

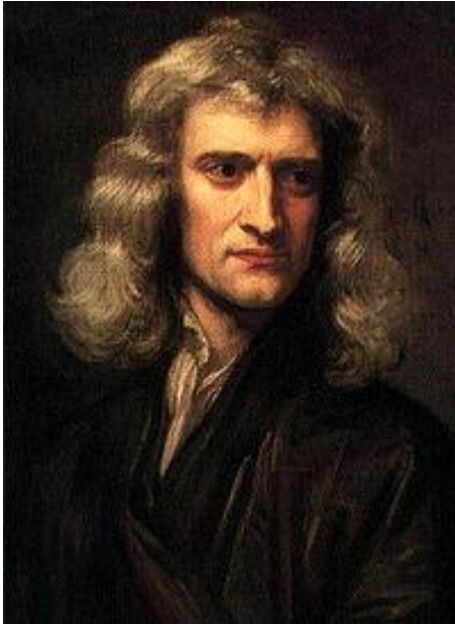
История возникновения дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

- 1) о разыскании касательной к произвольной линии
- 2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Основной предпосылкой для создания дифференциального исчисления явилось введение в математику переменных величин (Декарт). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах Ньютона и Лейбница к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия предела были разработаны Коши лишь в начале 19 в.

04.01.1643 – 31.03.1727



Портрет 1689 года

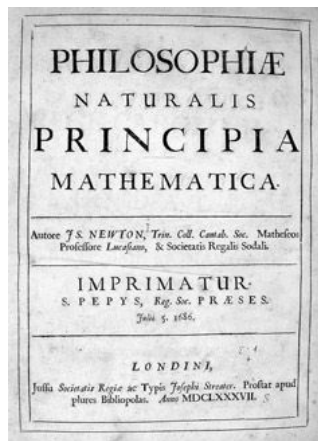
Английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Is. Newton

Вулсторп. Дом, где родился Ньютон.



Титульный лист «Начал» Ньютона.



Один из последних портретов Ньютона (1712)



Тринити-колледж, в котором учился Ньютон.

Почитаемый потомок «Яблони Ньютона». Кембридж, Ботанический сад.



Могила Ньютона в Вестминстерском аббатстве.

01.07.1646 – 25.11.1716



A handwritten signature of Gottfried Wilhelm Leibniz in black ink. The signature is written in a cursive, flowing style, starting with a large 'L' and ending with a decorative flourish.

Немецкий философ, логик, математик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук.

Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления.

Лейбниц создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным. Он заложил основы математической логики, описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.

Выдвинул в психологии понятие бессознательно «малых перцепций» и развил учение о бессознательной психической жизни.



Церковь и Школа Святого Фомы

TABLE 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
DES
NOMBRES

bres entiers au-dessus du double du plus haut degré. Car icy, c'est comme si on disoit, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre & un. Cette propriété sert aux Effayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, & pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pieces.

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

Pour l'Addition par exemple.

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	15

Pour la Soustraction.

1101	13	10000	16	11111	15
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la Multiplication.

11	3	101	5	101	5
11	3	101	5	101	5
11	3	101	5	101	5
1001	9	1111	15	10001	17

Pour la Division.

13	11	101	5
3	11	101	5
11	3	101	5

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut savoir, par exemple, que 6 & 7 pris ensemble font 13, & que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois au 11^{me}, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédens sous les signes ⊕ & ⊙.

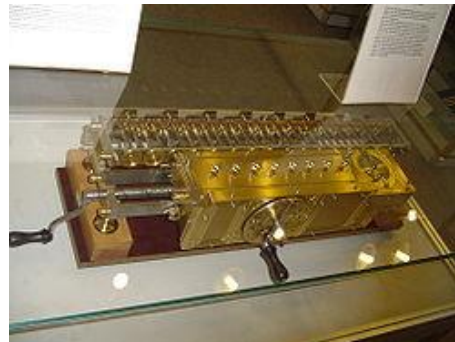


Дом Лейбница (Ганновер), в котором он жил с 1698 года вплоть до своей смерти



Альтдорфский университет

Двоичная система счисления Лейбница. Страница из *Explication de l'Arithmétique Binaire*



Копия механического калькулятора Лейбница



Памятник Готфриду Вильгельму Лейбницу в Лейпциге

21.08.1789 – 23.05.1857



Великий французский математик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда.

Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени.

A handwritten signature in cursive script that reads "B^{me} Augustin Cauchy". The signature is written in dark ink on a light-colored background.



Политехническая Школа



Туринский университет



Сорбонна



Коллеж де Франс

Определение производной

Производная и дифференциал.

Таблица производных.

Необходимое условие дифференцируемости.

Геометрический смысл производной.

Физический смысл производной.

Основные правила вычисления производных.

Производной функции $f(x)$ в точке $x=a$ называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента когда аргумент x стремится к точке a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала и понятие дифференцируемой функции.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x=a$ если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы линейной функции и бесконечно малой величины более высокого порядка, чем эта линейная функция, т. е.

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

где предел функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ равен нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=a$, тогда она дифференцируема в этой точке и постоянную A , входящую в формулу для приращения, можно взять равной $f'(x)$.

Обратно. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$, тогда она имеет производную в этой точке и постоянная A , входящая в формулу для приращения, равна $f'(a)$.

Доказательство. Пусть функция имеет производную $f'(a)$, тогда

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при $x \rightarrow a$ предел, равный нулю.
Из этого равенства находим

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

что доказывает дифференцируемость функции с постоянной

$$A = f'(a).$$

Обратно, пусть функция дифференцируема, тогда

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая при $x \rightarrow a$ предел, равный нулю.

Из этого соотношения получаем, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \alpha(x),$$

и в силу арифметических свойств предела

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (A + \alpha(x)) = A + 0 = A,$$

т. е. производная функции существует и равна A .

Слагаемое $A(x-a)$, входящее в определение дифференцируемости, носит название главной линейной частью приращения функции в точке $x=a$ или дифференциалом функции в этой точке

$$df(a) = A(x - a).$$

Как было только что доказано, необходимым и достаточным условием существования дифференциала является существование производной функции в данной точке. При этом величина A равна производной функции так, что

$$df(a) = f'(a)(x - a).$$

Дифференциалом dx независимой переменной x в точке $x=a$ называется ее приращение

$$dx = x - a.$$

Таким образом, дифференциал функции

$$df(a) = f'(a)dx.$$

На практике обычно принято записывать все формулы, в которые входит производная или дифференциал, не вводя специального обозначения для фиксированной точки a , а использовать для нее традиционное обозначение x . В этом случае неявно подразумевается наличие еще одного символа для обозначения независимой переменной, который не пишется. Это позволяет записать последнюю формулу в виде равенства

$$df(x) = f'(x)dx.$$

$$(\text{const})' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{sh } x)' = \text{ch } x$$

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x$$

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

$$(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \\ &= (\cos a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = (\cos a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$d(\text{const}) = 0 \quad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx \quad d(a^x) = a^x \ln a \, dx \quad d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x \, dx$$

$$d(\text{tg } x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(\text{ctg } x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\text{arctg } x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\text{arcctg } x) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\text{sh } x) = \text{ch } x \, dx$$

$$d(\text{ch } x) = \text{sh } x \, dx$$

$$d(\text{th } x) = \frac{dx}{\text{ch}^2 x}$$

$$d(\text{cth } x) = -\frac{dx}{\text{sh}^2 x}$$

Теорема. Если функция дифференцируема, то она непрерывна.
Доказательство. Согласно доказанной выше теореме

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

Поэтому

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) + f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} f'(a) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

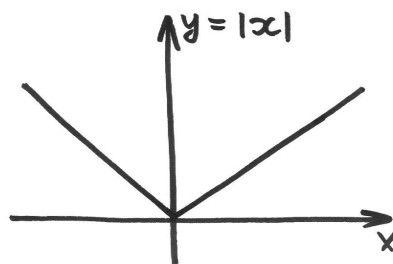
Так как предел функции равен значению в предельной точке, то функция непрерывна.

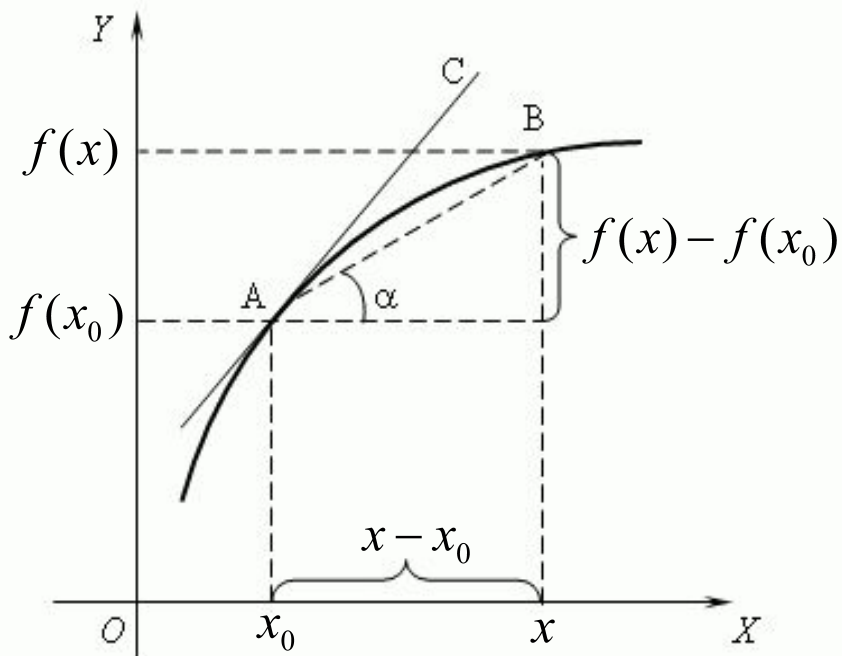
Обратное утверждение неверно. Непрерывная функция может не иметь производной. В этом можно убедиться на примере функции $y=|x|$ в точке $x=0$. Для этой функции правый и левый пределы разностного отношения различны

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-1) = -1.$$

Так как правый и левый пределы различны, то предел разностного отношения не существует, т. е. эта функция не дифференцируема в нуле.





Если существует предел углового коэффициента секущей АВ при $x \rightarrow x_0$, то прямую АС, которая проходит через точку А и имеет угловой коэффициент k , равный этому пределу, называют в этом случае предельным положением секущей или касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Производная функции в заданной точке совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику этой функции в заданной точке.

График функции $y=f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент k , имеет вид

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к графику функции записывается в следующей форме

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, которая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и перпендикулярна касательной в этой точке, называется нормалью. Известно, что для двух перпендикулярных прямых произведение их угловых коэффициентов равно -1 .

Следовательно, если производная функции отлична от нуля, то уравнение нормали имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если же производная равна нулю то касательная параллельна оси Ox и уравнение нормали имеет вид

$$x = x_0.$$

Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение и $x(t)$ – ее координата, отсчитываемая от некоторой точки на прямой, принятой за начало координат. Средняя скорость движения за промежуток времени, прошедший с момента t_0 до момента t , равна

$$v_{cp} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Предел средней скорости при $t \rightarrow t_0$ называется в механике мгновенной скоростью. По определению производной, мгновенная скорость

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{cp} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

Эта интерпретация обобщается на скорость изменения любой физической величины.

Например, если $q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t , то $q'(t)$ – мгновенная скорость его изменения, т. е. сила тока в этот момент времени.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ

Производная суммы.

Производная разности.

Производная произведения.

Производная частного.

Производная сложной функции.

Производная обратной функции.

Производная функции в параметрической форме.

Производная «показательно-степенной» функции.

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f - g)(x) - (f - g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) - (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \right. \\ &+ \left. f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\begin{aligned} (f/g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \right) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) g(x_0) - f(x_0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right] = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сложную функцию

$$F(x) = f(\varphi(x)).$$

Если существуют производные

$$\varphi'(x_0), f'(\varphi(x_0)),$$

то ее производная определяется формулой

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Функция $f(t)$ дифференцируема в точке $t_0 = \varphi(x_0)$

поэтому по свойству дифференцируемой функции

$$f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0),$$

где $\alpha(t)$ – функция, имеющая нулевой предел при $t \rightarrow t_0$. Доопределяя ее нулем при $t = t_0$, можно считать ее непрерывной при $t = t_0$ так, что при этом $\alpha(t_0) = 0$.

Так как функция $t = \varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то также

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0),$$

где $\beta(x)$ – функция, имеющая нулевой предел при $x \rightarrow x_0$. Доопределяя ее нулем при $x = x_0$, можно считать ее непрерывной при $x = x_0$ так, что при этом $\beta(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0)) = \\
&= f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \alpha(\varphi(x))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) + \\
&\quad + \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \beta(x)(x - x_0)) = \\
&= f'(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0)),
\end{aligned}$$

где $\gamma(x) = f'(\varphi(x_0))\beta(x) + \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0) + \beta(x))$.

Так как функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке. Функцию $\alpha(t)$ можно считать непрерывной в точке $t=t_0=\varphi(x_0)$. По теореме о непрерывности сложной функции $\alpha(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(\varphi(x)) = \alpha(\varphi(x_0)) = \alpha(t_0) = 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) &= f'(\varphi(x_0)) \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x)) = \\ &= f'(\varphi(x_0)) \cdot 0 + 0 \cdot (\varphi'(x_0) + 0) = 0. \end{aligned}$$

Итак

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0),$$

где

$$A = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$F(x) = f(\varphi(x))$$

дифференцируема в точке

$$x = x_0$$

и ее производная

$$F'(x_0) = A = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

Пусть функция

$$y = f(x)$$

монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 , в самой точке x_0 существует производная, которая не равна нулю. Тогда обратная функция

$$x = g(y)$$

также имеет производную в точке

$$y_0 = f(x_0)$$

и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает непрерывность обратной функции, поэтому при $y \rightarrow y_0$ величина $x \rightarrow x_0$. Положим

$$y = f(x)$$

и учтем, что при этом

$$y_0 = f(x_0), \quad x = g(y), \quad x_0 = g(y_0).$$

Тогда

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Это доказывает утверждение теоремы.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$

заданную в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и монотонна в окрестности точки $t = t_0$, пусть также существуют производные

$$\varphi'(t_0), \quad \psi'(t_0),$$

причем $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. При этом

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Доказательство. В самом деле, при тех предположениях, которые сделаны, функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную $t=\tau(x)$. Производную этой функции можно вычислить по правилу дифференцирования обратной функции:

$$\tau'(x_0) = 1/\varphi'(t_0).$$

Функцию

$$y = f(x) = \psi(t) = \psi(\tau(x))$$

мы можем рассматривать как сложную функцию. По правилу дифференцирования сложной функции

$$f'(x_0) = \psi'(\tau(x_0))\tau'(x_0) = \frac{\psi'(\tau(x_0))}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Показательно-степенной функцией условно называют функцию вида

$$y = f(x)^{\varphi(x)}.$$

Производную этой функции можно найти если предварительно сделать тождественные преобразования

$$y = f(x)^{\varphi(x)} = e^{\ln(f(x)^{\varphi(x)})} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

И затем использовать правило дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\varphi(x)\ln f(x)})' = e^{\varphi(x)\ln f(x)} (\varphi(x)\ln f(x))' = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(\ln f(x))') = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(f'(x)/f(x))) = \\ &= f(x)^{\varphi(x)} (\ln f(x))\varphi'(x) + \varphi(x)f(x)^{\varphi(x)-1} f'(x). \end{aligned}$$

В результате получается простая формула, которую легко запомнить. Нужно продифференцировать функцию как показательную, затем как степенную и полученные результаты сложить.

Дифференциал суммы.

Дифференциал разности.

Дифференциал произведения.

Дифференциал частного.

Дифференциал сложной функции.

Дифференциал суммы

$$d(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df(x) + dg(x)$$

Дифференциал разности

$$d(f(x) - g(x)) = (f(x) - g(x))' dx = f'(x)dx - g'(x)dx = df(x) - dg(x)$$

Дифференциал произведения

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x)) &= (f(x)g(x))' dx = (f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x))dx = \\ &= (f'(x)dx)g(x) + f(x)(g'(x)dx) = (df(x))g(x) + f(x)(dg(x)) \end{aligned}$$

Дифференциал частного

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \\ &= \frac{(f'(x)dx)g(x) - f(x)(g'(x)dx)}{g^2(x)} = \frac{(df(x))g(x) - f(x)(dg(x))}{g^2(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df(\varphi(x)) &= (f(\varphi(x)))' dx = (f'(\varphi(x))\varphi'(x))dx = \\ &= f'(\varphi(x))(\varphi'(x)dx) = f'(\varphi(x))d\varphi(x)\end{aligned}$$

Полученная формула допускает важную интерпретацию. Формула для дифференциала сложной функции оказывается одинаковой независимо от того, является ли φ независимой переменной или функцией.

Если φ является независимой переменной, то

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

а если φ является функцией, то также

$$df(\varphi) = f'(\varphi)d\varphi,$$

но только в первой из этих формул $d\varphi$ представляет собой дифференциал независимой переменной, совпадающий с приращением этой переменной, а во второй формуле это дифференциал функции, который, вообще говоря, с приращением функции не совпадает. Хотя смысл этих формул получается различным, но форма у них одна и та же.

Это свойство называется инвариантностью формы дифференциала.

Математический анализ.
Производная функции 1.
Лекция 8
Завершена.

Спасибо за внимание!

**Тема следующей лекции:
Основные теоремы дифференциального исчисления.
Лекция состоится в четверг 6 ноября
В 10:15 по Московскому времени.**