

Показательные уравнения



Теоретическая часть



Применение показательных уравнений в профессиональной деятельности

*В природе, технике и экономике встречаются многочисленные процессы, в ходе которых значение величины меняется в одно и то же число раз, т. е. по закону показательной функции. Эти процессы называются процессами **органического роста** или **органического затухания**.*

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное содержится в *показателе степени*.

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$,
где a – положительное число (т.е. $a > 0$), отличное от 1 ($a \neq 1$), и уравнения, сводящиеся к этому виду, называются показательными.

Пример. $2^{6x-7} = 2^{14x-3}$

$$2^x \cdot 5^{x-1} = 200$$

Методы решения показательных уравнений

- 1. Приведение к одному и тому же основанию.
- 2. Приведение к квадратным уравнениям.
- 3. Вынесение общего множителя за скобки.
- 4. Деление обеих частей на одно и то же выражение.
- 5. Графический способ.



ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

простейшие
показательные
уравнения

метод приведения обеих
частей к одинаковому
основанию

показательные
уравнения,
приводимые к
простейшим

метод разложения на
множители

показательные
уравнения,
приводимые к
квадратным

метод замены
переменной



Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

Примеры показательных уравнений

$$7^{x-2} = \sqrt[3]{49};$$

Приведение к одному основанию, уравнивание показателей

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$$

Использование свойств степени, вынесение общего множителя за скобки

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Применение способа замены и приведения к квадратному уравнению

Приведение к одному основанию

Пример 1

$$2^{2x-4} = 64$$

$$2^{2x-4} = 2^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x - 3,5 = 0,5$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{array} \right.$$

Ответ : 2; 4

Приведение к одному основанию

Решите уравнения:

а) $2^{2x-4} = 64,$ б) $5^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{8-3x},$

$$2^{2x-4} = 2^6,$$

$$2x - 4 = 6,$$

$$2x = 10,$$

$$x = 5.$$

Ответ: 5

$$5^{x^2-3x} = (5)^{3x-8},$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8,$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 4.$$

Ответ: 2; 4.

Приведение к одному основанию

Пример 3. Решите уравнение:

$$(2^x)^2 \cdot 2^{-3} = 2^{5x}$$

Применив свойства степеней, получаем:

$$2^{2x-3} = 2^{5x}$$

$$2x - 3 = 5x$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

Вынесение общего множителя

$$2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9;$$

$$3^x(2 \cdot 3 - 6 \cdot 3^{-1} - 1) = 9;$$

$$3^x \cdot 3 = 9;$$

$$3^x = 3;$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Вынесение общего множителя

$$2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3 = 9,$$

$$3^{x-1}(2 \cdot 3^2 - 6 - 3^1) = 9,$$

$$3^{x-1} \cdot 9 = 9,$$

$$3^{x-1} = 1,$$

$$3^{x-1} = 3^0,$$

$$x - 1 = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

Вынесение общего множителя

Решите уравнения:

$$64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0,$$

$$8^{2x} (64 + x) = 0,$$

т.к. $8^{2x} > 0$, то

$$64 + x = 0,$$

$$x = -64.$$

Ответ: $x = -64$.

Приведение к квадратному уравнению

Решить уравнение $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Пусть $5^x = t$ Тогда $t^2 - 6 \cdot t + 5 = 0$ $t = 1; t = 5$

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5$$

Обратная замена: $5^x = 5^0$

$$5^x = 5^1$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

Приведение к квадратному уравнению

$$9^x - 4 \cdot 3^x = 45;$$

$$3^{2x-4} \cdot 3^x - 45 = 0;$$

Замена $3^x = t, t > 0;$

$$t^2 - 4t - 45 = 0;$$

$$D = 16 + 180 = 196;$$

$$t_1 = 9,$$

$$t_2 = -5 - \text{не удовлетворяет условию } t > 0;$$

$$3^x = 9;$$

$$3^x = 3^2;$$

$$x = 2;$$

Ответ: 2.

Приведение к квадратному уравнению

Решите уравнение: $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$;

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $t^2 + t - 2 = 0$

Найдем дискриминант: $D = 1^2 + 8 = 9$

$$\begin{aligned} t_1 &= -2 \text{ не удовлетворяет условию } t > 0 \\ t_2 &= 1 \end{aligned}$$

Если $t = 1$, то $2^x = 1$,
 $2^x = 2^0$,
 $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Приведение к квадратному уравнению

$$9^x - 26 \cdot 3^x - 27 = 0,$$

$$(3^x)^2 - 26 \cdot 3^x - 27 = 0,$$

Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда:

$$t^2 - 26t - 27 = 0,$$

$$a + c = b$$

$t_1 = -1$ не имеет смысла, т.к. $t > 0$.

$t_2 = 27$ Переходим к переменной x :

$$3^x = 27,$$

$$3^x = 3^3,$$

$$\underline{x = 3.}$$

Ответ: 3

Приведение к квадратному уравнению

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$t_1 = -6$ не удовлетворяет условию $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2



4. Однородные уравнения

ОПР Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.

Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же неравное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.



Однородное уравнение

$$3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0 \quad | : (2^x \cdot 3^x),$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0,$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$, тогда

$$3t + 1 - 2 \frac{1}{t} = 0 \quad | \cdot t,$$

$$3t^2 + t - 2 = 0,$$

$t_1 = -1$, не удовлетворяет условию $t > 0$

$$t_2 = \frac{2}{3},$$

Если $t = \frac{2}{3}$, то $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$; $x = 1$.

Ответ: $x=1$.

Однородное уравнение

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x , тогда

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{array} \right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

$$x = -1$$

$$x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

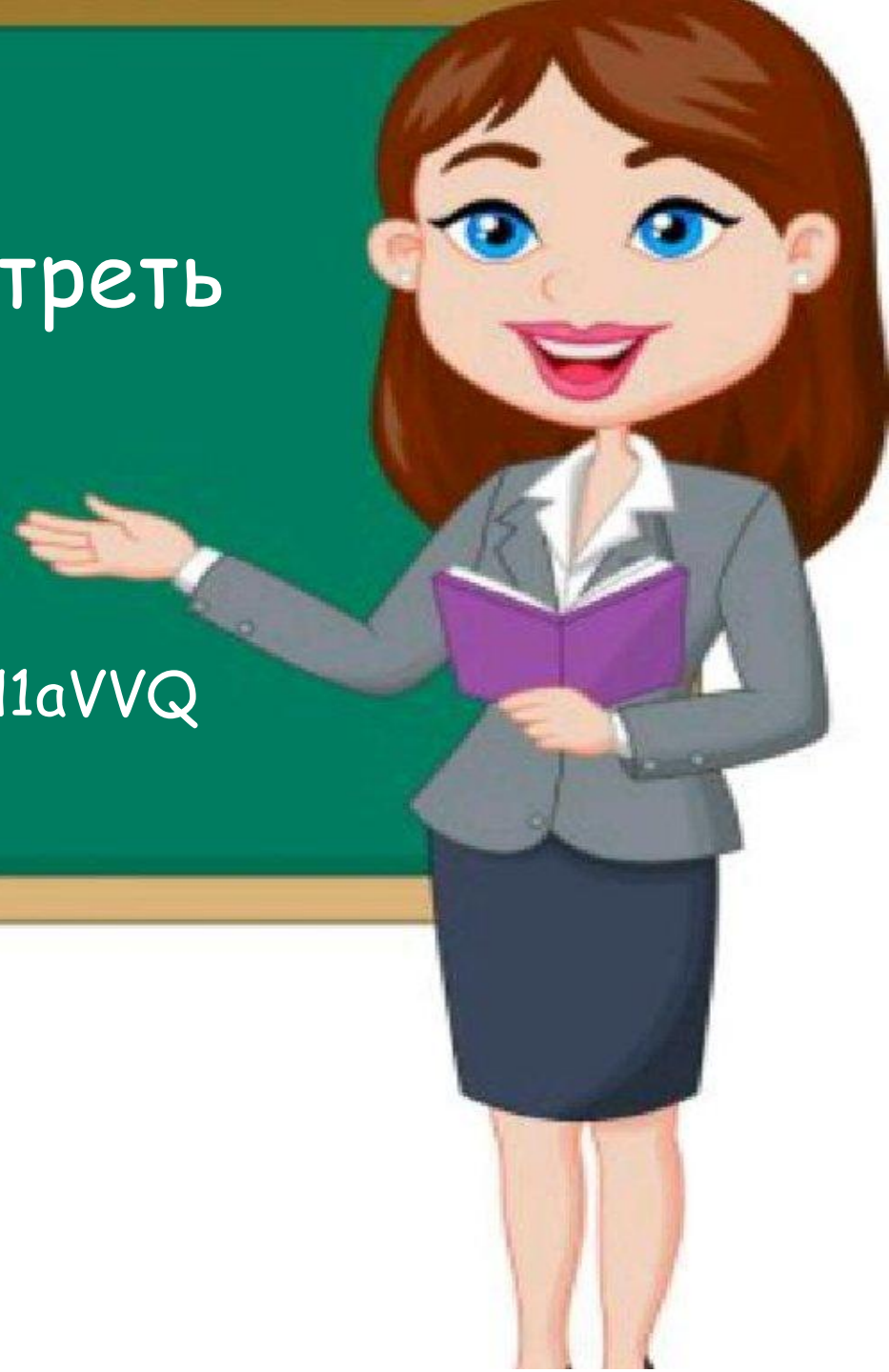
Ответ: $-1; \log_{\frac{5}{3}} 2.$

Практическая часть



По ссылке посмотреть
видеоролик

<https://youtu.be/0JopJH1aVVQ>



Решите уравнения :

$$2^x = 16.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}.$$

$$5^{-x} = 125.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16.$$

$$216^{4-x} = 36^{\frac{3}{2}x}.$$

$$\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7,5} = \frac{1}{128};$$

$$3^x - 3^{x+3} = -78;$$

$$2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0;$$

$$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8;$$

$$2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} = 160;$$

Решите уравнения :

1. $2^{3x+2} = 8$

2. $3^{x-6} = \frac{1}{9}$

3. $5^{-x-2} = 125$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-7} = 16$

5. $81^{5-x} = \frac{1}{3}$

6. $5 \cdot 25^x = 125$

7. $(0,5)^{x^2-3} = 4$

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} = 256^x$

9. $2^{3+x} = 0,4 \cdot 5^{3+x}$

10. $3^{x-2} - 3^{x-3} = 18$

11. $7^{x-5} = 3^{x-5}$

12. $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

13. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

1. $2^{8x-4} = 16$

2. $3^{5x-5} = \frac{1}{243}$

3. $5^{x+7} = 625$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2x} = 81$

5. $3^{6-3x} = \frac{1}{27}$

6. $\frac{1}{7} \cdot 343^x = 49$

7. $5^{7x-8} = 0,2$

8. $\left(\frac{1}{7}\right)^{4x-4} = 49^{2x}$

9. $6^{2-5x} = 0,6 \cdot 10^{2-5x}$

10. $4^{x-3} + 4^x = 65$

11. $3^{2x-1} = 5^{2x-1}$

12. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

13. $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$