# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В РАЗЛИЧНЫХ НАУКАХ.

***Выполнила:*** Коновалова А.С.
Студентка 1 курса
ГД.09.19.1.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В МАТЕМАТИКЕ.

# Сведения из истории

Сведения из истории. Лозунгом многих математиков XVII в. был: «Двигайтесь вперёд, и вера в правильность результатов к вам придёт». Термин «производная» - ( франц. derivee - позади, за) ввёл в 1797 г. Ж . Лагранж. Он же ввёл современные обозначения y ' , f ' Обозначение lim –сокращение латинского слова limes (межа, граница). Термин «предел» ввёл И. Ньютон. И. Ньютон называл производную флюксией, а саму функцию - флюентой. Г. Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную так:

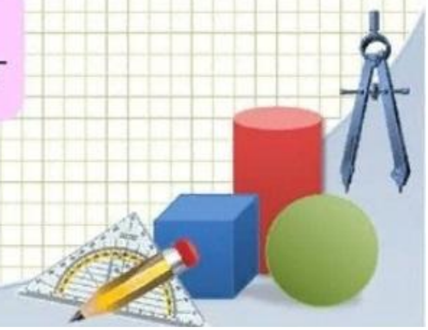
**Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) французский математик и механик**

**Нахождение производной называют дифференцированием**

$(kx+b)'=k$ $(C)'=0$ $(x^2)'=2x$

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$(x^n)'=nx^{n-1}$



# Таблица производных

| f (x) | f (x) | f (x) | f (x) |
|---|---|---|---|
| C | 0 | √x | 1/(2√x) |
| kx + b | k | ex | ex |
| x2 | 2x | ax | ax lna |
| xn | nxn–1 | tg x | 1/cos2x |
| 1/x | – 1/x2 | ctg x | – 1/sin2x |
| sin x | cos x | ln x | 1/x |
| cos x | – sin x | loga x | 1/(x lna) |

# Правила нахождения производной

***1.** Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их сумма u(x) + v(x) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u + v) = u + v$$

***2.** Если функция u(x) имеет в точке x производную и C – данное число, то функция C·u(x) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(Cu) = C \cdot u$$

# Правила нахождения производной

*3. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их произведение u(x) · v(x) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u \cdot v) = u \cdot v + u \cdot v$$

*4. Если функция v(x) имеет в точке x производную и v(x) ≠ 0, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{v}{v2}$$

# Правила нахождения производной

*5. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные и v(x) ≠ 0, то функция* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\ v - uv}{v2}$$

**6.Производная сложной функции**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

## Примеры

1) $g(x) = x^2 - 3x + 4$

*Ответ*: $g'(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$

*Ответ*: $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

3) $h(x) = (2x + 1)^2$

*Ответ*: $h'(x) = 4(2x + 1)$

## Примеры

4) $y = \sin 2x$

*Ответ*: $y' = 2\cos 2x$

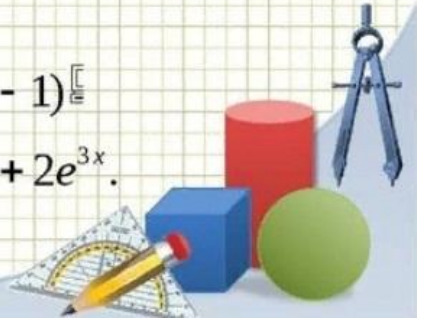
5) $y = 3x^2 + \cos x.$

*Ответ*: $y' = 6x - \sin x$

6) $y = e^{3x}(2x - 1).$

$y' = (e^{3x})'(2x - 1) + e^{3x}(2x - 1)'$

*Ответ*: $y' = 3e^{3x}(2x - 1) + 2e^{3x}.$

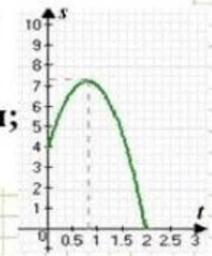


## ЗАДАЧА №1

**Тело, подброшенное вверх движется по закону $s(t) = 4+ 8t – 5t\ 2$ . Найдите:**

**1) Скорость тела в начальный момент времени;**

**2) Наибольшую высоту подъёма тела.**




**РЕШЕНИЕ.**

$$v(t) = S'(t)$$

подсказка

1) $v(t) = s'(t) = 8 – 10t$ - скорость тела;

2) $t= 0$, $v(0) = s'(0) = 8$ м/с – скорость тела в начальный момент времени

3) $s(0,8)= 4+ 8·0,8 – 5· 0,64 =7,2$ м – максимальная высота броска тела.

**Ответ: 8 м/с ; 7,2 м .**

## ЗАДАЧА №2

При каких значениях x значение производной функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ равно 0

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1 \qquad f'(x)=2\cdot 3x^{3-1}-2\cdot 3x^{2-1}-12$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12 \qquad f'(x)=0$$

$$6x^2-6x-12=0(:6) \qquad x^2-x-2=0$$

$$D=1-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9;\ \sqrt{D}=3$$

$$x_1=\frac{1+3}{2}=2 \qquad x_2=\frac{1-3}{2}=-1$$

*Ответ*: $x_1=2, x_2=-1$

# Применение производной в исследовании функции.

**План исследования функции.**

– Для построения графика функции нужно:
1) найти область определения и область значений функции.
2) установить, является ли функция чётной или нечётной, 3) определить, является ли функция периодической или нет.
4) найти нули функции и её значения при x = 0.
5) найти интервалы знакопостоянства.
6) найти интервалы монотонности.
7) найти точки экстремума и значения функции в этих точках.
8) проанализировать поведение функции вблизи особых точек и при больших значениях модуля x.

## Касательная к кривой.

Пусть функция имеем кривую и на ней фиксированную точку M и точку N.

– Касательной к точке M называется прямая, положение которой стремится занять хорда MN, если точку N неограниченно приближать по кривой к M.

– Рассмотрим функцию f(x) и соответствующую этой функции кривую y = f(x). При некотором значении x функция имеет значение y = f(x). Этим значениям на кривой соответствует точка M(x 0, y 0 ). Введем новый аргумент x 0 + x, его значению соответствует значение функции y 0 + y = f(x 0 + x). Соответствующая точка - N(x 0 + x, y 0 + y). Проведем секущую MN и обозначим φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Из рисунка видно, что y / x = tg φ. Если теперь x будет приближаться к 0, то точка N будет перемещаться вдоль кривой, секущая MN - поворачиваться вокруг точки M, а угол φ - меняться. Если при x 0 угол φ стремится к некоторому α, то прямая, проходящая через M и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой касательной. Применение производной в исследовании функции.

# Применение производной в физике.

# Механический смысл производной.

Механическое истолкование производной было впервые дано И. Ньютоном.

**Оно заключается в следующем:**

скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е.

. Таким образом, если закон движения материальной точки задан уравнением s=f(t), то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый

момент времени нужно найти производную s’=f ’(t) и подставить в неё соответствующее значение t.

# Механический смысл второй производной.

Ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$$

# Решение задач.

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$$

1. Точка движется по закону

а) выведите формулу для вычисления скорости движения точки в любой момент времени t ( t > 0);

б) найдите скорость в в момент t = 2с;

в) через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Решение:

а) v(t) = - t 2 + 4 t + 5.

б) v(2) = - 2 2 + 4·2 + 5 = - 4 + 8 + 5 = 9(м/с).

в) v(t) = 0, - t 2 + 4 t + 5 = 0, t1 = -1, t2 = 5,

-1 < 0, не удовлетворяет условию задачи.

Точка остановится через 5 секунд после начала движения.

# Решение задачи.

**2.** Тело, выпущенное вертикально вверх со скоростью v0 движется по закону, $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ где h – путь в метрах, t- время в секундах.

Найдите наибольшую высоту, которую достигнет тело, если , g = 10м/с2.

Решение:

$$h'(t) = v_0 - gt$$

$$h'(t) = 50 - 10t,$$

h (5) = **125.**

Ответ: **125 м.**

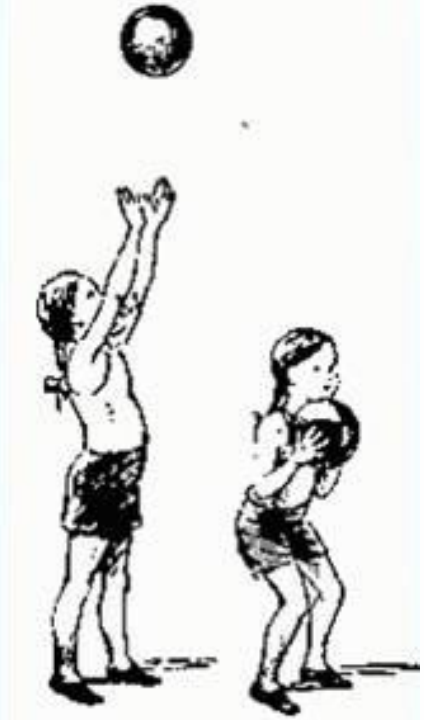


Рис. 12

# ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

С помощью производных функций, характеризующих физические явления, задаются и другие физические величины. Рассмотрим некоторые из них.

1) Мощность есть производная работы по времени

$$N = A'(t)$$

2) Пусть дан неоднородный стержень длиной $l$ и массой $m(l)$, начало которого в точке $l = 0$. Тогда производная функции массы стержня по его длине $l$ есть линейная плотность стержня в данной точке:

$$\rho(l) = m'(l)$$

3) Теплоёмкость есть производная теплоты по температуре:

$$C(t) = Q'(t)$$

4) Сила тока есть производная заряда по времени:

$$I = q'(t)$$

# Решение задач.

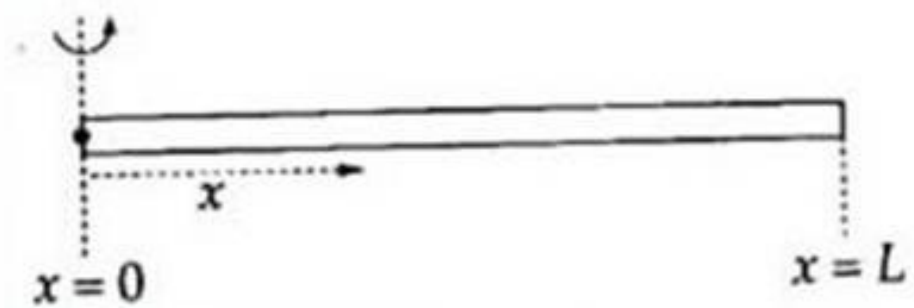
1. В тонком неоднородном стержне, имеющем длину 25 см, масса (в
граммах) распределяется по закону , где l – расстояние
в сантиметрах от начала стержня до любой его точки. Найти плотность
стержня на расстоянии 4 см от начала стержня.

Решение:

$\rho(l) = m(l)$

$\rho(l) = 8l - 2$, $\rho(4) = 32 - 2 = 30$

Ответ: 30 г\см3.



# Решение задач.

2. Количество электричества, протекающее через проводник, задаётся формулой q(t) = t+4/t. В какой момент времени ток в цепи равен нулю?

Решение: $I(t) = 1 - 4/t^2$,

I(t) = q ‘ (t), ,

$$1 - 4/t^2 = 0$$

Отсюда, t = 2 или t = -2; t = -2 не подходит по условию задачи.

Ответ: t = 2.

## Задача 3.

Дождевая капля падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так , что её масса m изменяется по закону $m(t)=1-2t/3$.

Через сколько времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

# Решение.

– $m(t)=0$; $1-2t/3=0$;
$t=3/2/$

– Капля испарится на 3/2 сек.

– Обозначим время падения капли через $t$;

– $V(t)=gt$; $\omega(t)=m(t)\cdot V^2(t)/2$.

– Найдем критические точки на $[0;3/2]$

**1) $\omega'(t) = g^2t - g^2t^2 = g^2t(1-t)$.**

**2) $\omega'(t)=0$; $g^2t(1-t)=0$**

**$t=0$ или $t=1$**

**3) $\omega(0)=0$; $\omega(1)=g^2/6$; $\omega(3/2)=0$;**

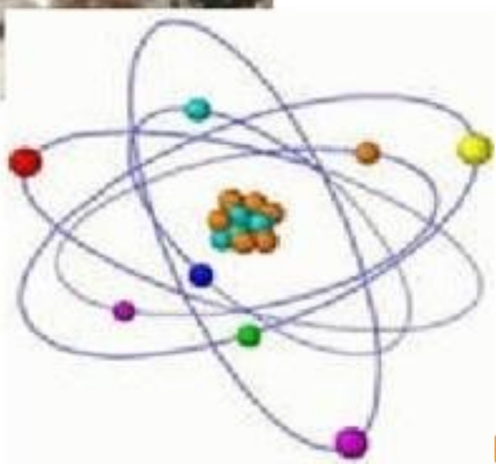
**ОТВЕТ: через 1 секунду после падения кинетическая энергия капли будет наибольшей.**

# Применение производной в химии и биологии.

И в химии нашло широкое применение дифференциальное исчисление для построения математических моделей химических реакций и последующего описания их свойств.
Химия – это наука о веществах, о химических превращениях веществ.
Химия изучает закономерности протекания различных реакций

**Определение скорости химической реакции.**
*Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.*

# Зачем нужна производная в реакциях.



**Так как скорость реакции у непрерывно изменяется в ходе процесса, ее обычно выражают производной концентрации реагирующих веществ по времени.**

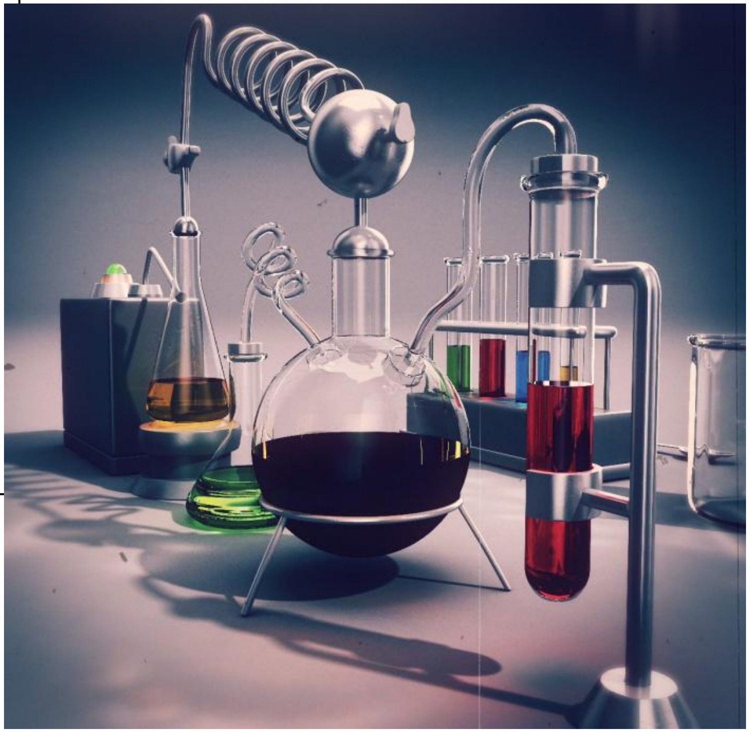
# Формула производной в химии

Если ***C(t)*** – закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость ***v(t)*** химической реакции в момент времени ***t*** равна производной:

$$\upsilon(t) = C'(t)$$

# Определение скорости реакции.

**Предел отношения приращённой функции к приращённому аргументу при стремлении $\Delta t$ к нулю - есть скорость химической реакции в данный момент времени.**



# Задача по химии.

**Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью:**
**$C(t) = t2/2 + 3t – 3$ (моль)**
**Найти скорость химической реакции через 3 секунды.**

**Решение:**
$v(t) = C'(t)$;
$v(t) = t + 3$;
$v(3) = 3+3 = 6$.

**Ответ:** 6 моль\с.

# Биологический смысл производной.

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t её размножения задана уравнением:
$y = x(t)$. Пусть $\Delta t$ - промежуток времени от некоторого начального значения t до $t+\Delta t$. Тогда $y + \Delta y = x(t+\Delta t)$- новое значение численности популяции, соответствующее моменту $t+\Delta t$, а $\Delta y + x(t + \Delta t) - x(t)$ - изменение числа особей организмов. Отношение является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Вычисляя , получаем **$y' = P(t) = x'(t)$,** или производительность жизнедеятельности популяции в момент времени t.

# Пример.

Пусть популяция бактерий в момент t (с) насчитывает x(t) особей. $x(t) = 3000 + 100t^2$. Найти скорость роста популяции:
а) в произвольный момент t,
б) в момент t = 1 с.

**Решение:**
P = x'(t) = 200t;
P(1) = 200 (о/с).

**Ответ:** 200 о/с.

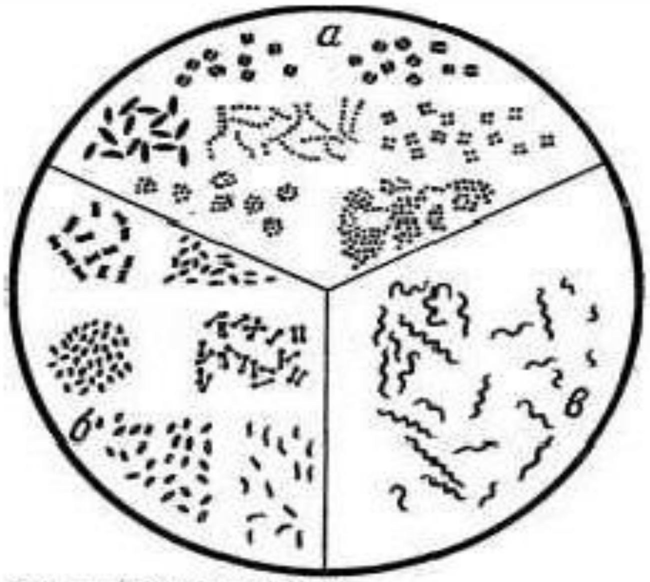
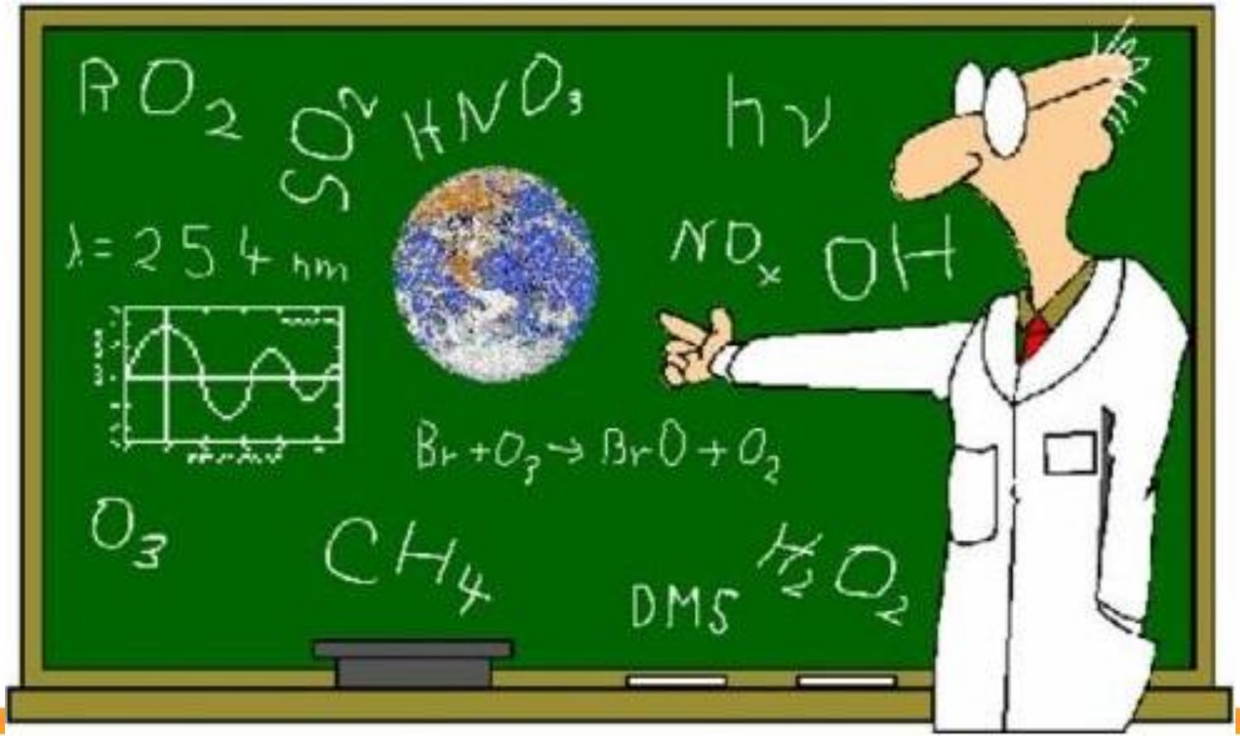


Рис. 11. Формы бактерий.
а — шаровидные; б — палочковидные; в — извитые

# Заключение.

**Понятие производной очень важно в химии и в биологии, особенно при определении скорости течения реакции.**



# Применение производной в экономике.

# Введени е.

**Производная функции играет важную роль в естественно-научных и инженерно- технических исследованиях.** Для многих отраслей науки она стала важным орудием количественного расчета, методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Производная является мощным средством решения прикладных задач.

# Экономический смысл производной.

Пусть функция V = V(t) выражает количество произведенной продукции V за время t. Найдем производительность труда в момент времени t 0. За период времени от t 0 до t o + Δ t количество произведенной продукции изменится от значения V o =V(t o ) до значения V o + Δ V = V(t o + Δ t); тогда средняя производительность труда за этот период времени П ср.= Δ V/ Δ t. Очевидно, что производительность труда в момент t o можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t 0 до t o+Δ t при Δ t 0, т.е. П(t)= $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$ . Таким образом, экономический смысл производной заключается в том, что производная объема произведенной продукции по времени V(t) есть производительность труда в момент t o :

**П (t) = V (t)**

# Экономический смысл производной.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной. Издержки производства у будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции х. Пусть $\Delta x$ - прирост продукции, тогда $\Delta y$ – приращение издержек производства и $\Delta y / \Delta x$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции:

$J(x) = y'(x)$.

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) х и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность и другие предельные величины. Предельные величины характеризуют не состояние, а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

# Эластичность функции.

*Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.*

***<u>Определение:</u>*** *Эластичностью функции* $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции* $y$ *к относительному приращению переменной* $x$ *при* $\Delta x \to 0$*:*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'$$

*Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция* $y=f(x)$ *при изменении независимой переменной* $x$ *на 1%.*

# Задача 1.

*Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 10 ед.*

*Решение: Функция средних издержек выражается отношением*
***Y 1 = y/x =** 50-0,15x^2, **Y 1 (10) = 50-0,05*100 = 45** (ден.ед.).*

*Функция предельных издержек выражается производной,*

$$y'(x) = 50 - 0{,}15x^2 \quad , \quad y'(10) = 50\text{-}0{,}15 \cdot 100 = 35 \text{ (ден. ед.).}$$

*Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства, составляют 35 дн.ед.*

# Задача 2.

*Зависимость между стоимостью единицы продукции y (тыс.руб.) и выпуском продукции x (млрд.руб.) выражается функцией* ***y=-0,5x+80.*** *Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн.руб.*

*Решение: По формуле эластичности себестоимости*

***E x (y) =(-0,5x)/(-0,5x+80) = x/(x-160).***

*При x = 60  E x=60 (y) = -0,6, т.е. При выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.*


БЮДЖЕТ
Вывод: Экономическое приложение производной помогает как экономистам и бизнесменам, так и обычным гражданам в распоряжении бюджетом.
50

# Применение производной в географии.

# Рост численности населения.

**Задача :**

Идея социологической модели Томаса Мальтуса состоит в том, что прирост населения пропорционально числу населения в какой-то данный момент t через N(t), то есть

$$N'(t)= kN(t)$$

Модель Мальтуса неплохо действовала для описания численности США с 1790 по 1860 годы. Ныне эта модель в большинстве стран не действует.

Выведем же формулу для вычисления численности населения на ограниченной

Пусть **N – численность населения, и поскольку рост и спад численности зависит от времени t , то запишем ее в виде N= N(t)**

Прирост времени $\Delta t = t_2 - t_1$

Прирост населения тогда будет $\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t$

Отношение приращения N к приросту времени $\boldsymbol{\Delta N / \Delta t = k N}$ При $\Delta t \to 0$ получим $\boldsymbol{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta N / \Delta t = N'(t)}$

$N'(t) = kN(t)$

Хочу обратить ваше внимание на то, что полученное выражение является дифференциальным уравнением. Пока что мы не можем решать такие уравнения, с данной темой вы столкнётесь на занятиях по **высшей математике**, где приобретёте практические навыки решения таких уравнений. Достаточно было просто показать, как производная может быть тесно связана с географией.

**<u>СВЯЗЬ ПРОИЗВОДНОЙ С БИОХИМИЕЙ</u> Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшения температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что Х обозначает дозу назначенного лекарства, тогда У - функция степени реакции выражается формулой у = $x^2$(а - х), где а – биомасса. При каком значении Х реакция максимальна?**

**Решение:** $0 < x < a$. **Значит** $y'(x) = 2ax - 3x^2$ .

**Тогда** $y'(x) = 0$ при $x = \dfrac{2a}{3}$. В этой точке $y''\left(\dfrac{2a}{3}\right) = -2a < 0$, тогда $x = \dfrac{2a}{3}$ $max$

Это тот уровень дозы, который даёт максимальную реакцию.

# Спасибо за внимание!