

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При практическом осуществлении процесса измерений независимо от точности средств измерений, правильности методики и тщательности выполнения измерений результаты измерений отличаются от истинного значения измеряемой величины, т. е. неизбежны погрешности измерений. При оценке погрешности вместо истинного значения принимают действительное; следовательно, можно дать лишь приближенную оценку погрешности измерений.

Погрешность результата измерения - разность между измеренным значением величины и опорным значением величины.

Если в качестве опорного значения выступает истинное значение величины, то значение погрешности неизвестно.

Погрешность результата измерения может быть выражена в единицах измеряемой величины или в долях (или в процентах) ее значения, это число, указывающее возможные границы неопределенности значения измеряемой величины.

Оценка достоверности результата измерений, т. е. определение погрешности измерений – одна из основных задач метрологии.

Погрешности условно можно разделить на погрешности средств измерения и погрешности результата измерений.

Классификация погрешностей

По способу числового выражения: абсолютные и относительные погрешности.

В зависимости от источника возникновения: инструментальные, методические, отсчитывания и установки.

По закономерностям проявления: систематические, прогрессирующие, случайные и грубые.

Абсолютная погрешность измерения - погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

Абсолютная погрешность Δ – это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины $\Delta = X - X_{и}$, на практике $\Delta \approx X - X_{д}$

Относительная погрешность измерения - погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к опорному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta}{X}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{X_{и}} \approx \frac{\Delta}{X_{д}} 100, \%$$

$$\delta = \frac{\Delta}{X_{и}} 100, \% \approx \frac{\Delta}{X_{д}} 100, \%$$

Инструментальная погрешность измерения - составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений.

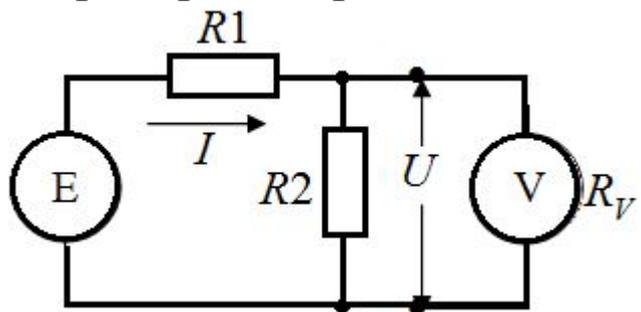
Они принадлежат данному средству измерений, могут быть определены при его испытаниях и занесены в его паспорт.

Эти погрешности обусловлены конструктивными и технологическими недостатками средств измерений, а также следствием их износа, старения или неисправности.

Погрешность метода измерений - составляющая погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений.

Методические погрешности могут возникать из-за несовершенства физической модели явлений, положенных в основу метода измерений, неточности соотношений, используемых для нахождения оценки измеряемой величины, а также из-за несоответствия измеряемой величины и ее модели.

Пример: Измеряем падение напряжения на резисторе R_2 вольтметром.



$$R_V = \infty$$

$$U = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_V \neq \infty$$

$$U_1 = E \frac{R_2 \cdot R_V}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_V + R_2 \cdot R_V} < U$$

Отличительная особенность методических погрешностей в том, что они не могут быть указаны в паспорте прибора, а должны оцениваться самим экспериментатором при организации выбранной методики измерений, поэтому он обязан четко различать фактически *измеряемую* им величину от *подлежащей измерению*.

Погрешность отсчитывания происходит от недостаточно точного отсчитывания показаний. Она обусловлена субъективными особенностями наблюдателя и вида отсчетного устройства

Погрешности отсчитывания отсутствуют при использовании цифровых измерительных приборов.

Погрешность установки вызывается отклонением условий измерения от нормальных, т. е. условий, при которых производилась градуировка и поверка средств измерений. Сюда относится, например, погрешность от неправильной установки прибора в пространстве или его указателя на нулевую отметку, от изменения температуры, напряжения питания и других влияющих величин.

По закономерностям проявления: систематические, прогрессирующие, случайные и грубые.

Систематическая погрешность измерения - составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Особенность систематических погрешностей состоит в том, что зависимость их от влияющих величин подчиняется определенному закону.

Наличие исключенных систематических погрешностей определяет правильность измерений, качество, отражающее близость к нулю систематических погрешностей.

Причины возникновения: несовершенство используемых средств и методов измерений, неправильная установка СИ, влияние внешних факторов на параметры СИ и на объект измерения и др.

В зависимости от характера изменения во времени разделяются на: постоянные, прогрессирующие, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.

Постоянные - погрешности, которые в течение длительного времени, например, в течение времени выполнения всего ряда измерений, остаются постоянными (или неизменными). Они встречаются наиболее часто.

Примеры: погрешности, обусловленные неточностью подгонки значения меры, неправильной градуировкой шкалы прибора и др.

Прогрессирующие погрешности — непрерывно возрастающие или убывающие погрешности.

Как правило, вызываются процессами старения тех или иных деталей аппаратуры (разрядка источников питания, старение резисторов, конденсаторов, деформация механических деталей, усадка бумажной ленты в самопишущих приборах и т. п.).

Пример: погрешности вследствие износа измерительных наконечников, контактирующих с деталью при контроле ее прибором активного контроля.

Могут быть скорректированы путем введения поправки лишь в заданный момент времени, а далее вновь непредсказуемо возрастают или убывают.

Периодические погрешности — погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора.

Пример: погрешность возникающая при круговой шкале, если её ось не совпадает с осью вращения.

Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, происходят вследствие совместного действия нескольких систематических погрешностей.

В зависимости от характера изменения по диапазону измерений систематические погрешности подразделяются на постоянные и пропорциональные.

Пропорциональные погрешности - погрешности, значение которых пропорционально значению измеряемой величины.

Поправка - значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения составляющих систематической погрешности.

Знак поправки противоположен знаку погрешности

Различают: неисправленный и исправленный результат измерения.

Неисправленный результат измерения - значение величины, полученное при измерении до введения в него поправок, учитывающих систематические погрешности.

Исправленный результат измерения - полученное при измерении значение величины и уточненное путем введения в него необходимых поправок на действие систематических погрешностей.

Случайная погрешность измерения - составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных в определенных условиях.

Обнаруживаются случайные погрешности при многократных измерениях одной и той же величины (отдельные измерения в этом случае называются наблюдением) одними и теми же средствами измерения в одинаковых условиях одним и тем же наблюдателем, т. е. при равноточных (равнорассеянных) измерениях. Влияние случайных погрешностей на результат измерения учитывается методами математической статистики и теории вероятности.

Грубая погрешность измерений – случайная погрешность измерений, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях погрешности.

Как правило, результаты измерений, содержащие грубые погрешности, не принимаются во внимание, поэтому грубые погрешности мало влияют на точность измерения.

Погрешность измерения равна сумме случайной и систематической погрешностей.

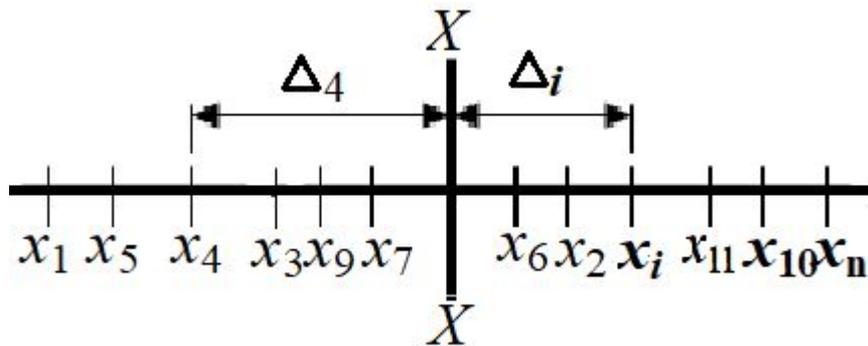
Вероятностный подход к описанию погрешностей

Законы распределения случайных погрешностей.

Случайные погрешности обнаруживают при проведении ряда измерений одной и той же величины. При правильном проведении измерений, достаточном их числе и исключении систематических погрешностей и промахов можно утверждать, что истинное значение измеряемой величины не выходит за пределы значений, полученных при этих измерениях. Оно остается неизвестным до тех пор, пока не определено теоретически вероятное значение случайной погрешности.

Пусть величину X измеряли n раз и наблюдали при этом значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Случайная абсолютная погрешность единичного измерения будет равна:

$$\Delta_i = x_i - X$$



Распределение результатов измерений

При достаточно большом числе n одни и те же погрешности повторяются и можно установить относительную частоту (частость) их появления.

Частость - отношение числа полученных одинаковых данных m_i к общему числу проведенных измерений n .

При продолжении измерений величины X эта частота не изменится, поэтому ее можно считать вероятностью появления погрешности при данных измерениях:

$$p(X_i) = m_i / n$$

Статистическая зависимость вероятности появления случайных погрешностей от их значения называется *законом распределения погрешностей* или *законом распределения вероятности*.

Различают два вида описания законов распределения: *интегральный* и *дифференциальный*.

Интегральный закон, или *функция распределения вероятностей* $F(\Delta)$ случайной погрешности Δ_i в i -м опыте - функция, значение которой для каждого Δ определяется вероятностью события $P(\Delta)$ заключающегося в том, что случайная погрешность Δ_i принимает значения, меньше некоторого значения Δ , т. е. функцию $F(\Delta) = P[\Delta_i < \Delta]$.

Эта функция при изменении Δ от $-\infty$ до $+\infty$ принимает значения от 0 до 1 и является неубывающей (рис. 1а). Она существует для всех случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

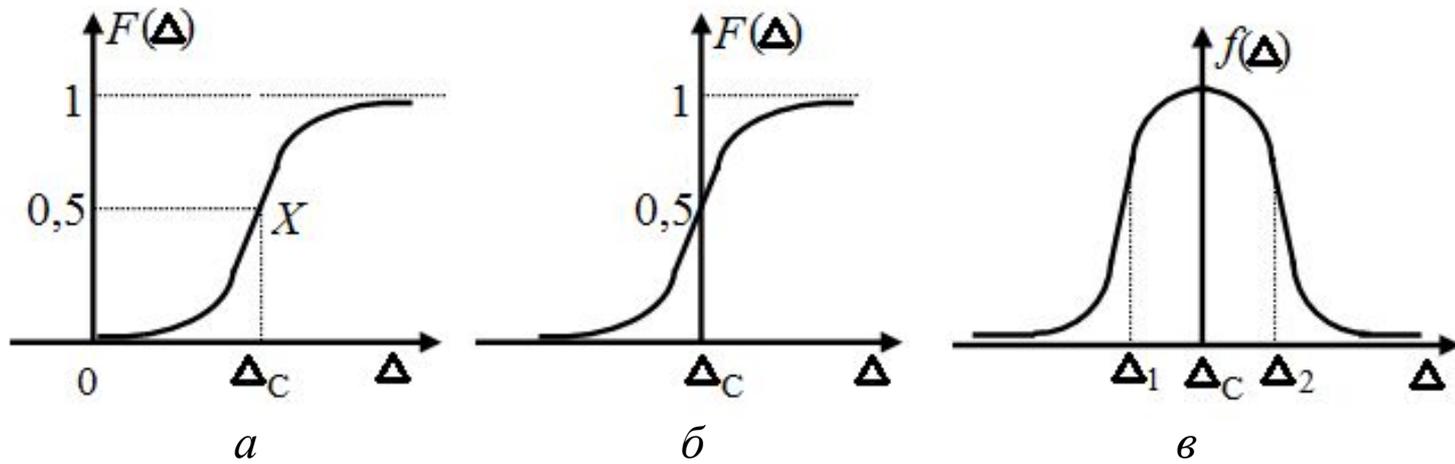


Рис. 1

Если $F(\Delta)$ симметрична относительно точки X , соответствующей вероятности 0,5, то распределение результатов наблюдения будет симметрично относительно истинного значения X . В этом случае целесообразно $F(\Delta)$ сдвинуть по оси абсцисс на значение $\Delta_x = \Delta_c$, т. е. исключить систематическую составляющую погрешности и получить функцию распределения случайной составляющей погрешности. (рис. 1б). Функция распределения вероятности погрешности Δ отличается от функции распределения вероятности случайной составляющей погрешности только сдвигом по оси абсцисс на значение систематической составляющей погрешности.

Дифференциальный закон распределения вероятностей для случайной погрешности с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения $F(\Delta)$ называют функцию:

$$f(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta} = F'(\Delta)$$

Эта зависимость представляется *плотностью распределения вероятностей*. Ее график может иметь различную форму в зависимости от закона распределения погрешностей. Для $F(\Delta)$ (рис. 1б) кривая распределения $f(\Delta)$ имеет форму, близкую к форме колокола (рис. 1в).

Значение $f(\Delta)d(\Delta)$ есть элемент вероятности, равный площади прямоугольника с основанием $d\Delta$ и абсциссами Δ_1, Δ_2 , называемыми квантилями.

$$F(+\infty) = 1$$

Площадь под кривой $f(\Delta)$ равна единице и отражает вероятность всех возможных событий.

В практике измерений одним из наиболее распространенных законов распределения случайных погрешностей является *нормальный закон* (Гаусса):

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)}$$

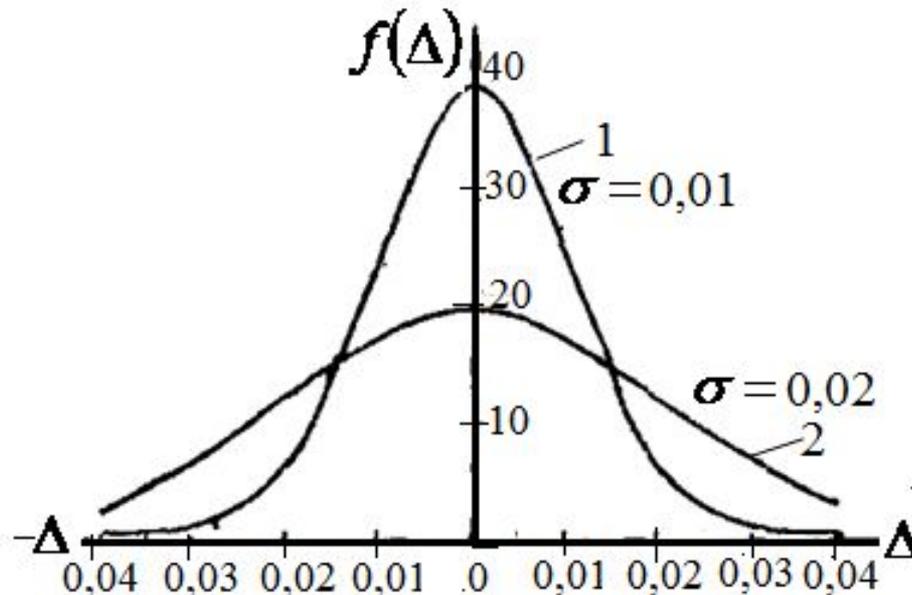
$f(\Delta)$ - плотность вероятности случайной погрешности; $\Delta = x_i - X$

σ - среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение может быть выражено через случайные отклонения результатов наблюдений Δ_i

$$\sigma = \sqrt{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2)/(n-1)}$$

Чем меньше σ тем чаще встречаются малые случайные погрешности, т. е. тем точнее выполнены измерения.



Основными характеристиками законов распределения являются *математическое ожидание* и *дисперсия*.

Математическое ожидание случайной величины – это значение, вокруг которого группируются результаты отдельных наблюдений. Математическое ожидание дискретной случайной величины $M[X]$ определяется как сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i$$

Для непрерывных случайных величин

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$f(x)$ – функция плотности вероятности.

Для нормального распределения случайных погрешностей математическое ожидание равно нулю. Если же рассматривать нормальное распределение результатов, то математическое ожидание будет соответствовать истинному значению измеряемой величины X .

Дисперсия ряда наблюдений характеризует степень рассеивания (разброса) результатов отдельных наблюдений вокруг математического ожидания:

$$D[X] = D_x = M[(x_i - m_x)^2]$$

Чем меньше дисперсия, тем точнее выполнены измерения. Дисперсия выражается в квадратных единицах измеряемой величины. В качестве характеристики точности ряда наблюдений применяют среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

При проведении n измерений погрешность будет различной

$$\Delta_i = x_i - X$$

где Δ_i - погрешность i -го измерения, x_i - результат i -го измерения.

При практических расчетах используется оценка истинного значения - *среднее арифметическое значение ряда измерений*:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$$

Отклонение результата каждого измерения от среднего значения определяется как:

$$v_i = x_i - \bar{X}$$

v_i – отклонение результата единичного измерения от среднего значения.

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_i^2 \rightarrow \min$$

Затем вычисляют оценку значения *средней квадратической погрешности* для данного ряда измерений

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n-1}}$$

При достаточно большом числе измерений, имеющих независимые случайные погрешности, оценка S сходится по вероятности к σ . Таким образом,

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n-1}}$$

Так как среднее арифметическое значение также является случайной величиной, введено понятие среднеквадратического отклонения среднего арифметического значения σ_{CP} .

$$\sigma_{\text{CP}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n \cdot (n-1)}}$$

При оценке результатов измерений используется понятие *максимальной* или *предельной допустимой погрешности*, значение которой определяют в долях σ или S . Есть разные критерии установления максимальной погрешности, т. е. границы поля допуска $\pm\Delta$, в которые случайные погрешности должны уложиться. Критерий максимальной погрешности $\Delta = 3\sigma$ (или $3S$).

Понятия *доверительной вероятности* и *доверительного интервала*.

Пусть $P_{\text{д}}$ есть вероятность того, что \bar{X} отличается от X не более чем на Δ , т. е.

$$P(\bar{X} - \Delta < A < \bar{X} + \Delta) = P_{\text{д}}$$

Вероятность $P_{\text{д}}$ называется *доверительной вероятностью*, а интервал значений измеряемой величины от $(\bar{X} - \Delta)$ до $(\bar{X} + \Delta)$ - *доверительным интервалом*.

Это означает что доверительный интервал от $(\bar{X} - \Delta)$ до $(\bar{X} + \Delta)$ включает в себе истинное значение X .

Для достаточно полной характеристики случайной погрешности надо располагать двумя числами – доверительной вероятностью и соответствующим ей доверительным интервалом.

Если закон распределения вероятностей погрешностей известен, то по заданной доверительной вероятности можно определить доверительный интервал. При достаточно большом числе измерений часто используется нормальный закон. При небольшом числе измерений, результаты которых принадлежат нормальному распределению, следует использовать распределение Стьюдента. Это распределение имеет плотность вероятностей, практически совпадающую с нормальной при больших n , но значительно отличающуюся от нормальной при малых n .

В таблице приведены так называемые квантили распределения Стьюдента $|t(n)|_{P_D}$ для числа измерений $n = 2 \dots 20$ и доверительных вероятностей $P_D = 0,5 \dots 0,999$

n	Значения квантилей распределения Стьюдента $t(n)$ при доверительной вероятности P_D									
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
2	1,000	1,376	1,963	3,080	6,310	12,71	31,80	63,70	127,3	637,2
3	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,30	6,96	9,92	14,10	31,60
4	0,765	0,978	1,250	1,638	2,350	3,18	4,54	5,84	7,50	12,94
5	0,741	0,941	1,190	1,533	2,130	2,77	3,75	4,60	5,60	8,61
6	0,727	0,920	1,156	1,476	2,020	2,57	3,36	4,03	4,77	6,86
7	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
8	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	4,03	5,40
9	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
10	0,703	0,883	1,110	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
11	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
12	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	3,50	4,49
13	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
14	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
15	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
16	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
17	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
18	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,22	3,96
19	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
20	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Обычно таблицы распределения Стьюдента приводятся не для значений n и $P_{\text{д}}$, а для значений $m-1$ и $\alpha = 1 - P_{\text{д}}$. Чтобы определить доверительный интервал, надо для данных n и $P_{\text{д}}$ найти квантиль $|t(n)|_{P_{\text{д}}}$ и вычислить величины

$$X_{\text{Н}} = \bar{X} - \sigma_{\text{ср}} |t(n)|_{P_{\text{д}}} \quad X_{\text{В}} = \bar{X} + \sigma_{\text{ср}} |t(n)|_{P_{\text{д}}}$$

которые будут являться нижней и верхней границами доверительного интервала.

После нахождения доверительных интервалов для заданной доверительной вероятности согласно выше приведенной методике делают запись результата измерения в виде:

$$\bar{X}; \quad \Delta = \Delta_{\text{Н}} \div \Delta_{\text{В}}; \quad P_{\text{д}}$$

где \bar{X} - оценка истинного значения результата измерения в единицах измеряемой величины; Δ - погрешность измерения; $\Delta_{\text{В}} = +\sigma_{\text{ср}} |t(n)|_{P_{\text{д}}}$ и $\Delta_{\text{Н}} = -\sigma_{\text{ср}} |t(n)|_{P_{\text{д}}}$ - верхняя

и нижняя границы погрешности измерения; $P_{\text{д}}$ - доверительная вероятность.