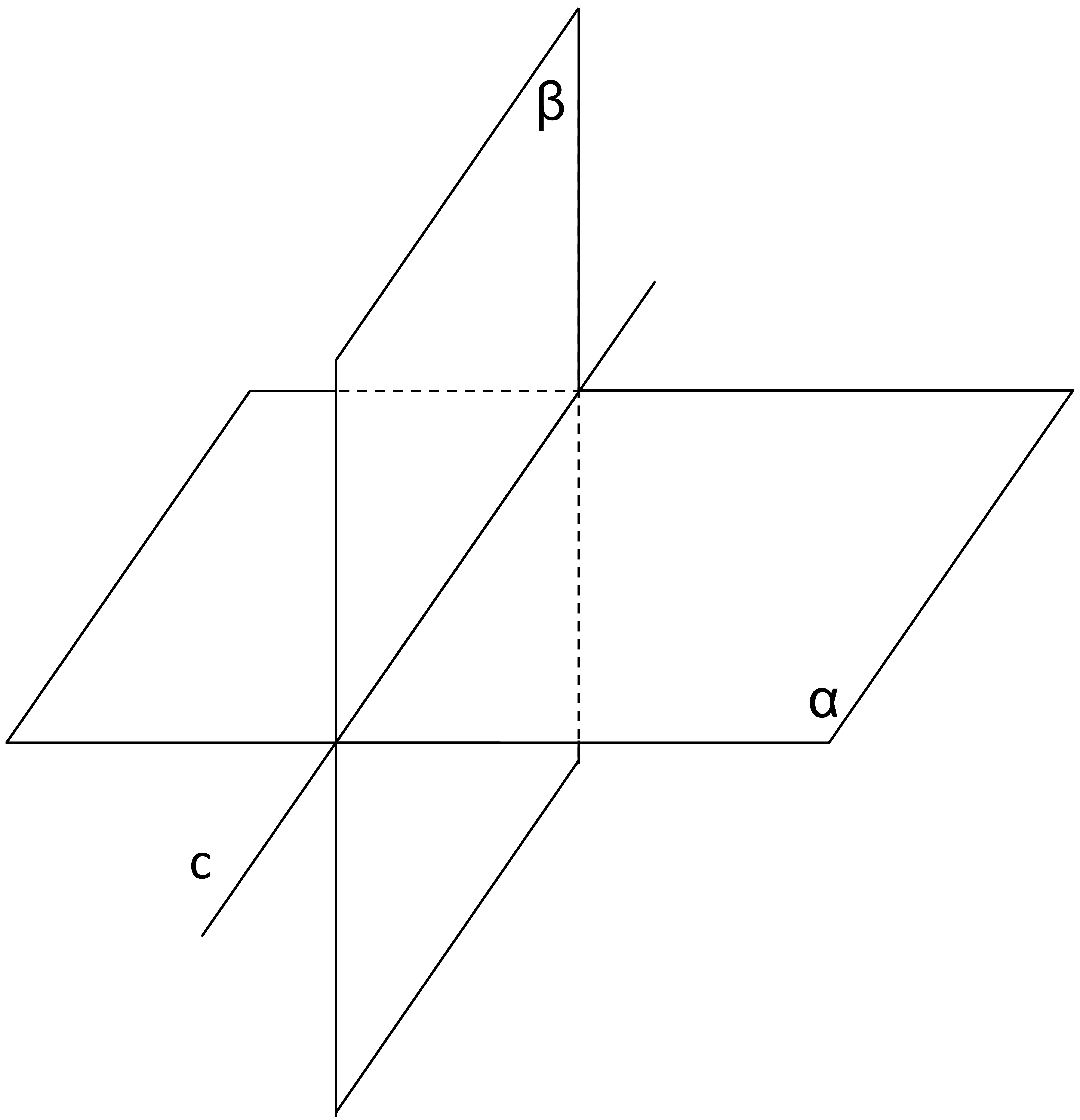
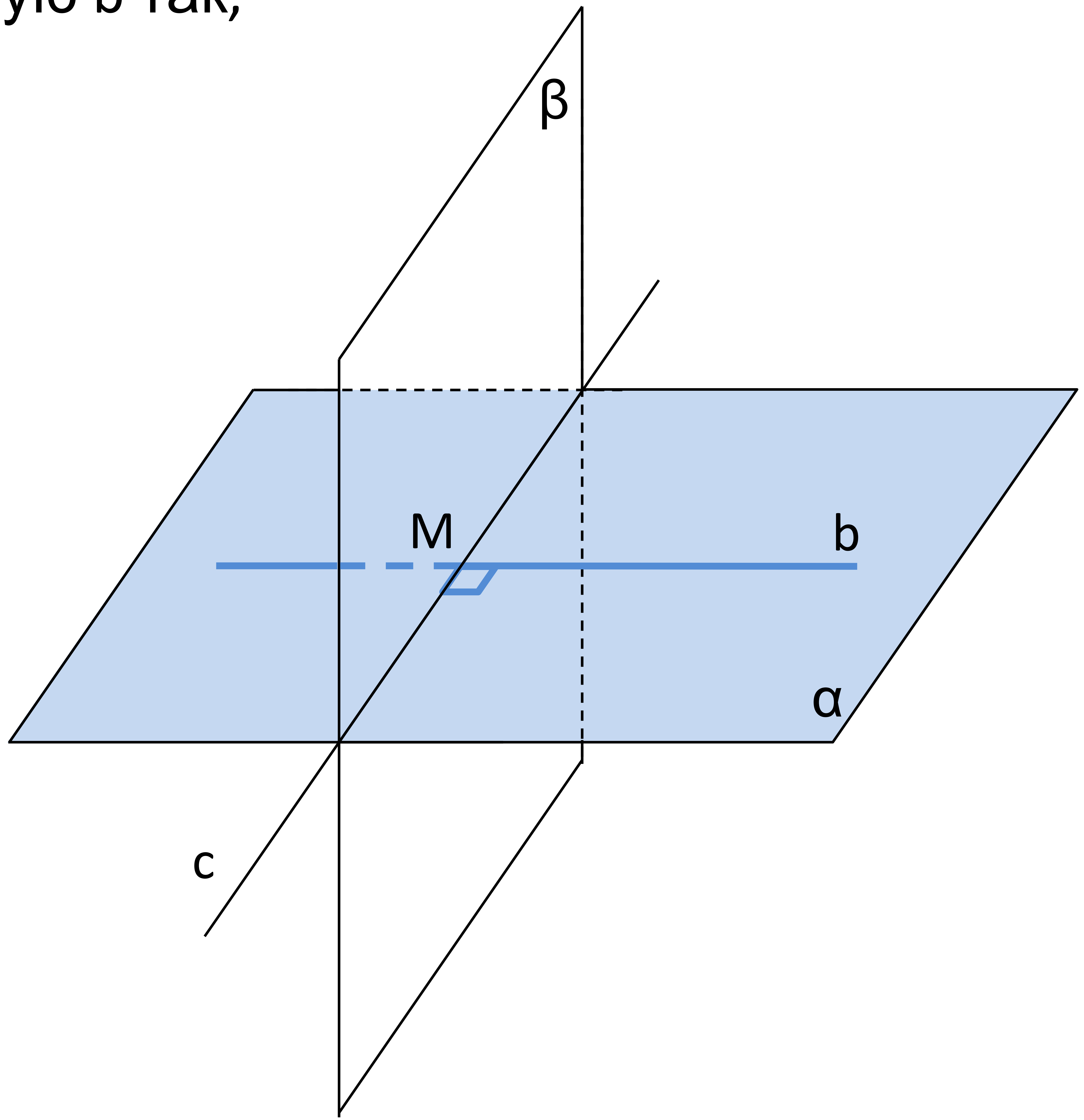
Векторно-координатный метод нахождения угла между плоскостями

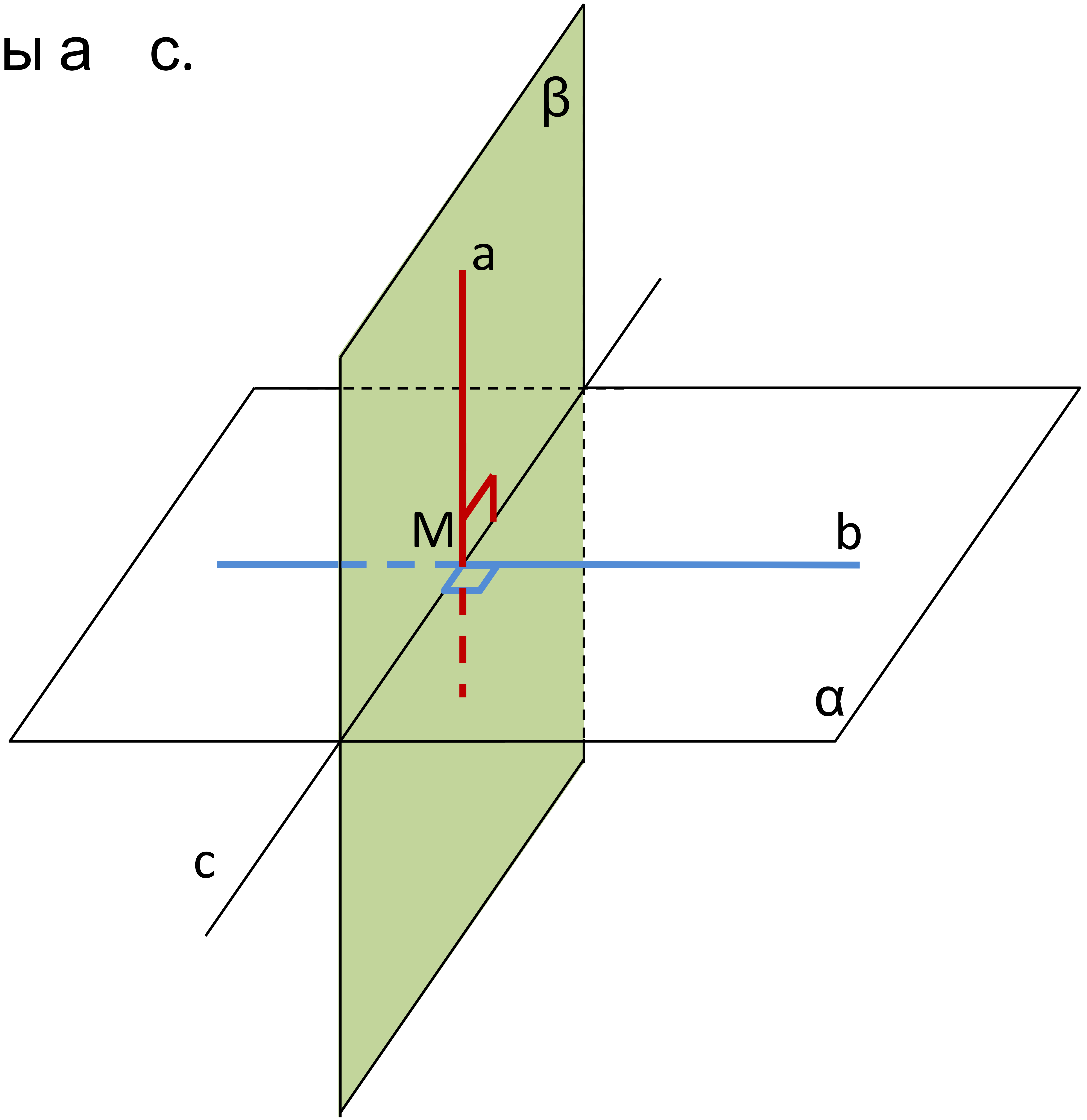
Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c.



В плоскости α проведем прямую b так, чтобы $b \perp c$.
Пусть $b \cap c = M$.



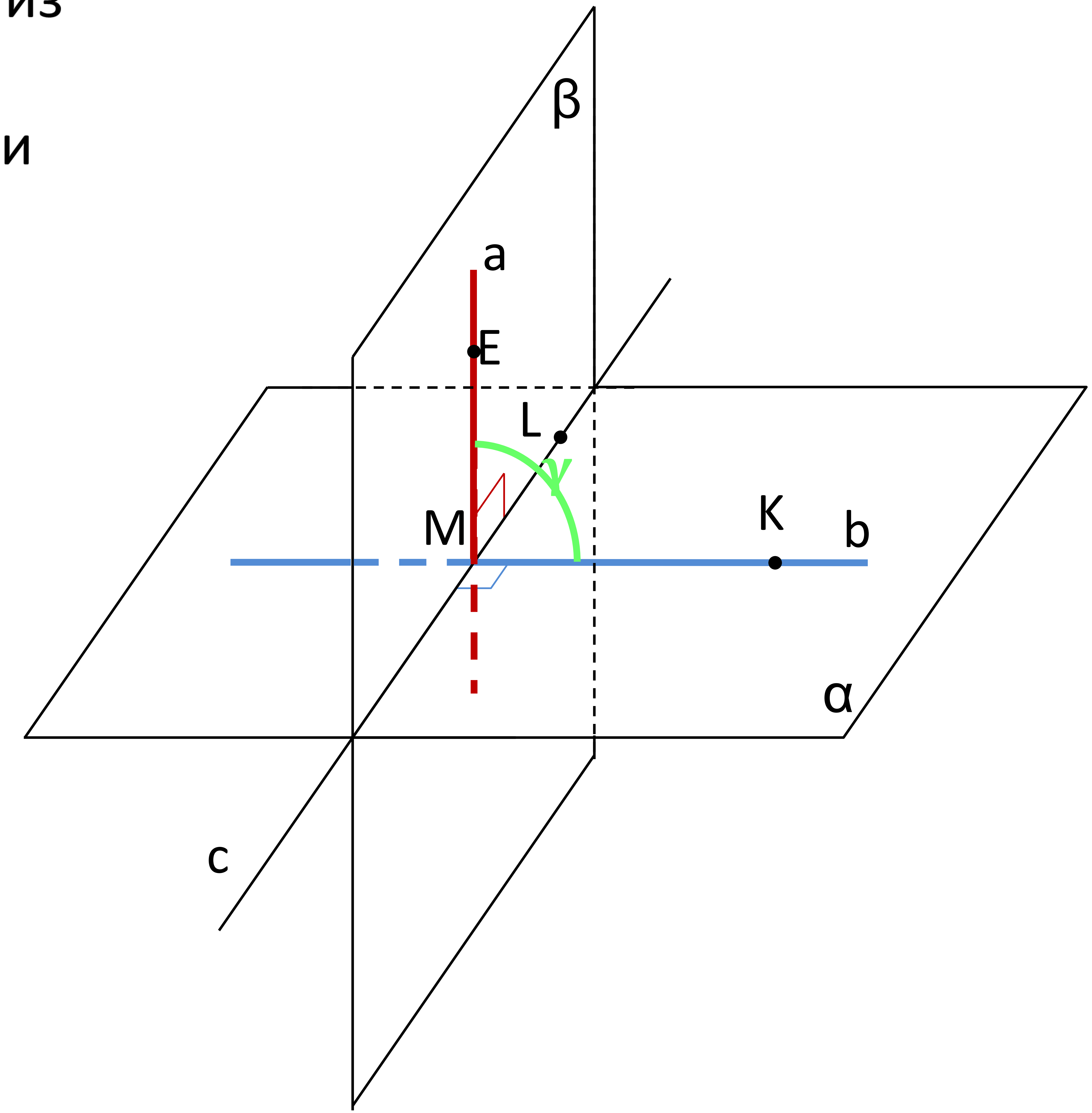
В плоскости β, через точку М проведем прямую а так, чтобы а $\perp$ с.



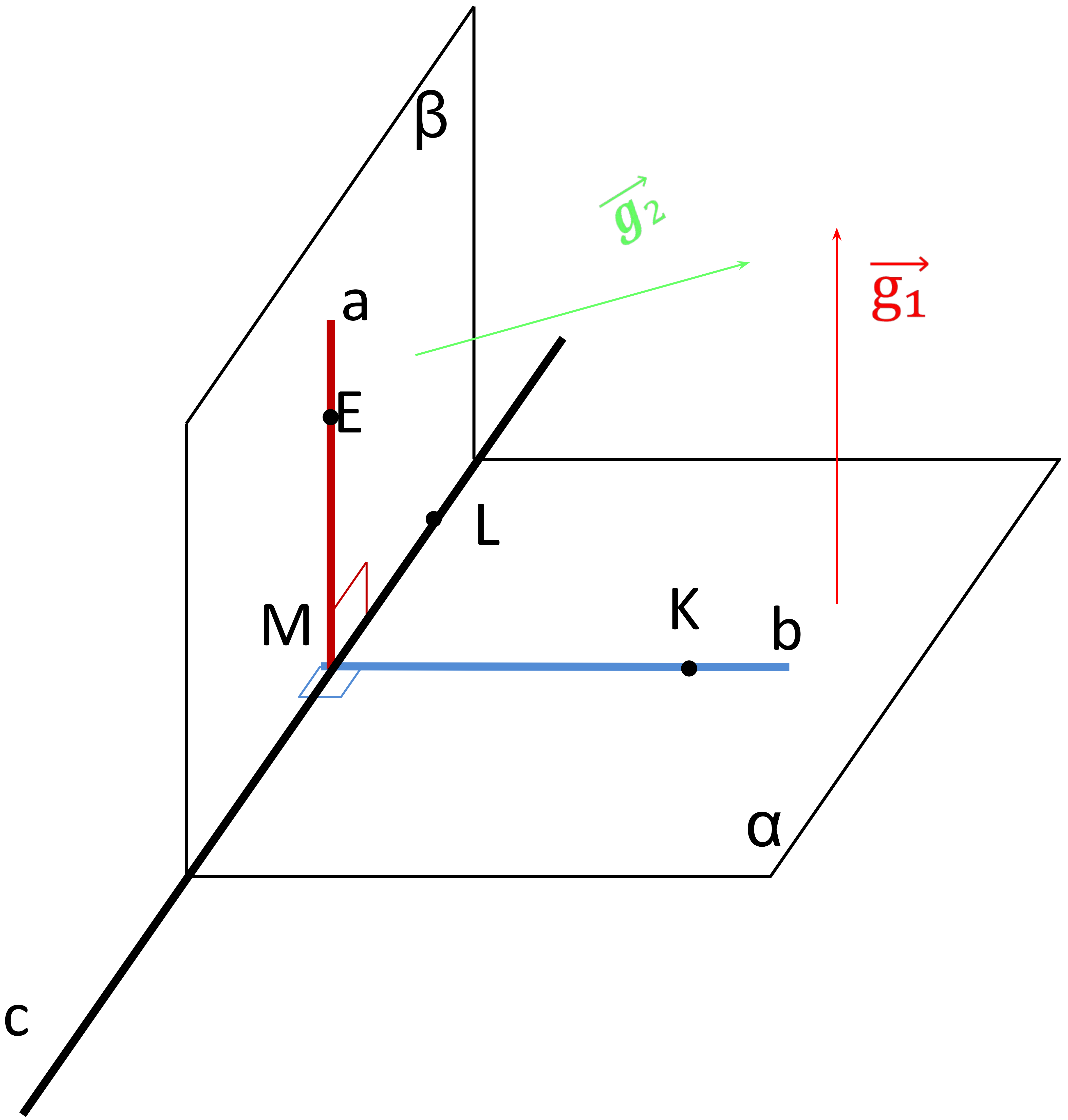
- Пусть ∠EMLK -наименьший из двугранных, который образуется при пересечении плоскостей α и β
- Значит,

$\widehat{EMK} = \widehat{E(ML)K} = \; = \widehat{(\alpha;\beta)}$

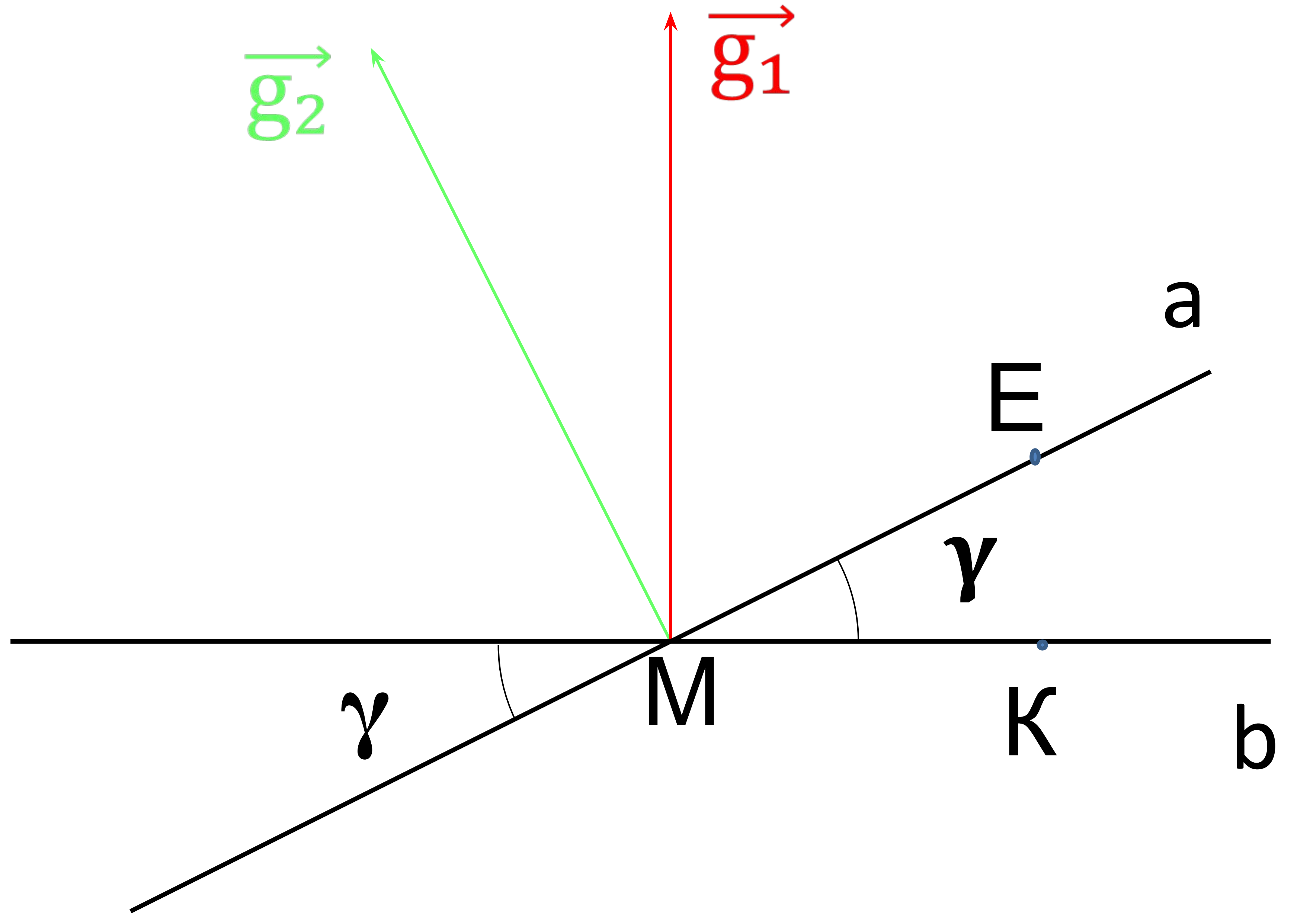
- Пусть $\widehat{(\alpha;\beta)} = \gamma$



- Пусть: $\overrightarrow{g_1}$ - вектор нормали к плоскости α
- $\overrightarrow{g_2}$ – вектор нормали к плоскости β.

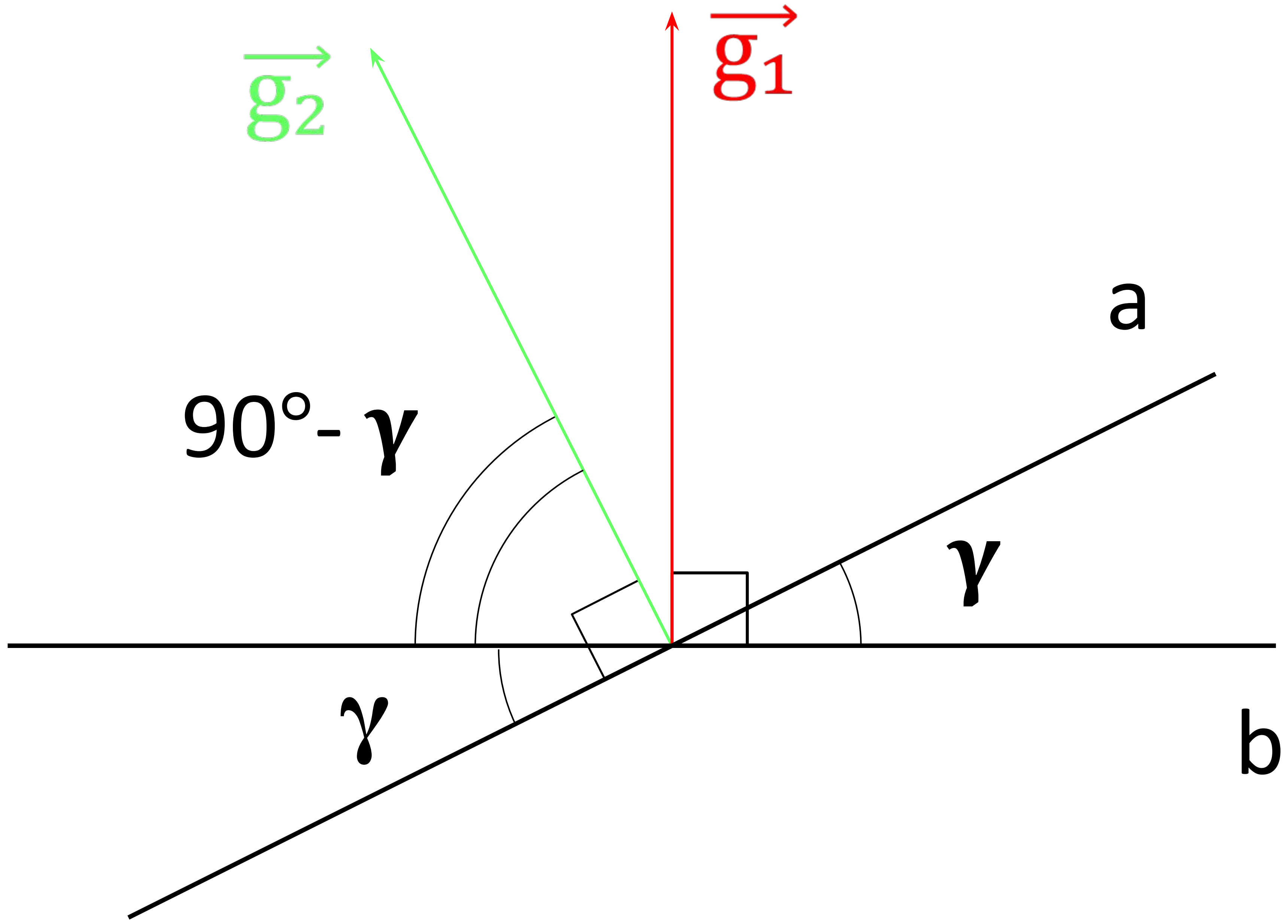


- При таком выборе векторов, $\overrightarrow{g_1}$ и $\overrightarrow{g_2}$, угол между ними острый.



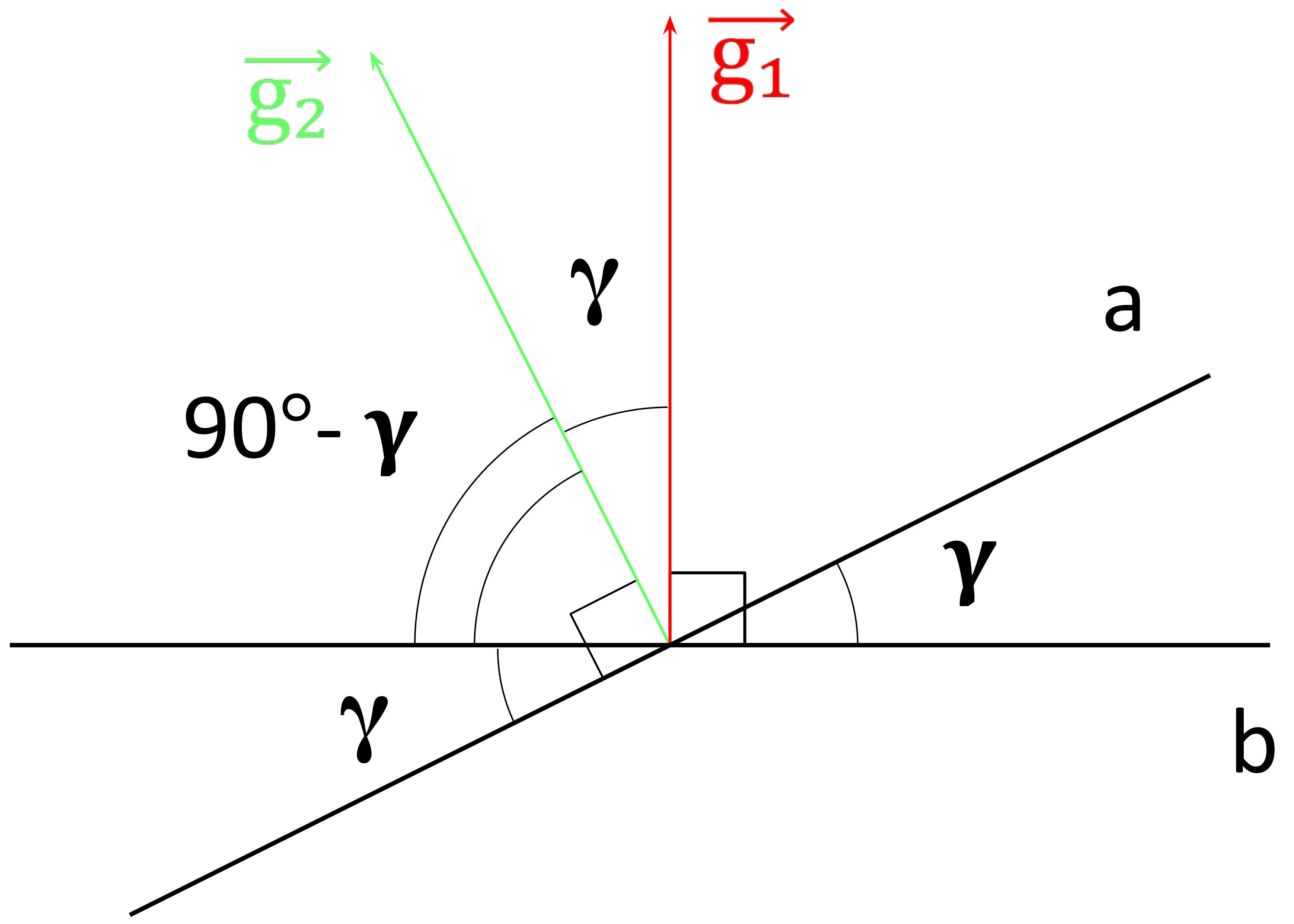
- Прямая a лежит плоскости в плоскости β, а $\overrightarrow{g_2}$ - вектор нормали к этой плоскости;

Прямая b лежит плоскости в плоскости α, а $\overrightarrow{g_1}$ - вектор нормали к этой плоскости

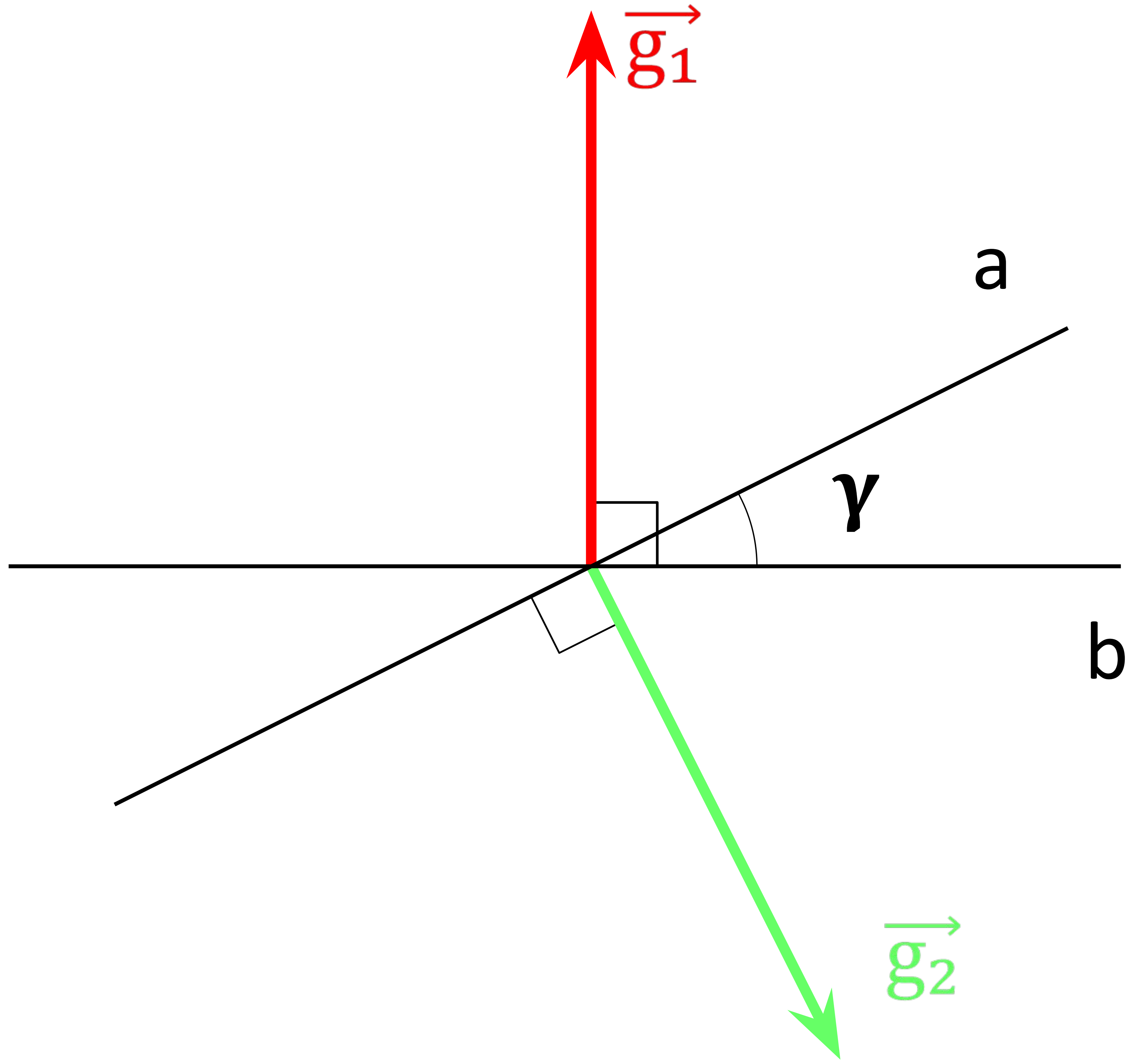


Таким образом, угол между векторами нормалей к плоскостям, равен углу между плоскостями.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{g_1}\,;\ \overrightarrow{g_2}}\right)=\cos(\boldsymbol{\gamma})=\cos\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)$$



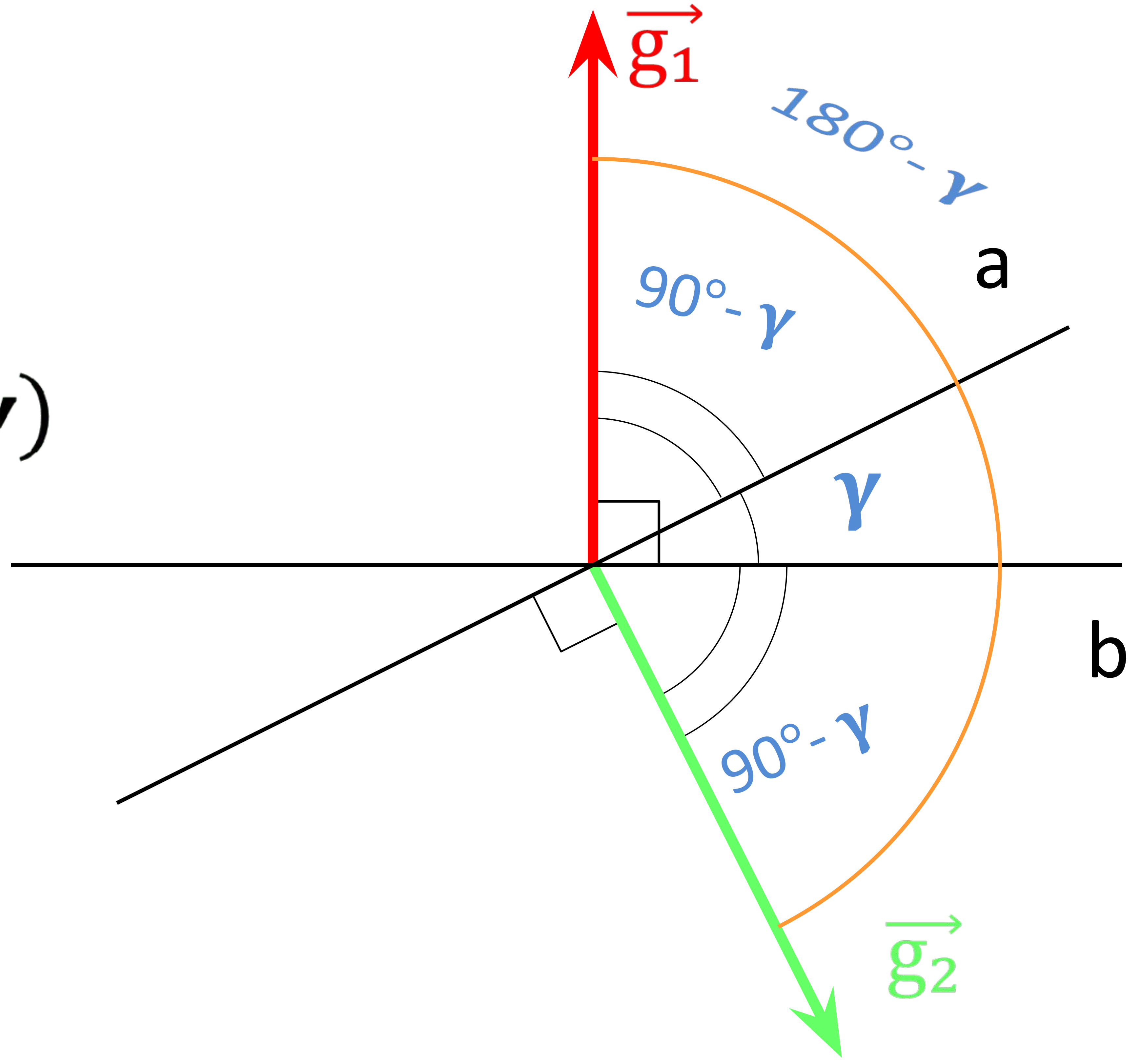
Но, векторы нормалей к плоскостям можно задать и так, что угол между ними будет тупой.

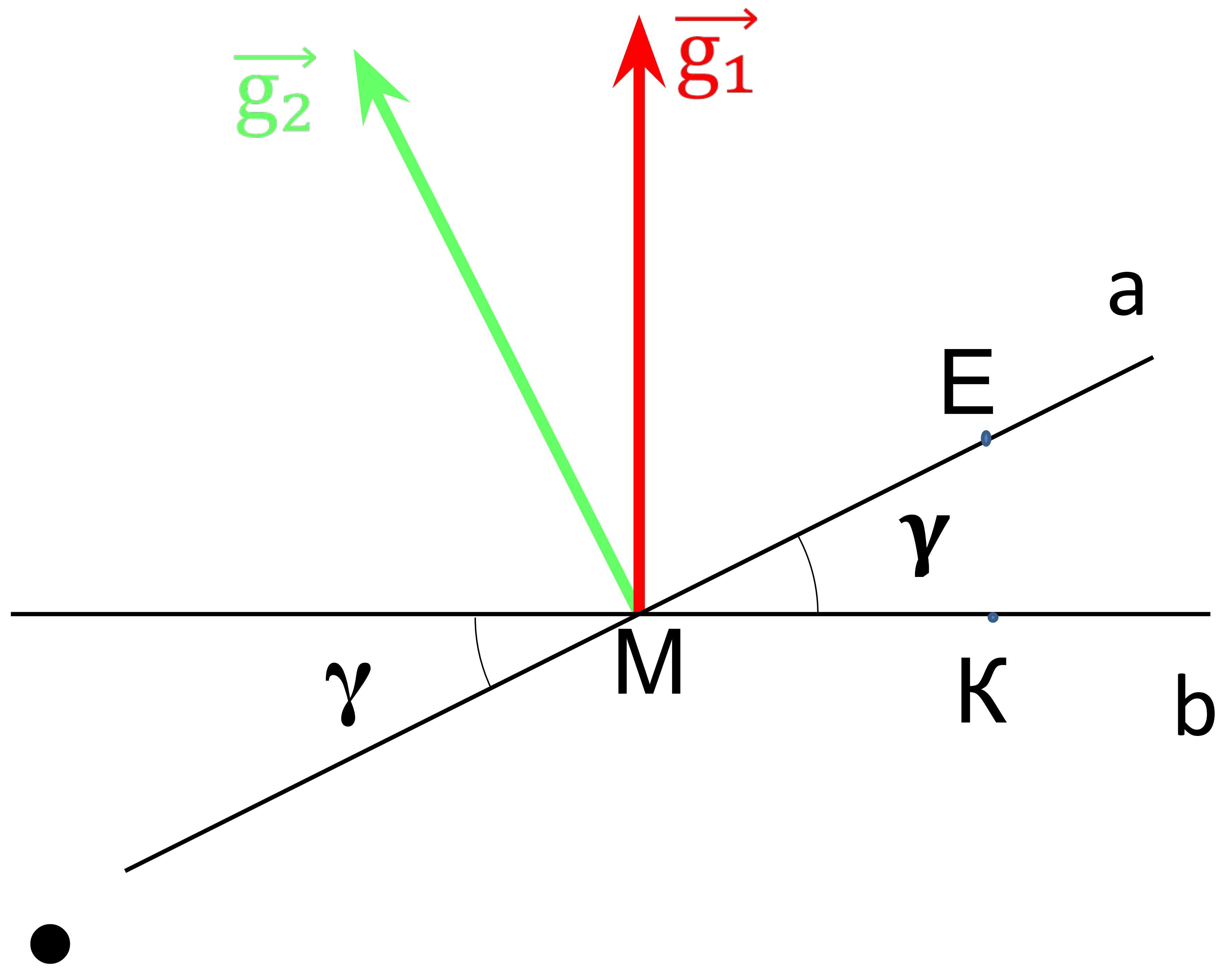


Рассуждая, получаем, что

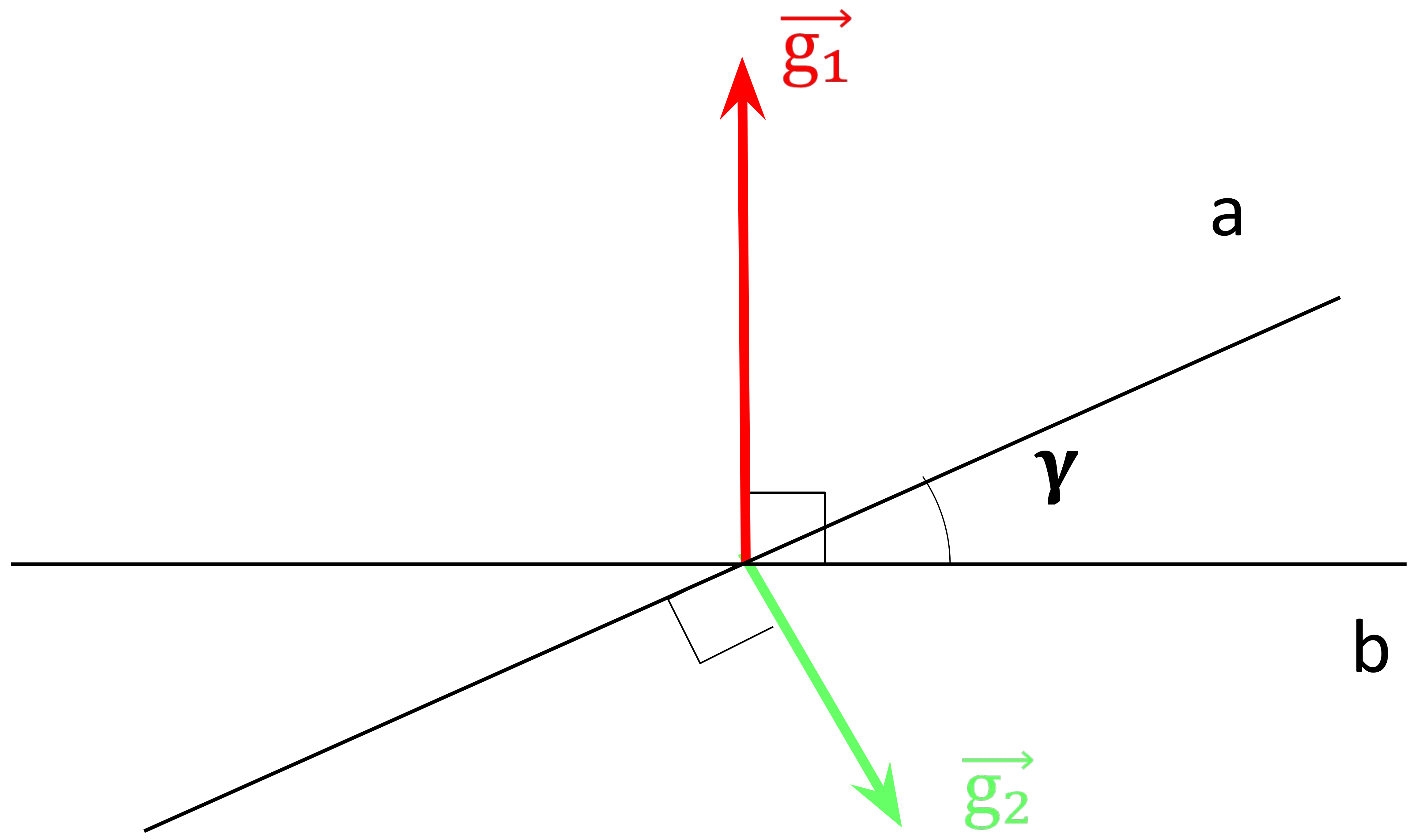
$$\widehat{(\overrightarrow{g_1}\ ;\ \overrightarrow{g_2})} = 180° - \ \boldsymbol{\gamma}$$

$$\cos\ \widehat{(\overrightarrow{g_1}\ ;\ \overrightarrow{g_2})} = \ \cos\ (180° - \boldsymbol{\gamma}) = -\cos\,(\boldsymbol{\gamma})$$





Если $\cos(\overrightarrow{g_1}\,;\,\overrightarrow{g_2}) \geq 0$,
то $\cos(\overrightarrow{g_1}\,;\,\overrightarrow{g_2}) = \cos(\boldsymbol{\gamma})\,;$



Если $\cos(\overrightarrow{g_1}\,;\,\overrightarrow{g_2}) < 0$,
то $\cos(\overrightarrow{g_1}\,;\,\overrightarrow{g_2}) = -\cos(\boldsymbol{\gamma})$

$\cos(\alpha;\beta)=|\cos(\overrightarrow{g_1}\,;\,\overrightarrow{g_2})|,$

- Таким образом:

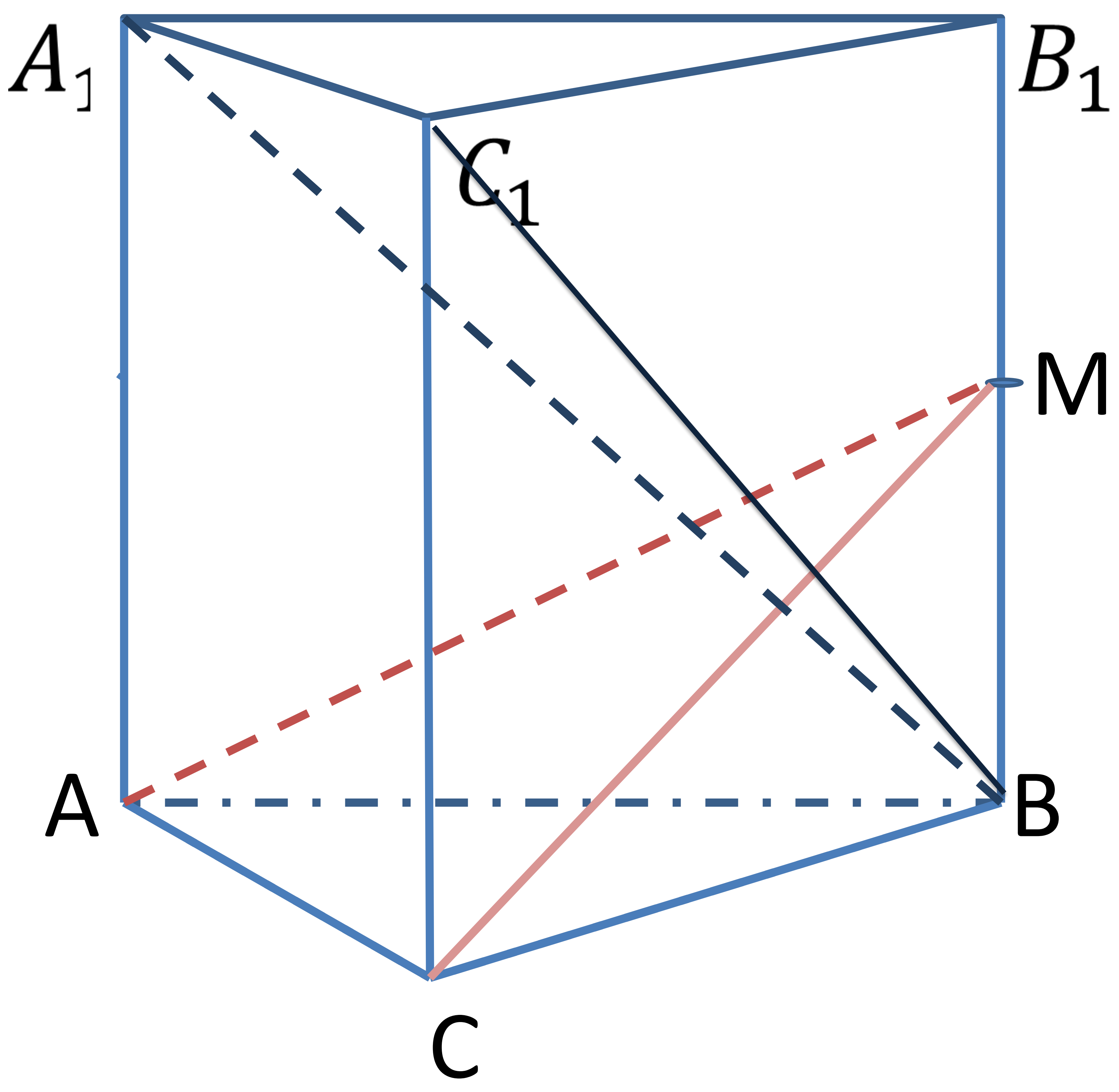
$$\cos(\widehat{\alpha;\beta}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{g_1};\ \overrightarrow{g_2}})| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2} \cdot \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}} = \frac{|\overrightarrow{g_1} \cdot \overrightarrow{g_2}|}{|\overrightarrow{g_1}| \cdot |\overrightarrow{g_2}|},$$ где

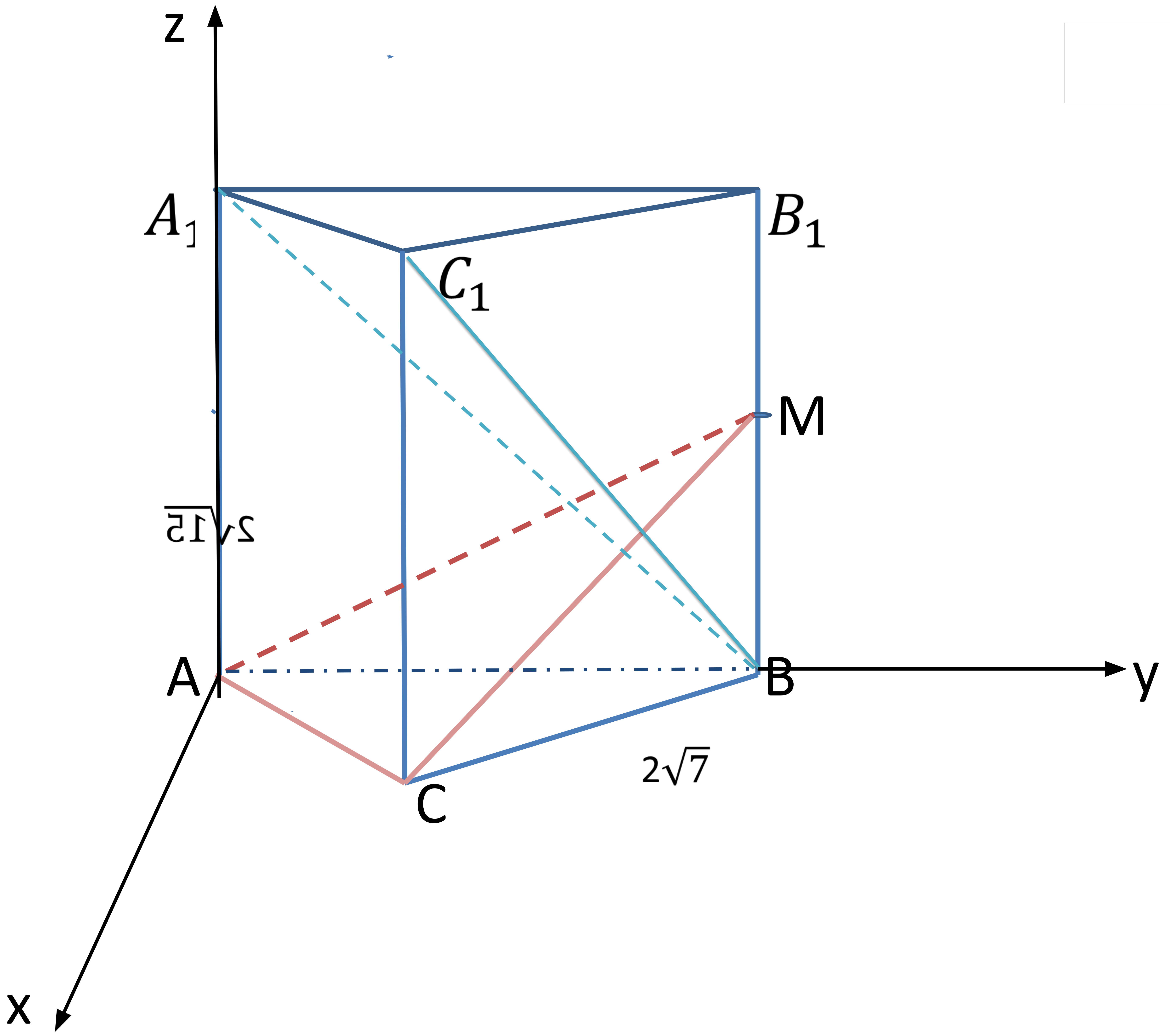
$\overrightarrow{g_1}\ \{a_1; b_1; c_1\}$ – вектор нормали к плоскости α,

$\overrightarrow{g_2}\ \{a_2; b_2; c_2\}$ – вектор нормали к плоскости β.

- Практика использования выведенной формулы нахождения угла между плоскостями

- Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $2\sqrt{7}$ и боковым ребром $2\sqrt{15}$. Точка M-середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостями AMC и A_1BC_1.


A_1
B_1
C_1
M
A
B
C



(C_1A_1B)

$B(0;2\sqrt{7};0)$

$A_1\left(0;0;2\sqrt{15}\right)$

$C_1(\sqrt{21};\sqrt{7};2\sqrt{15})$

(ACM)

$C(\sqrt{21};\sqrt{7};0)$

$M(0;2\sqrt{7};\sqrt{15})$

$A(0;0;0)$

(C_1A_1B)

B$(0;2\sqrt{7};0)$

$A_1\left(0;0;2\sqrt{15}\right)$

$C_1(\sqrt{21};\sqrt{7};2\sqrt{15})$

$\overrightarrow{A_1C_1}(\sqrt{21};\sqrt{7};0)$

$\overrightarrow{A_1B}\,(0;2\sqrt{7};-2\sqrt{15})$

Пусть $\overrightarrow{k}$ (a;b;c)-один из векторов нормали к рассматриваемой плоскости. Тогда, $\vec{k}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$ и $\vec{k}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$

Записав скалярные произведения векторов через координаты этих векторов и выполнив некоторые преобразования, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sqrt{7}b-\sqrt{15}c=0 \\ \sqrt{3}a+b=0 \end{cases}$$

Поскольку количество неизвестных превышает количество уравнений, найдем значения переменных с точностью до коэффициентов. Пусть a = $\sqrt{3}$,тогда, b =-3, c = $\frac{-\sqrt{105}}{5}$

(ACM)

A(0,0,0)

C($\sqrt{21}$,$\sqrt{7}$,0)
M(0,$2\sqrt{7}$,$\sqrt{15}$)

Ax+By+Cz+D=0(каноническое уравнение плоскости)

$$\begin{cases} A\sqrt{3}+B=0 \\ B2\sqrt{7}+C\sqrt{15}=0 \end{cases}$$

Пусть A =$\sqrt{5}$, тогда B = -$\sqrt{15}$, C = $2\sqrt{7}$

Таким образом,

$$\cos(\mu) = \frac{\left|\sqrt{15}+3\sqrt{15}-\frac{14\sqrt{15}}{5}\right|}{\sqrt{5+15+28}\cdot\sqrt{3+9+\frac{105}{25}}}=\frac{1}{6}$$

, где μ − угол между рассматриваемыми плоскостями

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$