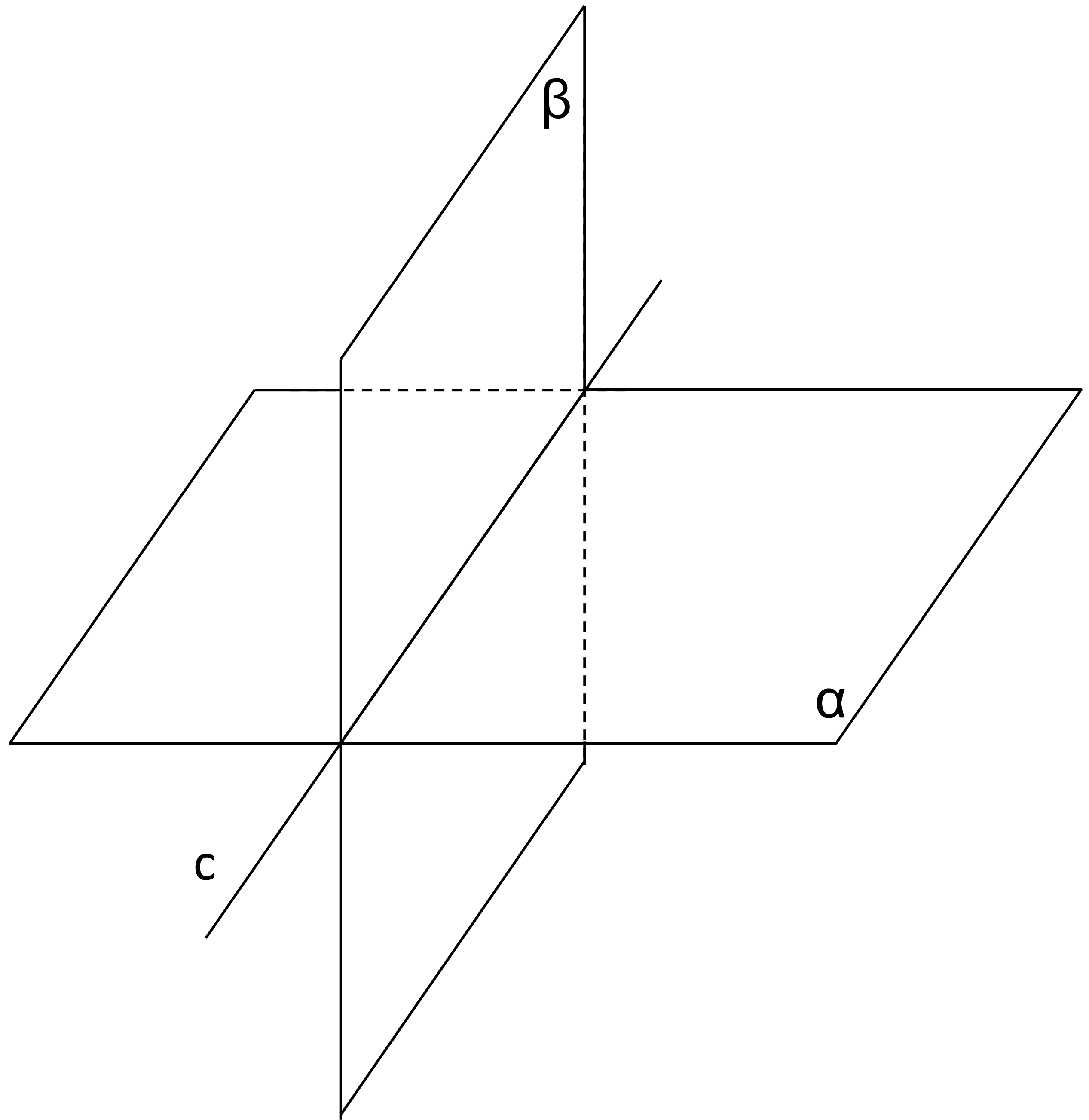
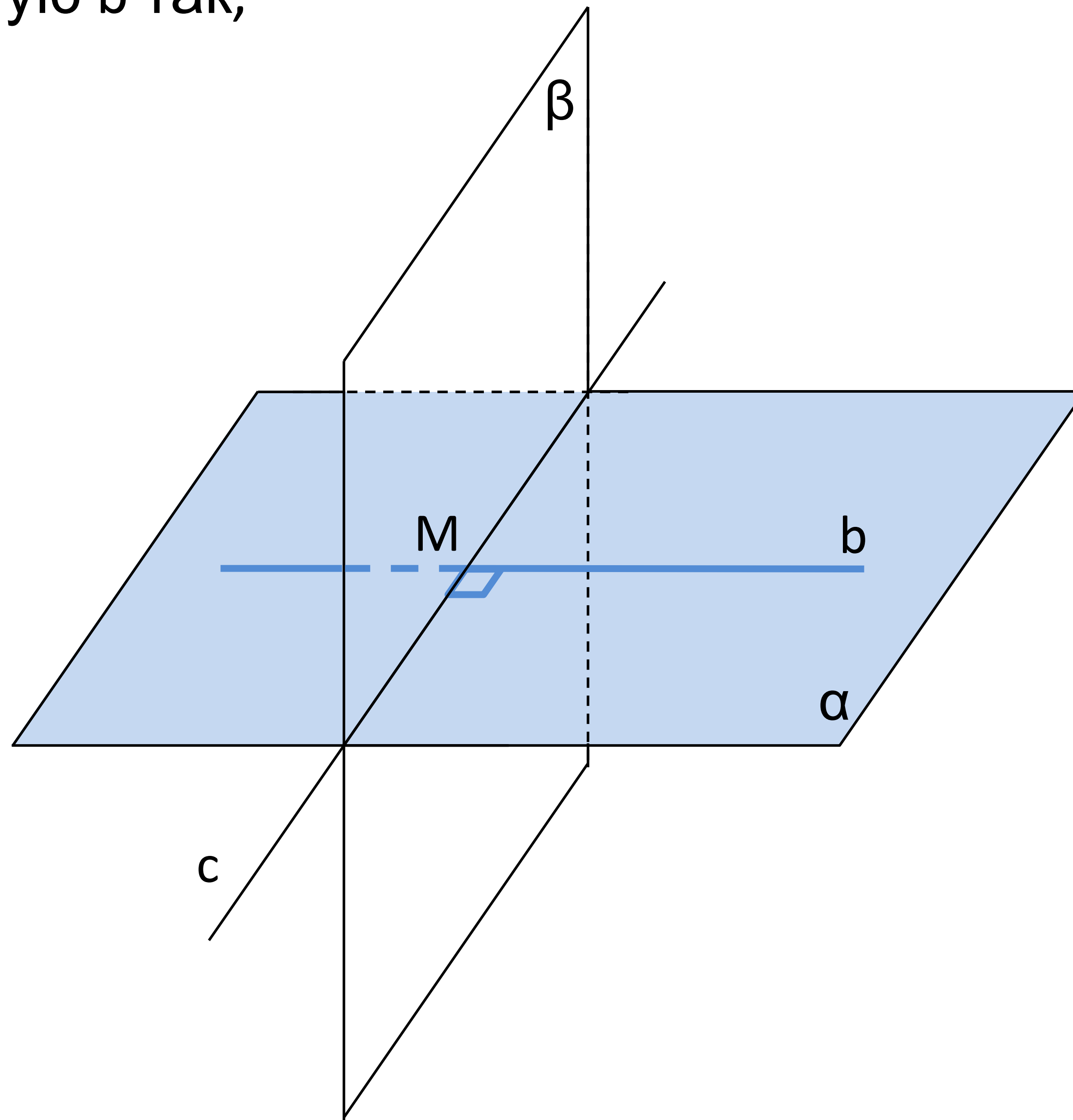


Векторно-координатный метод нахождения угла между плоскостями

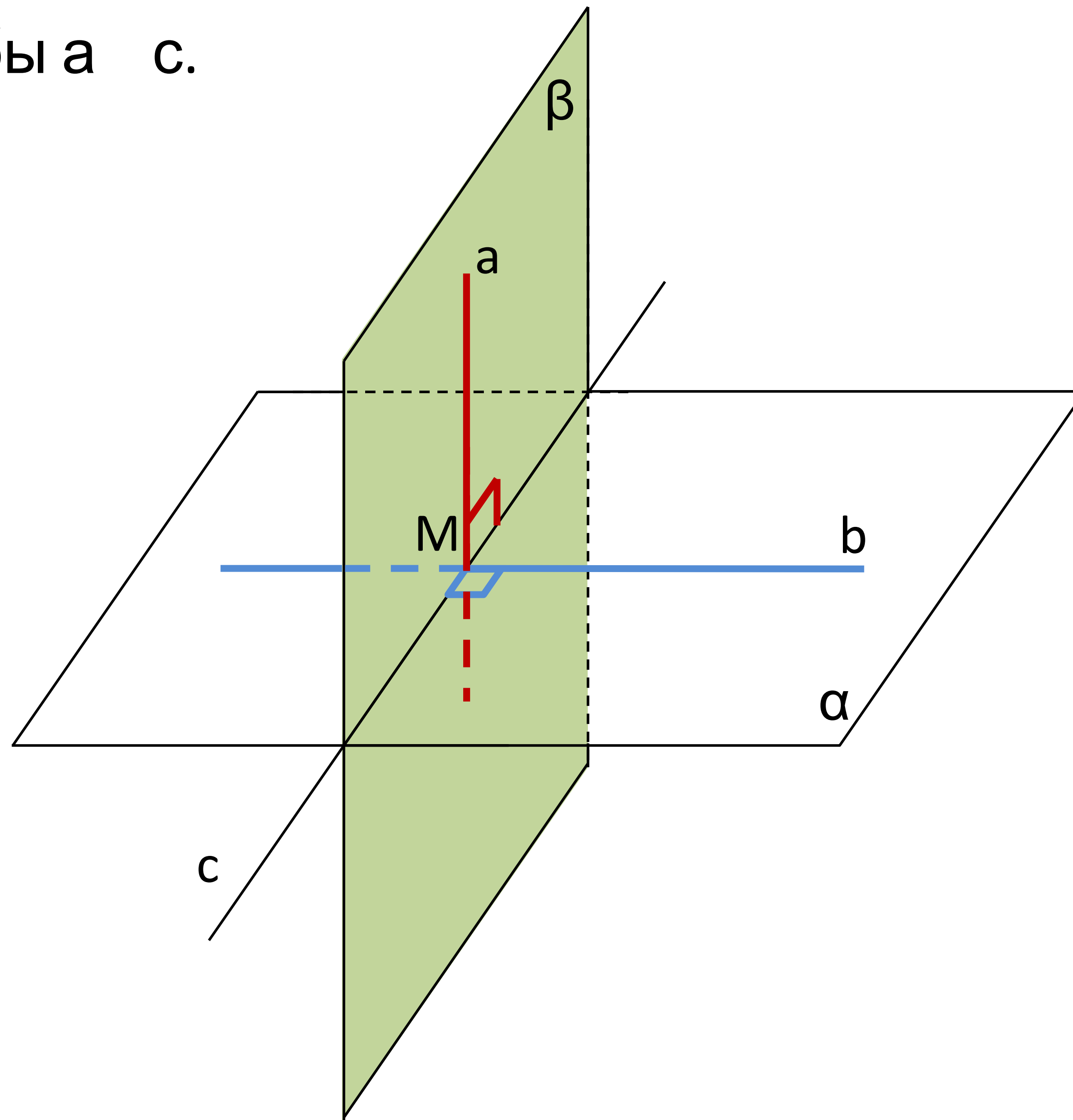
Пусть плоскости α и β
пересекаются по прямой c .



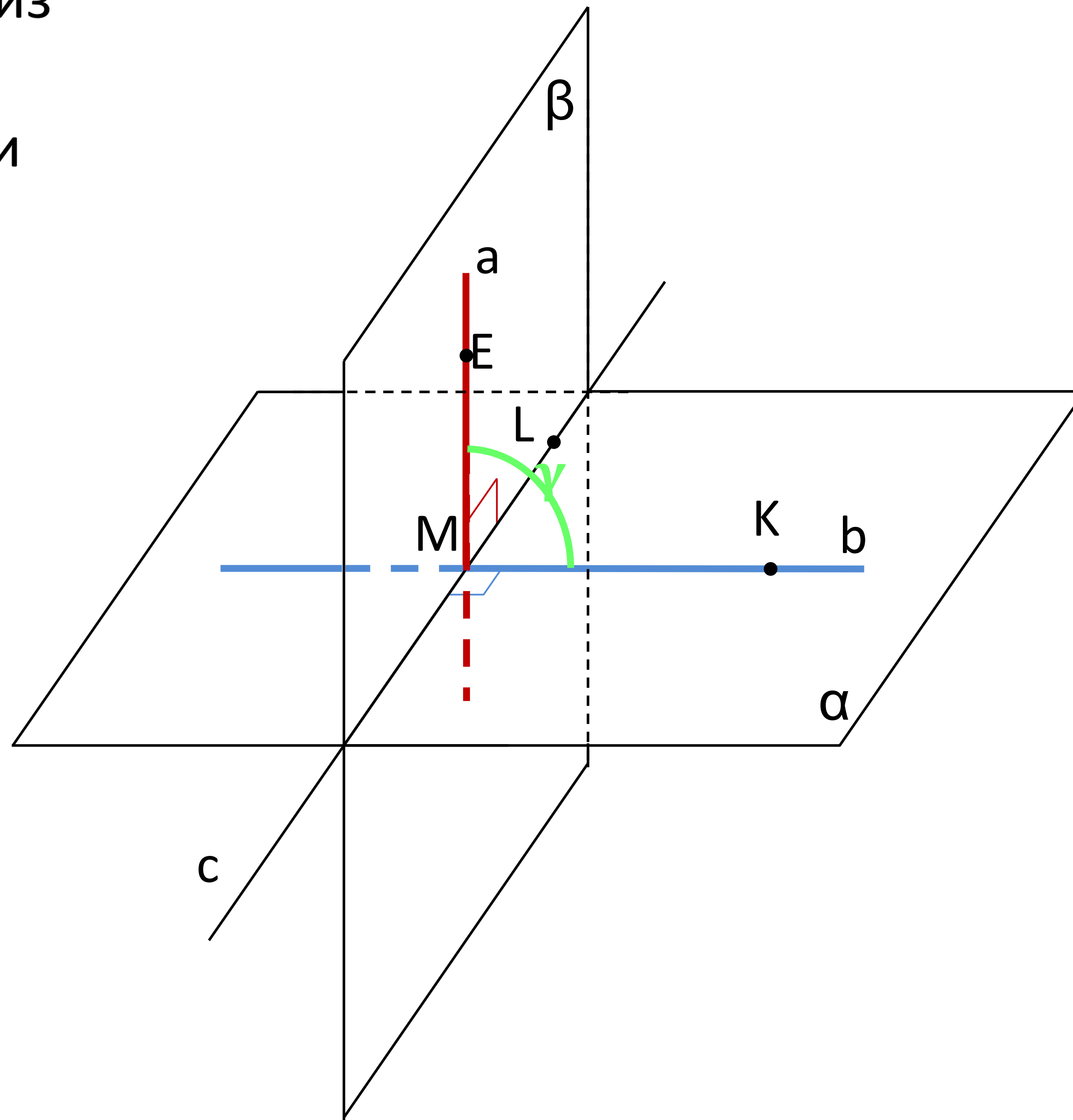
В плоскости α проведем прямую b так,
чтобы $b \perp c$.
Пусть $b \cap c = M$.



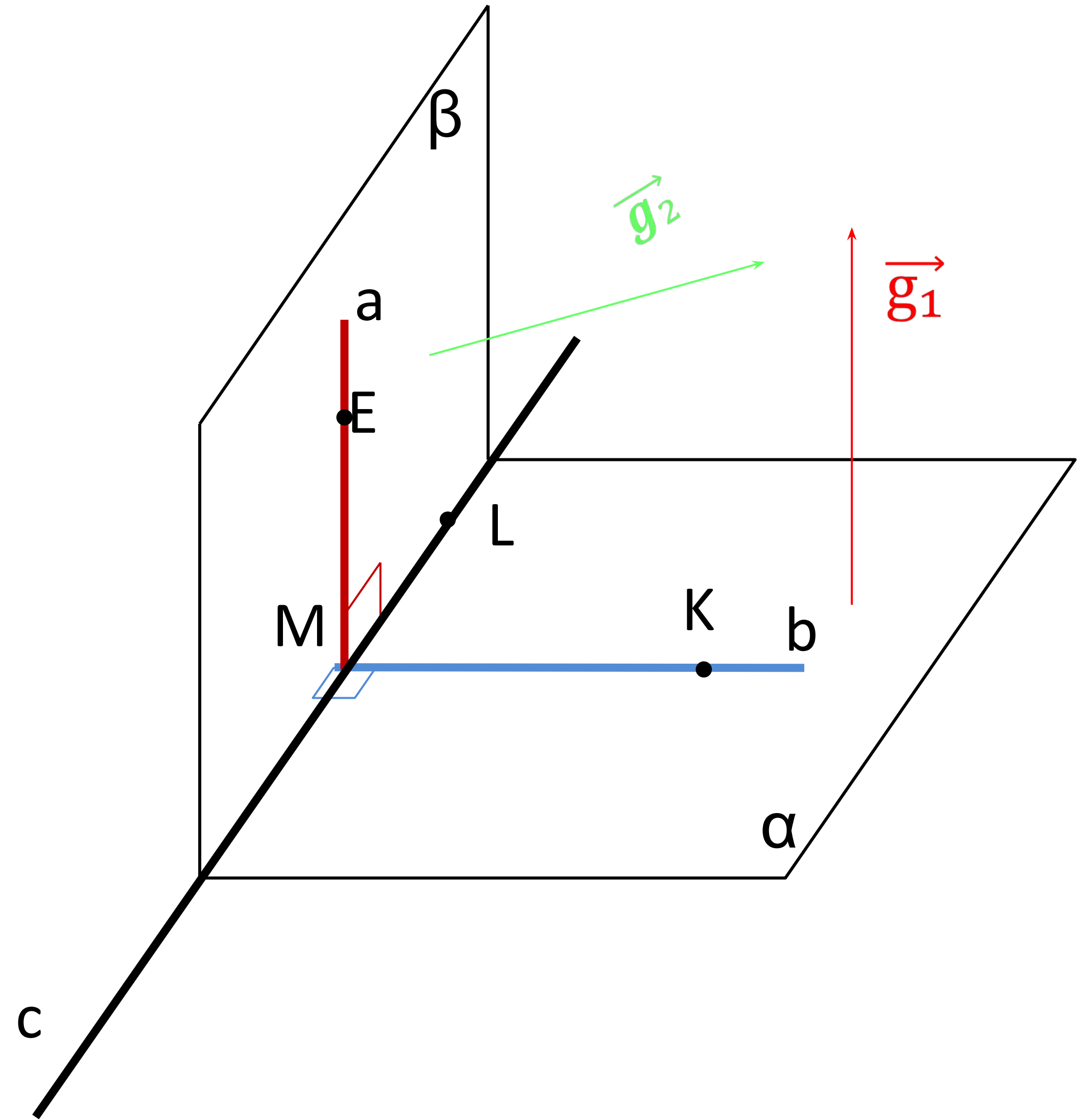
В плоскости β , через точку M
проведем прямую a так, чтобы $a \perp c$.



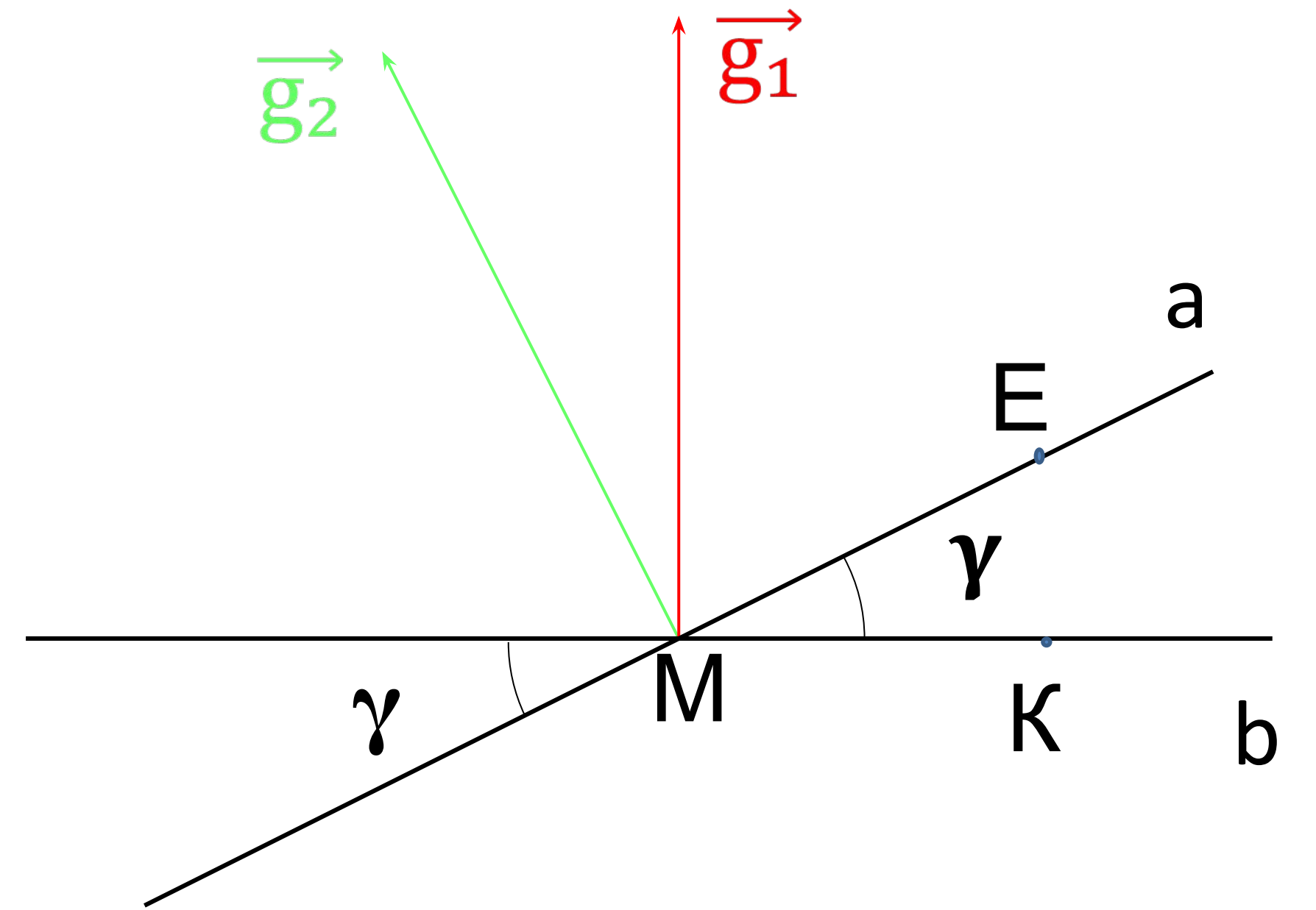
- Пусть $\angle EMLK$ -наименьший из двугранных, который образуется при пересечении плоскостей α и β
- Значит, $\widehat{EMK} = \widehat{E(ML)K} = \widehat{(\alpha;\beta)}$
- Пусть $\widehat{(\alpha;\beta)} = \gamma$



- Пусть: \vec{g}_1 - вектор нормали к плоскости α
- \vec{g}_2 - вектор нормали к плоскости β .

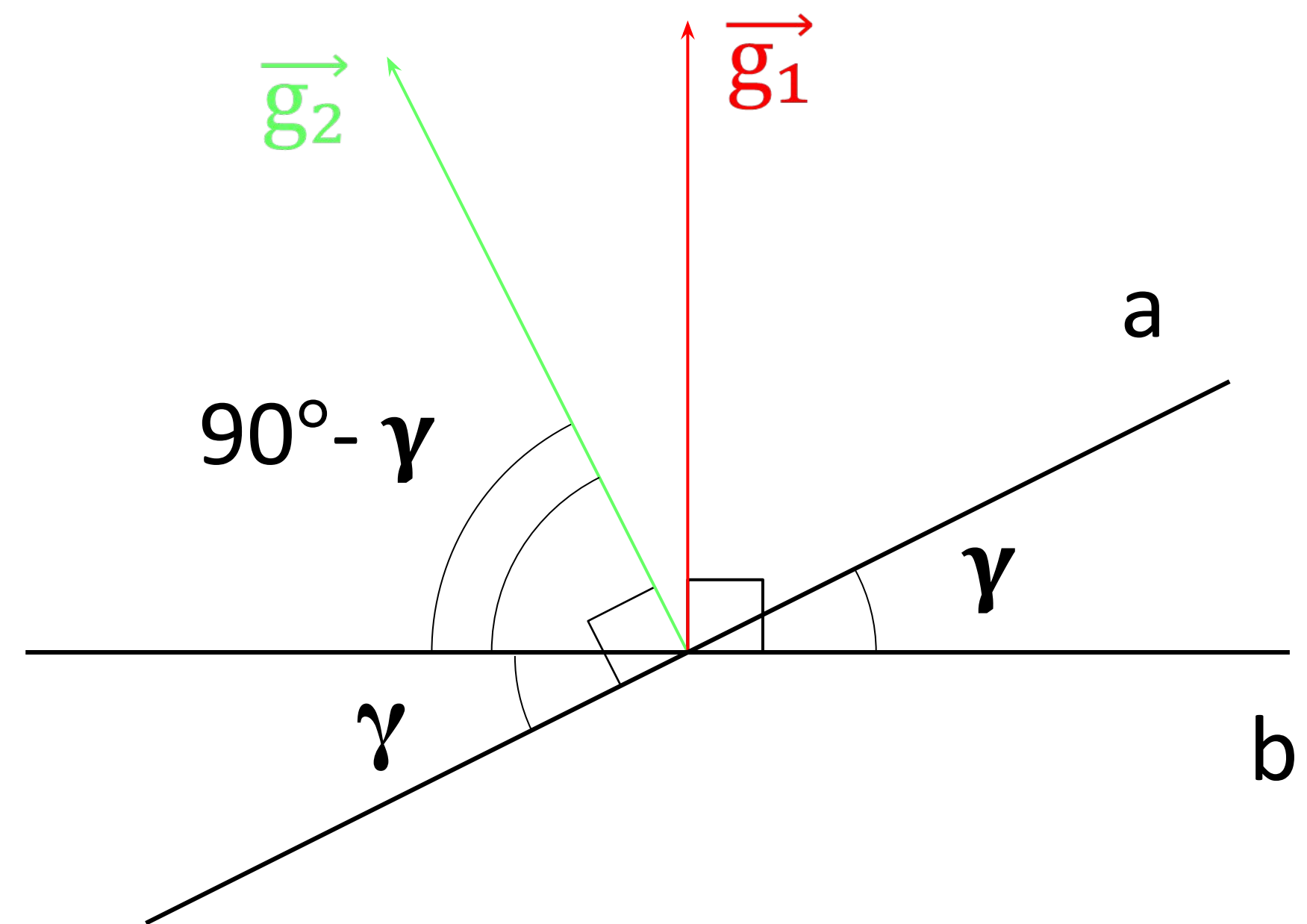


При таком выборе векторов, \vec{g}_1 и \vec{g}_2 ,
угол между ними острый.



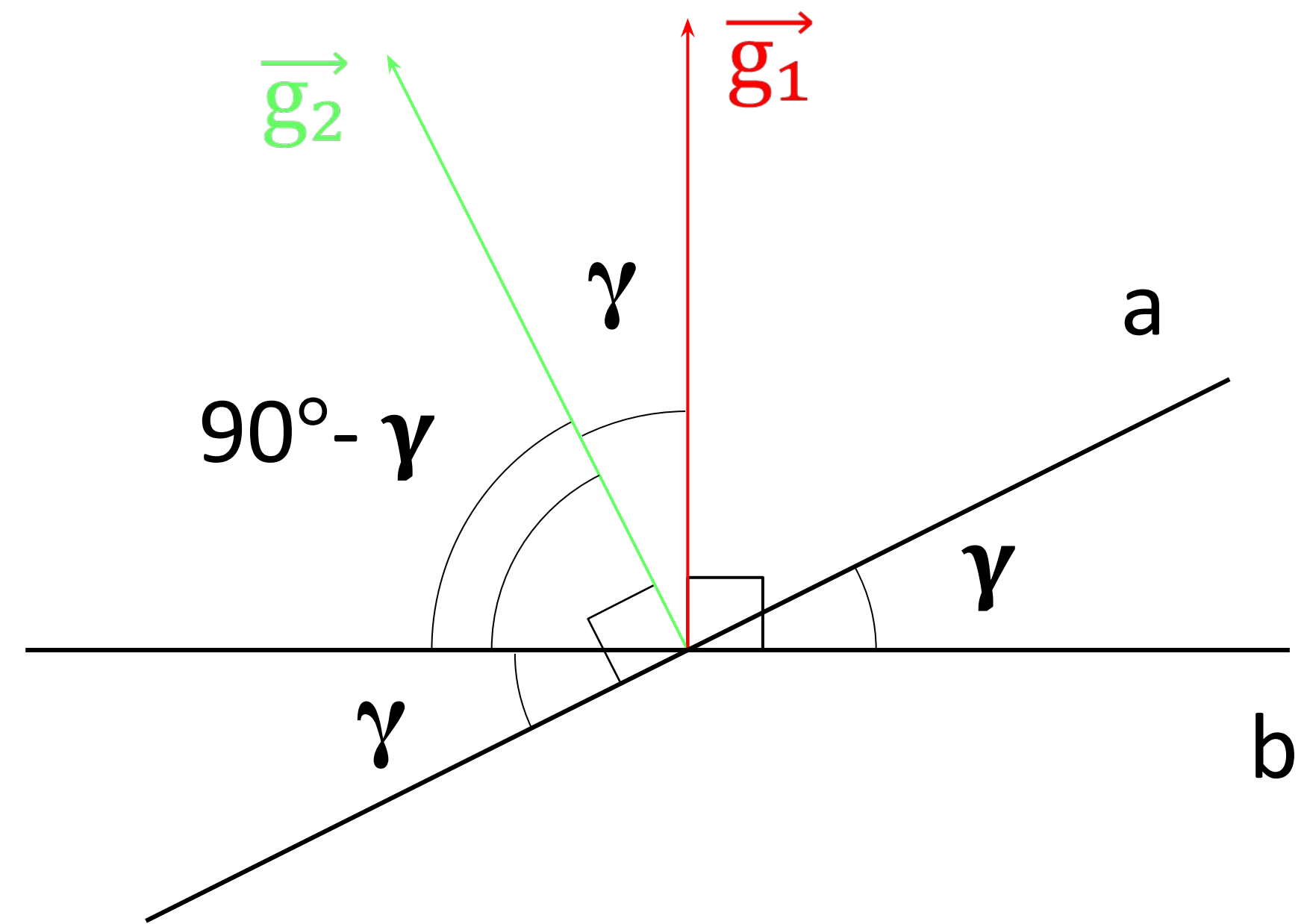
● Прямая a лежит в плоскости β , а \vec{g}_2 - вектор нормали к этой плоскости;

Прямая b лежит в плоскости α , а \vec{g}_1 - вектор нормали к этой плоскости

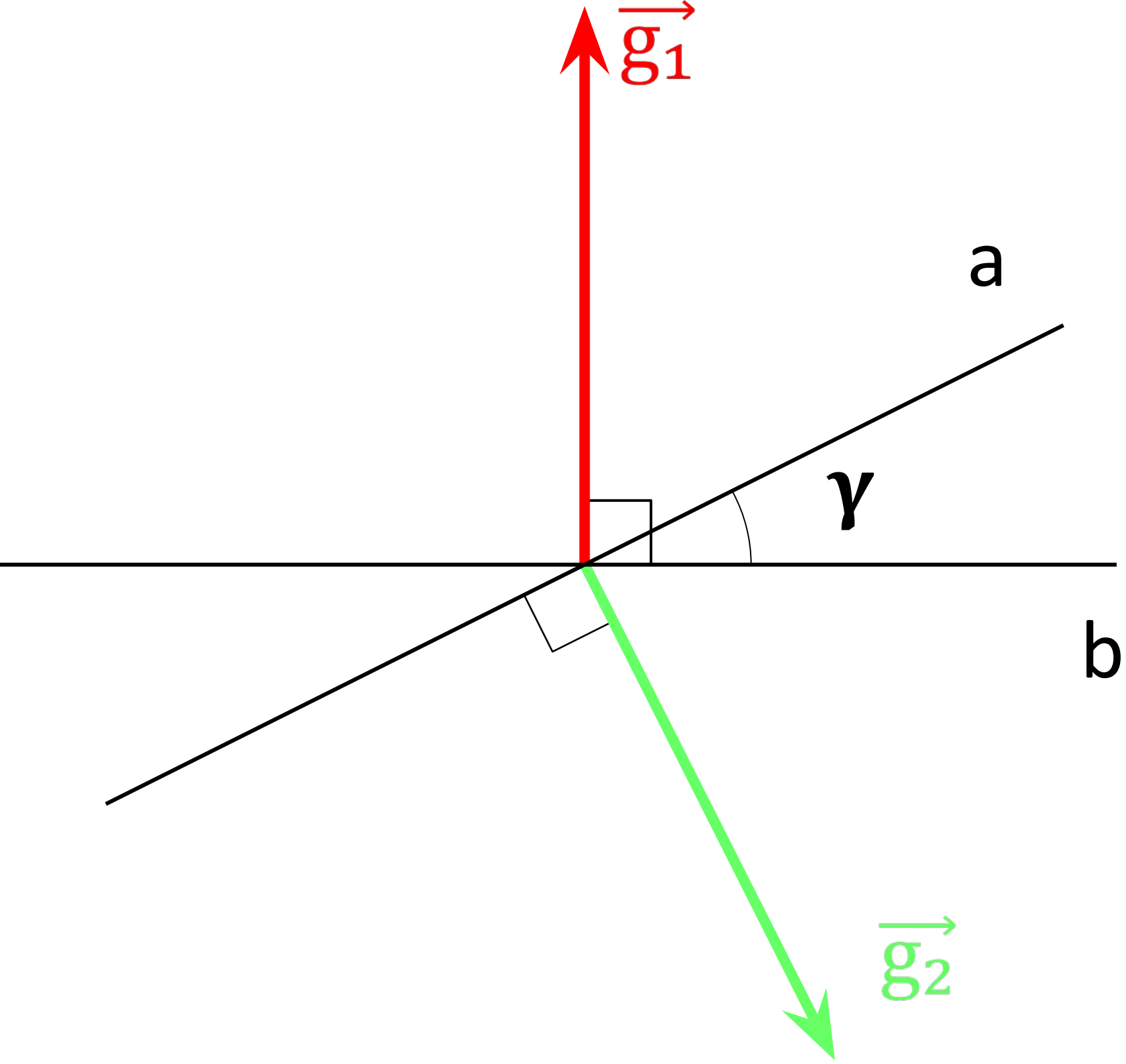


Таким образом, угол между векторами нормалей к плоскостям, равен углу между плоскостями.

$$\cos(\widehat{\vec{g}_1; \vec{g}_2}) = \cos(\gamma) = \cos(\widehat{\alpha; \beta})$$



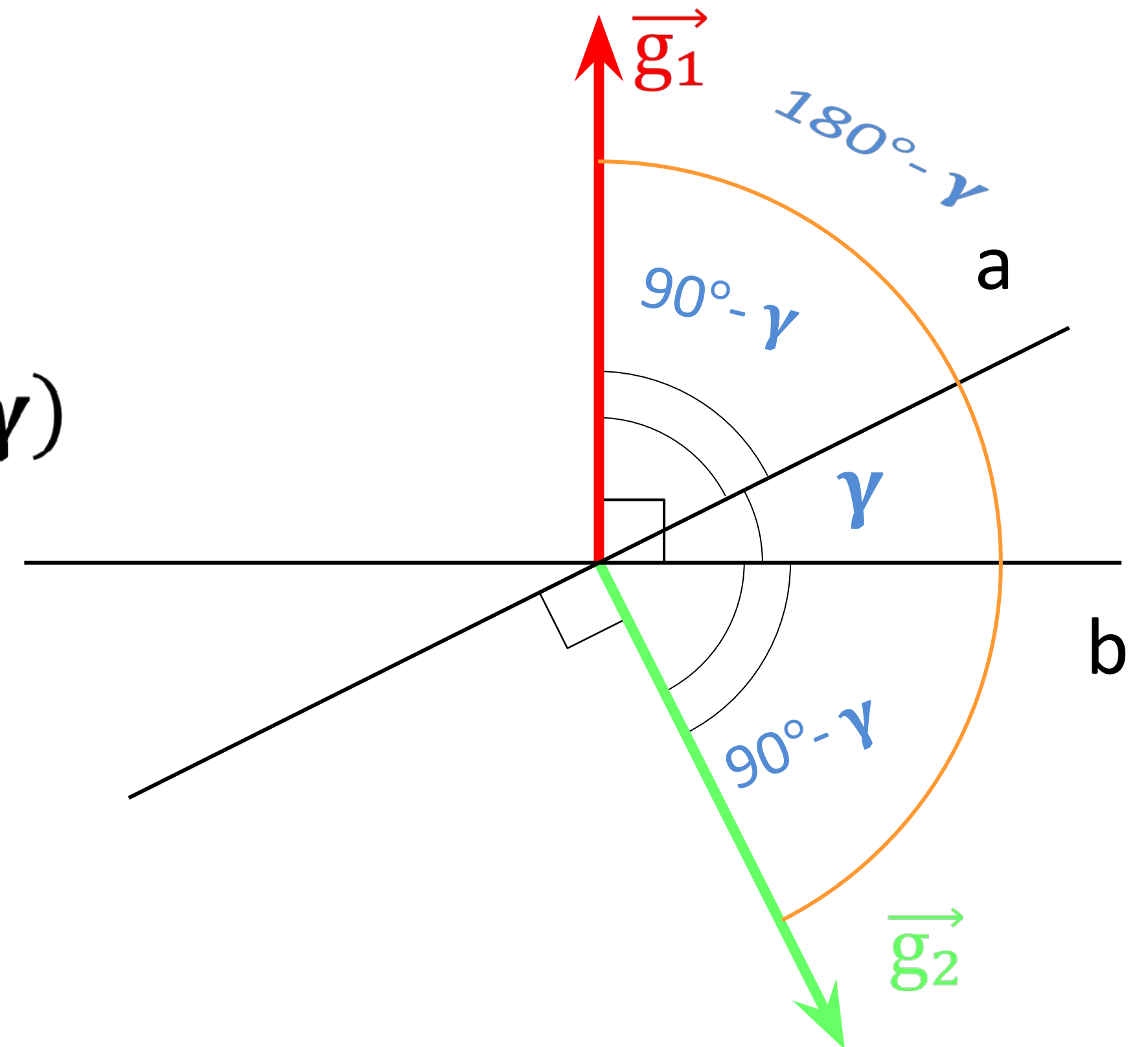
Но, векторы нормалей к плоскостям можно задать и так, что угол между ними будет тупой.

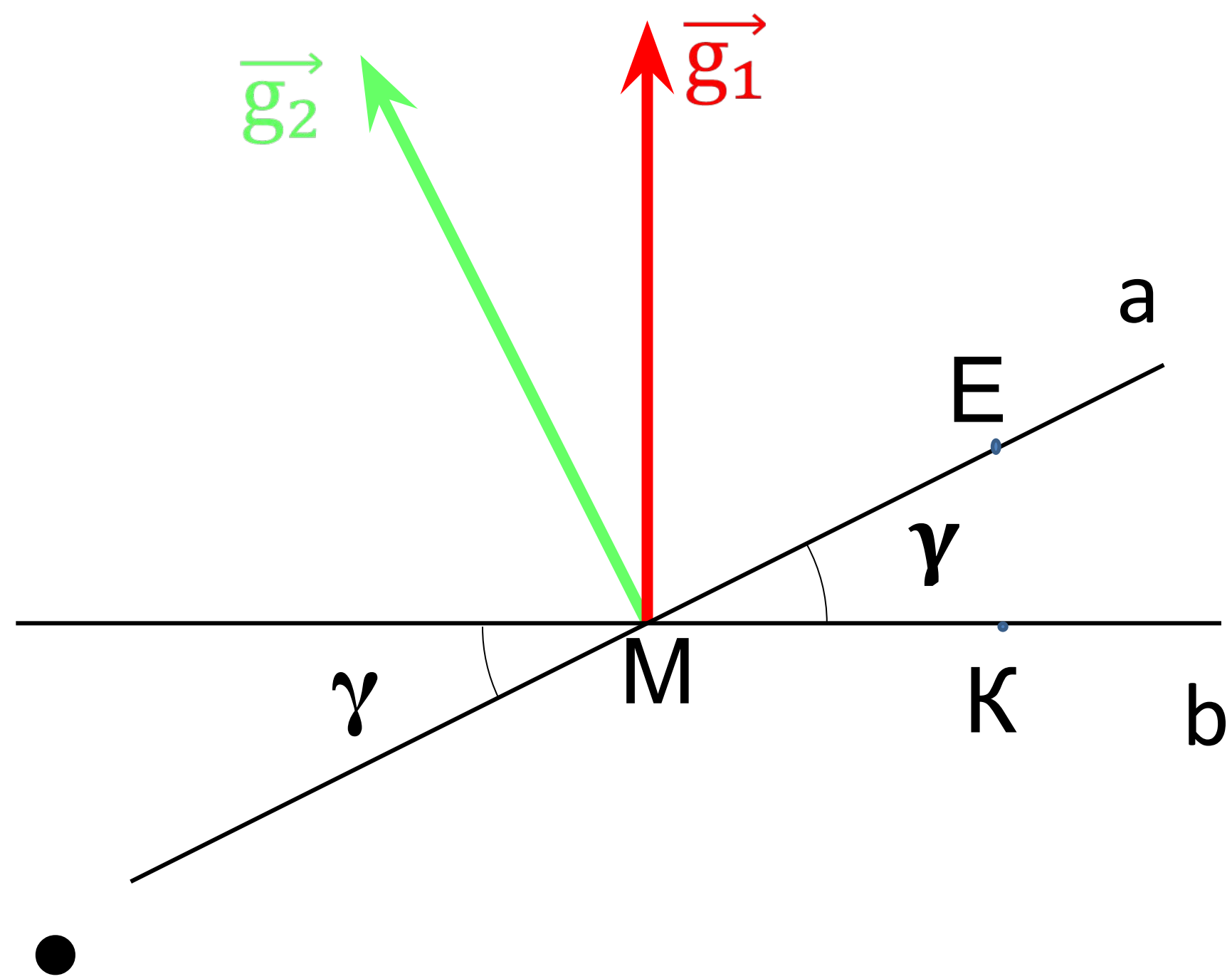


Рассуждая, получаем, что

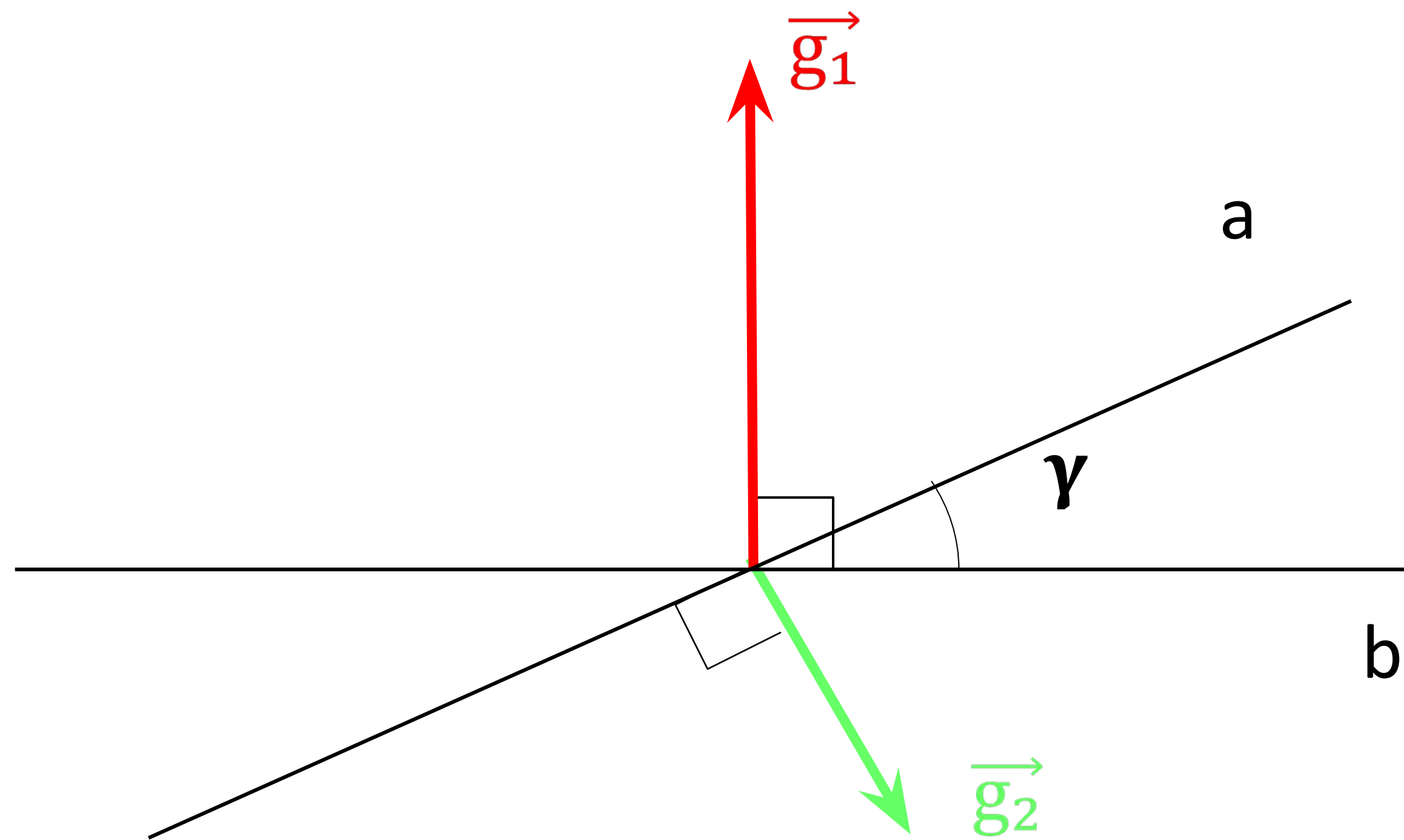
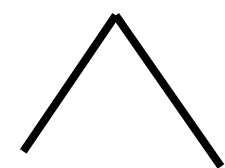
$$\widehat{(\vec{g}_1; \vec{g}_2)} = 180^\circ - \gamma$$

$$\cos \widehat{(\vec{g}_1; \vec{g}_2)} = \cos (180^\circ - \gamma) = -\cos (\gamma)$$

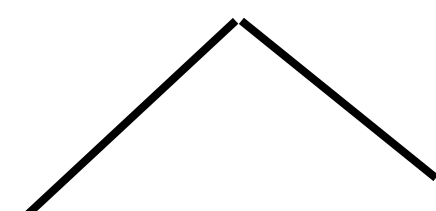




Если $\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2) \geq 0$,
 то $\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2) = \cos(\gamma)$;



Если $\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2) < 0$,
 то $\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2) = -\cos(\gamma)$



$$|\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2)| = \cos(\alpha; \beta)$$

- Таким образом:

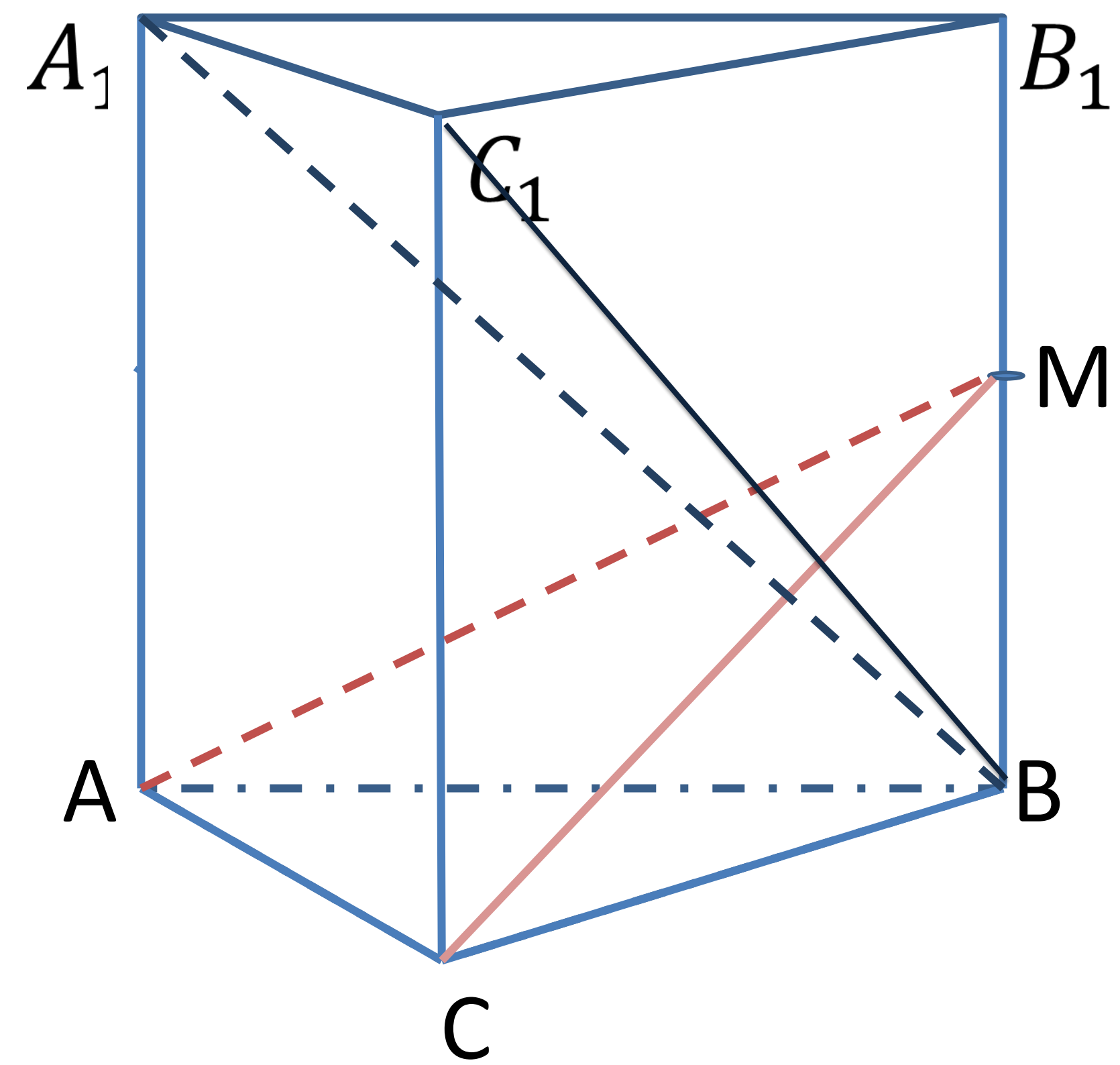
$$\cos(\alpha; \beta) = |\cos(\vec{g}_1; \vec{g}_2)| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \frac{|\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2|}{|\vec{g}_1| \cdot |\vec{g}_2|}, \text{ где}$$

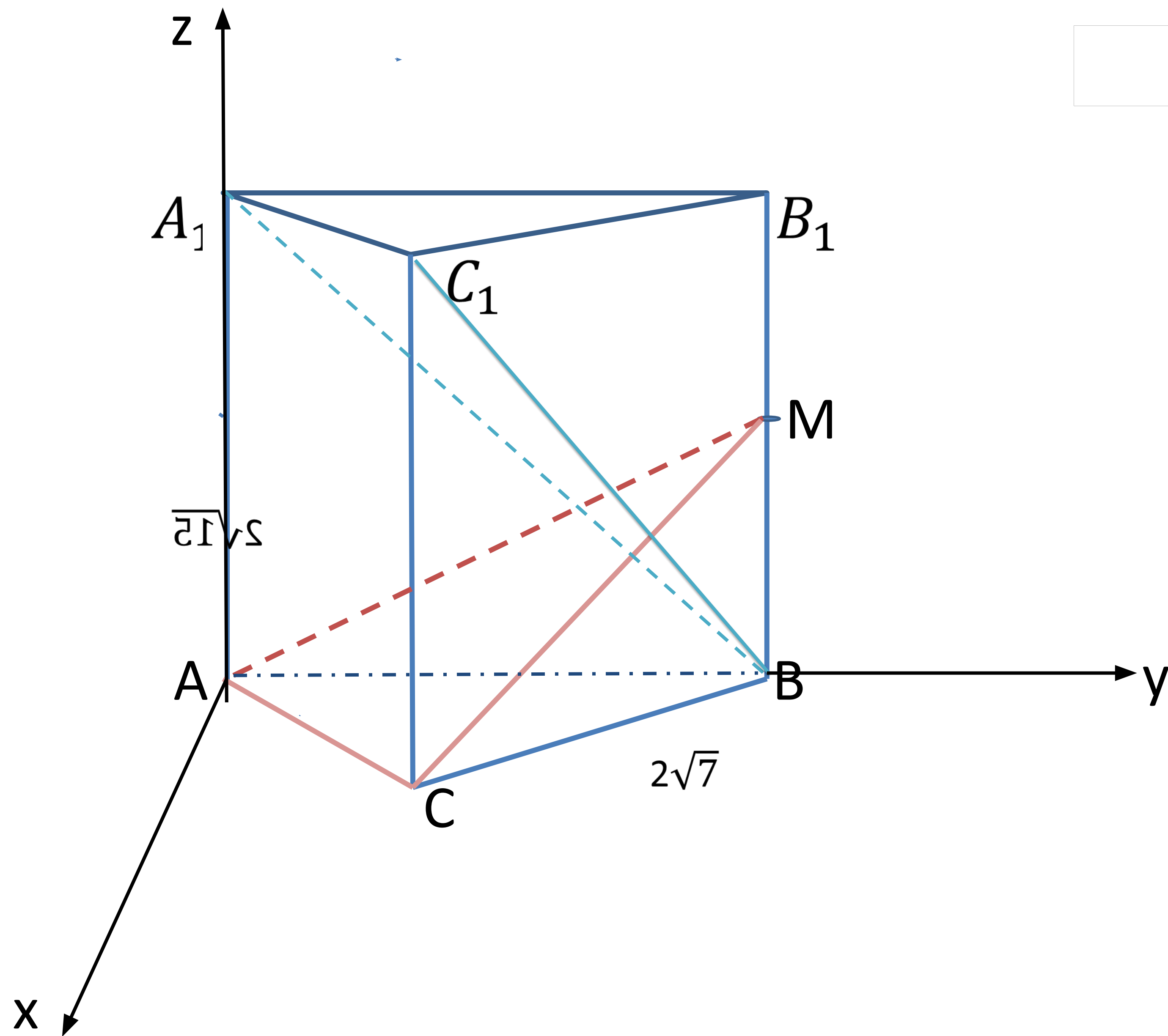
$\vec{g}_1 \{a_1; b_1; c_1\}$ — вектор нормали к плоскости α ,

$\vec{g}_2 \{a_2; b_2; c_2\}$ — вектор нормали к плоскости β .

- Практика использования выведенной формулы нахождения угла между ПЛОСКОСТЯМИ

Дана правильная треугольная призма $ABC A_1 B_1 C_1$ со стороной основания $2\sqrt{7}$ и боковым ребром $2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра BB_1 . Найдите угол между плоскостями AMC и $A_1 B C_1$.





(C_1A_1B)

$$B(0;2\sqrt{7};0)$$

$$A_1(0;0;2\sqrt{15})$$

$$C_1(\sqrt{21};\sqrt{7};2\sqrt{15})$$

(ACM)

$$C(\sqrt{21};\sqrt{7};0)$$

$$M(0;2\sqrt{7};\sqrt{15})$$

$$A(0;0;0)$$

$(C_1 A_1 B)$

$$B(0; 2\sqrt{7}; 0)$$

$$\overrightarrow{A_1 C_1} (\sqrt{21}; \sqrt{7}; 0)$$

$$A_1(0; 0; 2\sqrt{15})$$

$$\overrightarrow{A_1 B} (0; 2\sqrt{7}; -2\sqrt{15})$$

$$C_1(\sqrt{21}; \sqrt{7}; 2\sqrt{15})$$

Пусть $\vec{k}(a; b; c)$ - один из векторов нормали к рассматриваемой плоскости. Тогда, $\vec{k} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1} = 0$ и $\vec{k} \cdot \overrightarrow{A_1 B} = 0$

Записав скалярные произведения векторов через координаты этих векторов и выполнив некоторые преобразования, получим следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}a + b = 0 \\ 0 = c\sqrt{21} - d\sqrt{7} \end{array} \right.$$

Поскольку количество неизвестных превышает количество уравнений, найдем значения переменных с точностью до коэффициентов. Пусть $a = \sqrt{3}$, тогда, $b = -3$, $c = \frac{-\sqrt{105}}{5}$

(АСМ)

A(0,0,0)

C($\sqrt{21}, \sqrt{7}, 0$)

M($0, 2\sqrt{7}, \sqrt{15}$)

$Ax + By + Cz + D = 0$ (каноническое уравнение плоскости)

$$\begin{cases} A\sqrt{3} + B = 0 \\ B2\sqrt{7} + C\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

Пусть $A = \sqrt{5}$, тогда $B = -\sqrt{15}$, $C = 2\sqrt{7}$

Таким образом,

$$\cos(\mu) = \frac{|\sqrt{15} + 3\sqrt{15} - \frac{14\sqrt{15}}{5}|}{\sqrt{5+15+28} \cdot \sqrt{3+9+\frac{105}{25}}} = \frac{1}{6},$$

где μ – угол между рассматриваемыми плоскостями

Ответ: $\arccos \frac{1}{6}$