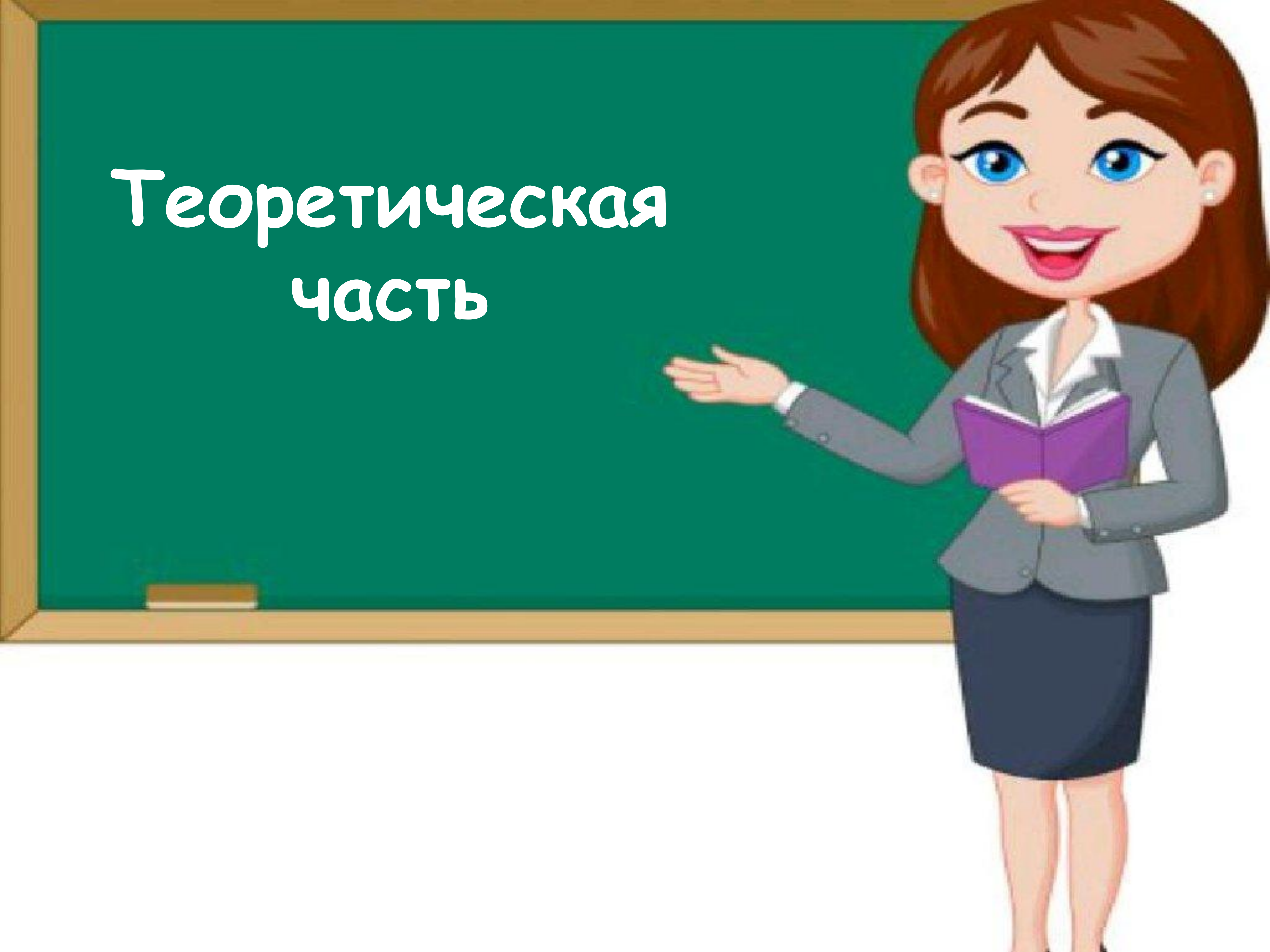
Показательные уравнения


Теоретическая
часть

Применение показательных уравнений в профессиональной деятельности

В природе, технике и экономике встречаются многочисленные процессы, в ходе которых значение величины меняется в одно и то же число раз, т. е. по закону показательной функции. Эти процессы называются процессами органического роста или органического затухания.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

***Показательное уравнение** – это уравнение, в котором неизвестное содержится в **показателе** степени.*

Уравнения вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$,
где а – положительное число (т.е. а>0), отличное от 1 (а≠1), и уравнения, сводящиеся к этому виду, называются показательными.

Пример. $2^{6x-7}=2^{14x-3}$

$$2^x\cdot 5^{x-1}=200$$

Методы решения показательных уравнений

- 1.Приведение к одному и тому же основанию.
  2. Приведение к квадратным уравнениям.
- 3. Вынесение общего множителя за скобки.
- 4. Деление обеих частей на одно и то же выражение.
  5. Графический способ.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

простейшие показательные уравнения

метод приведения обоих частей к одинаковому основанию

показательные уравнения, приводимые к простейшим

метод разложения на множители

показательные уравнения, приводимые к квадратным

метод замены переменной

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$\boxed{a^x = a^b \Leftrightarrow x = b}$$

Примеры показательных уравнений

$$7^{x-2} = \sqrt[3]{49};$$

Приведение к одному основанию, уравнивание показателей

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$$

Использование свойств степени, вынесение общего множителя за скобки

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Применение способа замены и приведения к квадратному уравнению

Приведение к одному основанию

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$$Ответ:\ 5$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$$Ответ:\ 2$$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$$Ответ:\ 2;\ 4$$

Приведение к одному основанию

Решите уравнения:

а) $2^{2x-4}=64,$

$2^{2x-4}=2^6,$

$2x-4=6,$

$2x=10,$

$x=5.$

Ответ: 5

б) $5^{x^2-3x}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{8-3x},$

$5^{x^2-3x}=(5)^{3x-8},$

$x^2-3x=3x-8,$

$x^2-6x+8=0,$

$x_1=2;\quad x_2=4.$

Ответ: 2; 4.

Приведение к одному основанию

Пример 3. Решите уравнение:

$$(2^x)^2 \cdot 2^{-3} = 2^{5x}$$

Применив свойства степеней, получаем:

$$2^{2x-3} = 2^{5x}$$
$$2x - 3 = 5x$$
$$3x = -3$$
$$x = -1$$

Вынесение общего множителя

$2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9;$

$3^x(2 \cdot 3 - 6 \cdot 3^{-1} - 1) = 9;$

$3^x \cdot 3 = 9;$

$3^x = 3;$

$x = 3.$

Ответ: 3.

Вынесение общего множителя

$$2\cdot 3^{x+1} - 6\cdot 3^{x-1} - 3 = 9,$$

$$3^{x-1}(2\cdot 3^{2} - 6 - 3^{1}) = 9,$$

$$3^{x-1}\cdot 9 = 9,$$

$$3^{x-1} = 1,$$

$$3^{x-1} = 3^{0},$$

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

Вынесение общего множителя

Решите уравнения:

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x}(64 + x) = 0,$$

$$т.к. 8^{2x} > 0, то$$

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ:x=-64.

Приведение к квадратному уравнению

Решить уравнение $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Пусть $5^x = t$ Тогда $t^2 - 6 \cdot t + 5 = 0$ $t = 1;$ $t = 5$

$5^x = 1$ $5^x = 5$

Обратная замена: $5^x = 5^0$ $5^x = 5^1$

$x = 0$ $x = 1$

Приведение к квадратному уравнению

$9^x - 4 \cdot 3^x = 45;$
$3^{2x-4} \cdot 3^x - 45 = 0;$
Замена $3^x = t$, $t > 0$;
$t^2 - 4t - 45 = 0;$
$D = 16 + 180 = 196;$
$t_1 = 9,$
$t_2 = -5$ – не удовлетворяет условию $t > 0$;
$3^x = 9;$
$3^x = 32;$
$x = 2;$
Ответ: 2.

Приведение к квадратному уравнению

Решите уравнение: $2^{2x} + 2^x - 2 = 0;$

Пусть $2^x = t$,где $t > 0$,тогда $t^2 + t - 2 = 0$

Найдем дискриминант: D=1^2+8=9

$t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0$

$t_2 = 1$

Если $t = 1$,то $2^x = 1,$

$2^x = 2^0,$

$x = 0.$

Ответ: x=0.

Приведение к квадратному уравнению

$9^x - 26\cdot 3^x - 27 = 0,$

$(3^x)^2 - 26\ 3^x - 27 = 0,$

Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда:

$t^2 - 26t - 27 = 0,$

$a + c = b$

$t_1 = -1$ не имеет смысла, т.к. $t > 0$.

$t_2 = 27$ Переходим к переменной x:

$3^x = 27,$

$3^x = 3^3,$

<u>$x = 3.$</u>

Ответ: 3

Приведение к квадратному уравнению

$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

Пусть $2^x = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$t^2 + 2t - 24 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд – ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$2^x = 4$

$x = 2$

Ответ : 2

4. Однородные уравнения

ОПР Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.

Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же неравное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.

Однородное уравнение

$$3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0,$$

$$3\cdot 2^{2x}+2^x\cdot 3^x-2\cdot 3^{2x}=0\Big| \quad :(2^x\cdot 3^x),$$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+1-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x=0,$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, $t>0$,тогда

$$3t\ +1-2\frac{1}{t}=0\Big| \ \cdot t,$$

$$3t^2+t-2=0,$$

$t_1=-1,$ не удовлетворяет условию $t>0$

$$t_2=\frac{2}{3},$$

Если $t=\frac{2}{3}$,то $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$; $x=1.$ Ответ:x=1.

Однородное уравнение

$5^{2x+1} - 13\cdot 15^x + 54\cdot 9^{x-1} = 0$

$5\cdot 5^{2x} - 13\cdot 15^x + 54\cdot \dfrac{9^x}{9} = 0$

$5\cdot 5^{2x} - 13\cdot 15^x + 6\cdot 9^x = 0$

Разделим на 9^x, *тогда*

$\dfrac{5\cdot 5^{2x}}{9^x} - \dfrac{13\cdot 15^x}{9^x} + \dfrac{6\cdot 9^x}{9^x} = 0$

$5\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x} - 13\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$

Пусть $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$5t^2 - 13t + 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$

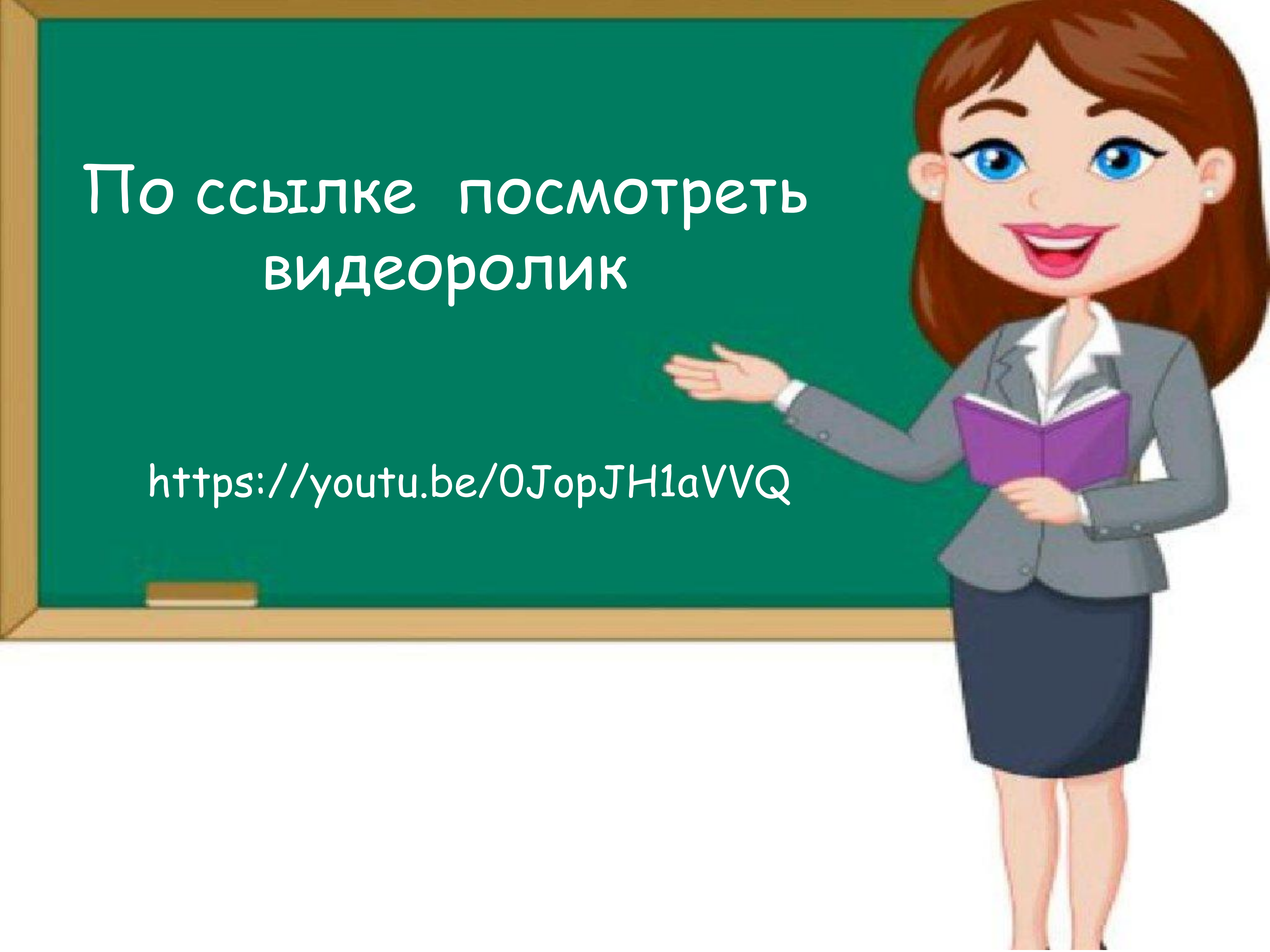
Вернемся к исходной переменной

$\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{3}{5}$ *или* $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = 2$

$x = -1$ $\qquad x = \log_{\frac{5}{3}} 2$

Ответ : -1; $\log_{\frac{5}{3}} 2$.

Практическая часть


По ссылке посмотреть
видеоролик
https://youtu.be/0JopJH1aVVQ

Решите уравнения :

$2^x = 16.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}.$

$5^{-x} = 125.$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16.$

$216^{4-x} = 36^{\frac{3}{2}x}.$

$\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = \frac{1}{128};$

$3^x - 3^{x+3} = -78;$

$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0;$

$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8;$

$2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} = 160;$

Решите уравнения :

1. $2^{3x+2} = 8$
2. $3^{x-6} = \frac{1}{9}$
3. $5^{-x-2} = 125$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-7} = 16$
5. $81^{5-x} = \frac{1}{3}$
6. $5 \cdot 25^{x} = 125$
7. $(0,5)^{x^2-3} = 4$
8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} = 256^{x}$
9. $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$
10. $3^{x-2} - 3^{x-3} = 18$
11. $7^{x-5} = 3^{x-5}$
12. $2^{2x} - 12 \cdot 2^{x} + 32 = 0$
13. $9^{x} - 4 \cdot 3^{x} + 3 = 0$

1. $2^{8x-4} = 16$
2. $3^{5x-5} = \frac{1}{243}$
3. $5^{x+7} = 625$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2x} = 81$
5. $3^{6-3x} = \frac{1}{27}$
6. $\frac{1}{7} \cdot 343^{x} = 49$
7. $5^{7x-8} = 0,2$
8. $\left(\frac{1}{7}\right)^{4x-4} = 49^{2x}$
9. $6^{2-5x} = 0,6 \cdot 10^{2-5x}$
10. $4^{x-3} + 4^{x} = 65$
11. $3^{2x-1} = 5^{2x-1}$
12. $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 = 0$
13. $36^{x} - 4 \cdot 6^{x} - 12 = 0$