


## *Лекция №3*

*Теорема 1.* Всякая квадратная матрица  $A$  размерности  $n$  разлагается в произведение одной диагональной матрицы и нескольких трансвекций.

*Док-во:* только схематично индукцией по  $n$ .

Идею доказательства рассмотрим на примере матрицы размерности 2.



**Теорема 2.** Для любой квадратной матрицы  $A$  равносильны следующие утверждения:

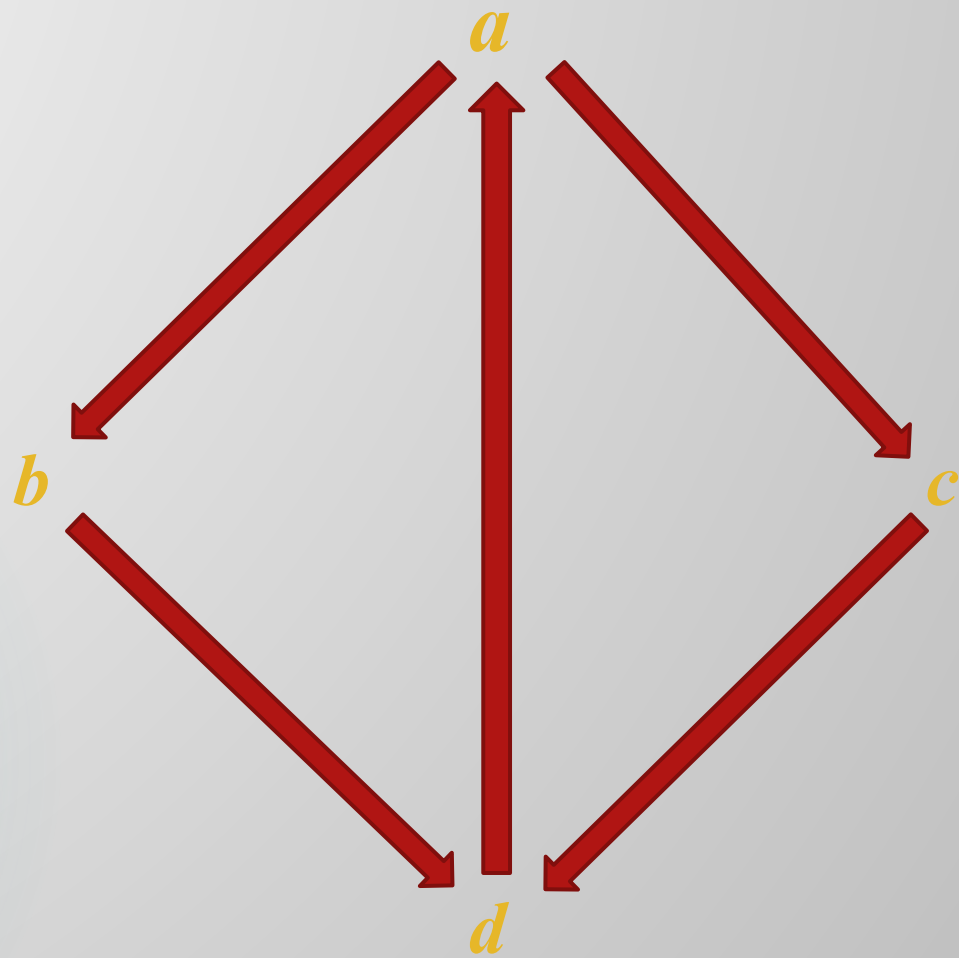
a)  $\exists X$  – матрица такая, что  $X \cdot A = A \cdot X = E$ ;

b)  $\exists Y$  – матрица такая, что  $Y \cdot A = E$ ;

c)  $\exists Z$  – матрица такая, что  $A \cdot Z = E$ ;

d)  $\det A \neq 0$ .

Док-во:





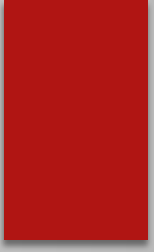
**Теорема 3:** Для любых квадратных матриц  $A$  и  $B$  размерности  $n$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B .$$

**Док-во:** 1 случай:  $|A| = 0$  или  $|B| = 0$

2 случай:  $|A| \neq 0$  и  $|B| \neq 0$

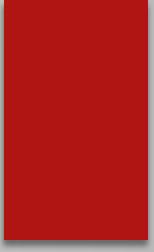




Если все свободные члены  $b_1, b_2, \dots, b_m$  - равны нулю, то система называется однородной.

Система (1) называется квадратной, если число уравнений  $m$  равно числу неизвестных, т.е.  $m = n$ .

**Определение:** Решением системы (1) называется такая совокупность  $n$  чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обращает все уравнения этой системы в верные числовые тождества.



**Определение:** Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

**Пример:** Система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \text{ является несовместной.}$$

Систему уравнений удобно записывать в матричном виде.

Пусть:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  - матрица коэффициентов.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  - столбец неизвестных.  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  - столбец свободных членов.

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$



**Определение:** Система линейных уравнений (1) называется невырожденной, если  $m = n$  и  $\det A \neq 0$ , где  $A = (a_{ij})$ .

**Теорема 1:** Всякая невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение  $(c_1, \dots, c_n)$  вида  $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где  $\Delta$  - определитель матрицы  $A$  - коэффициентов системы, а  $\Delta_i$  - определитель матрицы, которая получается из матрицы  $A$  заменой ее  $i$ -го столбца на столбец свободных членов.

Лемма. Для любой квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  размерности  $n$ .

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{jk} = 0, \text{ если } i \neq j.$$