Лекция №3

Теорема 1. Всякая квадратная матрица A размерности n разлагается в произведение одной диагональной матрицы и нескольких трансвекций.

Док-во: только схематично индукцией по n.
Идею доказательства рассмотрим на примере матрицы размерности 2.

Теорема 2. Для любой квадратной матрицы A равносильны следующие утверждения:

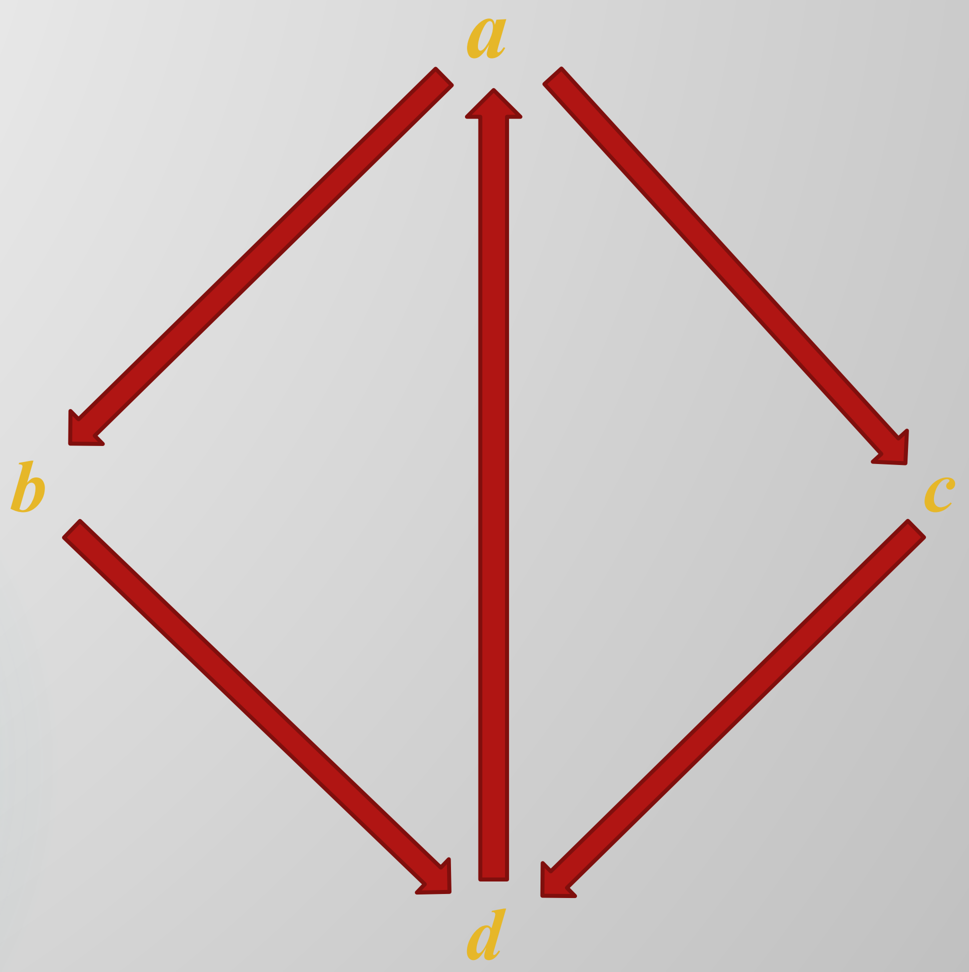
a) $\exists X$ – матрица такая, что $X \cdot A = A \cdot X = E$;

b) $\exists \mathrm{Y}$ – матрица такая, что $\mathrm{Y} \cdot A = E$;

c) $\exists Z$ – матрица такая, что $A \cdot Z = E$;

d) $\det A \neq 0$.

<u>Док-во</u>:



<u>Теорема 3</u>: Для любых квадратных матриц A и B размерности n

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B\,.$$

<u>Док-во:</u> 1 случай: $|A| = 0$ или $|B| = 0$

2 случай: $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$

Системы линейных уравнений

Определение: Система m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где x_1, x_2,…, x_n - неизвестные, подлежащие определению, a_{11},…, a_{mn} - коэффициенты системы, b_1, b_2,…, b_m - свободные члены.

Если все свободные члены b_1, b_2,…, b_m - равны нулю, то система называется однородной.

Система (1) называется квадратной, если число уравнений m равно числу неизвестных, т.е. $m = n$.

<u>Определение:</u> Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел (c_1, c_2,…, c_n), которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных x_1, x_2,…, x_n обращает все уравнения этой системы в верные числовые тождества.

<u>Определение:</u> Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение , и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

<u>Пример:</u> Система уравнений:

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 - x_2 = 1 \\ 6\mathrm{x}_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$ является несовместной.

Систему уравнений удобно записывать в матричном виде.

Пусть: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B \qquad (2)$$

Определение: Система линейных уравнений (1) называется невырожденной, если $m = n$ и $\det A \neq 0$, где $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$.

Теорема 1: Всякая невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение ($c_1, \ldots,$ c_n) вида $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы A – коэффициентов системы, а Δ_i - определитель матрицы, которая получается из матрицы A заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов.

<u>Лемма.</u> Для любой квадратной матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})$ размерности n.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0 \text{ ,если } i \neq j.$$