону , где l – расстояние в сантиметрах от начала стержня до любой его точки. Найти плотность стержня на расстоянии 4 см от начала стержня.

Решение:

$\rho(l) = m(l)$

$\rho(l) = 8l - 2$, $\rho(4) = 32 - 2 = 30$

Ответ: 30 г\см3.



Решение задач.

2. Количество электричества, протекающее через проводник, задаётся формулой q(t) = t+4/t. В какой момент времени ток в цепи равен нулю?

Решение: $I(t) = 1 - 4/t^2$,

I(t) = q ‘ (t), ,

$$1 - 4/t^2 = 0$$

Отсюда, t = 2 или t = -2; t = -2 не подходит по условию задачи.

Ответ: t = 2.

Задача 3.

Дождевая капля падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так , что её масса m изменяется по закону **m(t)=1-2t/3.**

Через сколько времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

Решение.

– $m(t)=0;\ 1-2t/3=0;$

$t=3/2$/

– Капля испарится на 3/2 сек.

– Обозначим время падения капли через t;

– $V(t)=gt;\ \omega(t)=m(t)\cdot V^2(t)/2.$

– Найдем критические точки на $[0;3/2]$

1) $\omega'(t) = g^2t - g^2t^2 = g^2t(1-t)$.

2) $\omega'(t)=0$; $g^2t(1-t)=0$

$t=0$ или $t=1$

3) $\omega(0)=0$; $\omega(1)=g^2/6$; $\omega(3/2)=0$;

ОТВЕТ: через 1 секунду после падения кинетическая энергия капли будет наибольшей.

Применение производной в химии и биологии.

И в химии нашло широкое применение дифференциальное исчисление для построения математических моделей химических реакций и последующего описания их свойств.
Химия – это наука о веществах, о химических превращениях веществ.
Химия изучает закономерности протекания различных реакций

Определение скорости химической реакции.
Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.

Зачем нужна производная в реакциях.

Так как скорость реакции у непрерывно изменяется в ходе процесса, ее обычно выражают производной концентрации реагирующих веществ по времени.

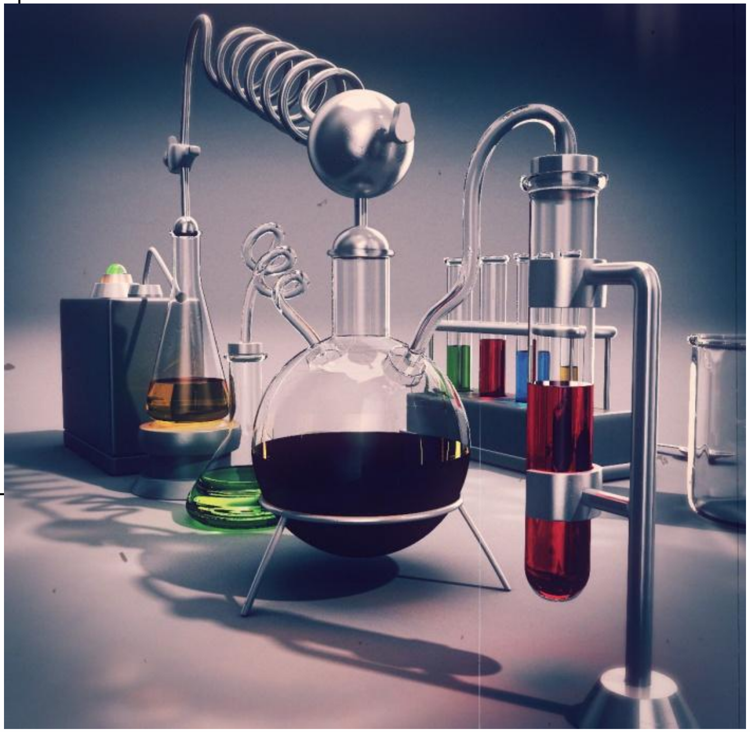
Формула производной в химии

Если ***C(t)*** – закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость ***v(t)*** химической реакции в момент времени ***t*** равна производной:

$$\upsilon(t) = C'(t)$$

Определение скорости реакции.

Предел отношения приращённой функции к приращённому аргументу при
стремлении Δt к нулю - есть
скорость химической реакции в
данный момент времени.



Задача по химии.

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью:
C(t) = t2/2 + 3t –3 (моль)
Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

Решение:
v (t) = C ‘(t);
v (t) = t + 3;
v (3) = 3+3 = 6.

Ответ: 6 моль\с.

Биологический смысл производной.

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t её размножения задана уравнением:
y = x(t). Пусть Δt - промежуток времени от некоторого начального значения t до t+Δt. Тогда y + Δy = x(t+Δt)- новое значение численности популяции, соответствующее моменту t+Δt, а Δy + x(t + Δt)- x(t) - изменение числа особей организмов. Отношение является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Вычисляя , получаем **y ‘ = P(t) = x ‘ (t),** или производительность жизнедеятельности популяции в момент времени t.

Пример.

Пусть популяция бактерий в момент t (с) насчитывает x(t) особей. $x(t) = 3000 + 100t^2$. Найти скорость роста популяции:

а) в произвольный момент t,

б) в момент t = 1 с.

Решение:

$P = x'(t) = 200t;$

$P(1) = 200$ (о/с).

Ответ: 200 о/с.

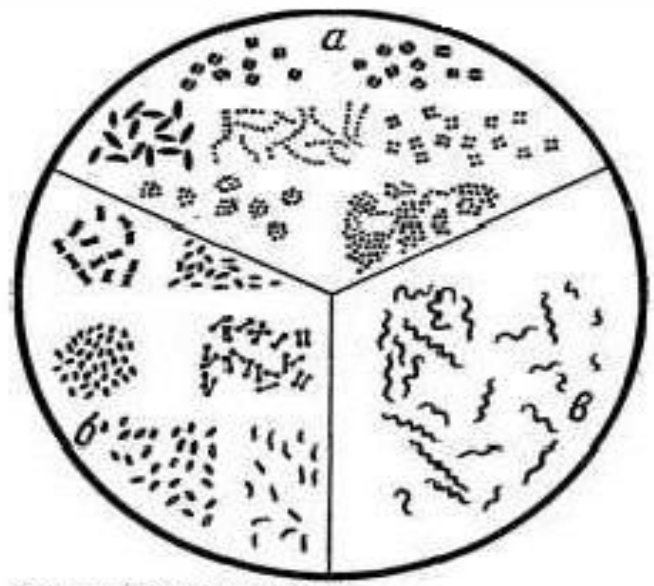
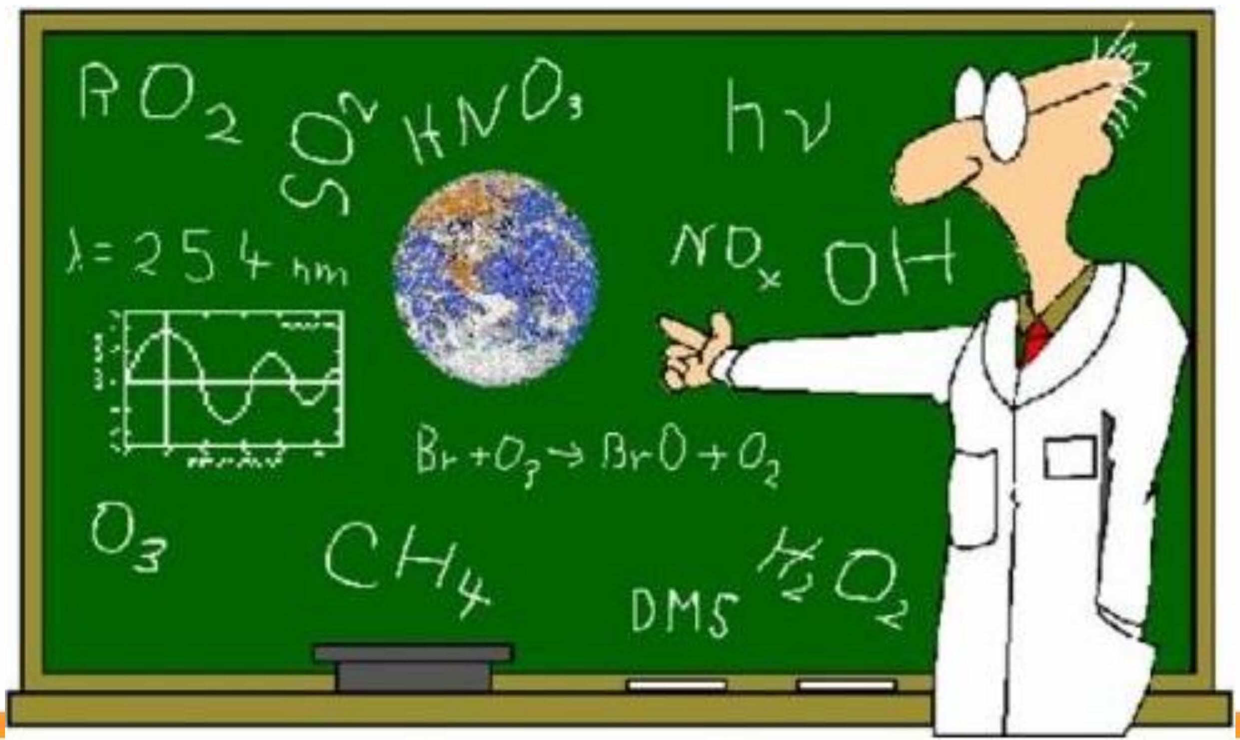


Рис. 11. Формы бактерий.
а — шаровидные; б — палочковидные; в — извитые

Заключение.

Понятие производной очень важно в химии и в биологии, особенно при определении скорости течения реакции.



Применение производной в экономике.

Введение.

Производная функции играет важную роль в естественно-научных и инженерно- технических исследованиях. Для многих отраслей науки она стала важным орудием количественного расчета, методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Производная является мощным средством решения прикладных задач.

Экономический смысл производной.

Пусть функция V = V(t) выражает количество произведенной продукции V за время t. Найдем производительность труда в момент времени t 0. За период времени от t 0 до t o + Δ t количество произведенной продукции изменится от значения V o =V(t o) до значения V o + Δ V = V(t o + Δ t); тогда средняя производительность труда за этот период времени П ср.= Δ V/ Δ t. Очевидно, что производительность труда в момент t o можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t 0 до t o+Δ t при Δ t 0, т.е. П(t)= $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Таким образом, экономический смысл производной заключается в том, что производная объема произведенной продукции по времени V(t) есть производительность труда в момент t o :

П (t) = V (t)

Экономический смысл производной.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной. Издержки производства у будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции х. Пусть Δ х - прирост продукции, тогда Δ у – приращение издержек производства и Δ у / Δ х - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная у’ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции:
J (x) = y’ (x).

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) х и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность и другие предельные величины. Предельные величины характеризуют не состояние, а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Эластичность функции.

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

Определение: *Эластичностью функции Ex(y) называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при Δx ⟶ 0:*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция y=f(x) при изменении независимой переменной x на 1%.

Задача 1.

Зависимость между издержками производства у (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции х (ед.) выражается функцией. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 10 ед.

Решение: *Функция средних издержек выражается отношением*
Y 1 = y/x = *50-0,15x^2,* ***Y 1 (10) = 50-0,05*100 = 45*** *(ден.ед.).*

Функция предельных издержек выражается производной,

$$y'(x) = 50 - 0{,}15x^2 \quad , \quad y'(10) = 50\text{-}0{,}15 \bullet 100 = 35 \text{ (ден. ед.).}$$

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства, составляют 35 дн.ед.

Задача 2.

Зависимость между стоимостью единицы продукции у (тыс.руб.) и выпуском продукции х (млрд.руб.) выражается функцией ***у=-0,5х+80.*** *Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн.руб.*

Решение: По формуле эластичности себестоимости

Е х (у) =(-0,5х)/(-0,5х+80) = х/(х-160).

При х = 60 Е х=60 (у) = -0,6, т.е. При выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.


Вывод: Экономическое
приложение производной помогает
как экономистам и бизнесменам,
так и обычным гражданам в
распоряжении бюджетом.

Применение производной в географии.

Рост численности населения.

Задача :

Идея социологической модели Томаса Мальтуса состоит в том, что прирост населения пропорционально числу населения в какой-то данный момент t через N(t), то есть

$$N'(t)= kN(t)$$

Модель Мальтуса неплохо действовала для описания численности США с 1790 по 1860 годы. Ныне эта модель в большинстве стран не действует.

Выведем же формулу для вычисления численности населения на ограниченной

Пусть **N – численность населения, и поскольку рост и спад численности зависит от времени t , то запишем ее в виде N= N(t)**

Прирост времени $\Delta t = t_2 - t_1$

Прирост населения тогда будет $\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t$

Отношение приращения N к приросту времени $\mathbf{\Delta N/\Delta t = k\ N}$ При $\Delta t \to 0$ получим $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{\Delta N/\Delta t = N'(t)}$

$$N'(t) = kN(t)$$

Хочу обратить ваше внимание на то, что полученное выражение является дифференциальным уравнением. Пока что мы не можем решать такие уравнения, с данной темой вы столкнётесь на занятиях по **высшей математике**, где приобретёте практические навыки решения таких уравнений. Достаточно было просто показать, как производная может быть тесно связана с географией.

<u>СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНОЙ С БИОХИМИЕЙ</u> Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшения температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что Х обозначает дозу назначенного лекарства, тогда У - функция степени реакции выражается формулой $y = x^2(a - x)$, где а – биомасса. При каком значении Х реакция максимальна?

Решение: $0 < x < a$. **Значит** $y'(x) = 2ax - 3x^2$.

Тогда $y'(x) = 0$ при $x = \frac{2a}{3}$. В этой точке $y''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2a < 0$, тогда $x = \frac{2a}{3}$ max

Это тот уровень дозы, который даёт максимальную реакцию.

Спасибо за внимание!