Формы мышления.
Алгебра высказываний.
Логические выражения и таблицы истинности.

Формы мышления

- Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные в 4 веке до нашей эры древне-греческими мыслителями.
- Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы речи от ее содержания. Он исследовал терминологию логики, подробно разобрал теорию умозаключений и доказательств, описал ряд логических операций, сформулировал основные законы мышления.
- Логика изучает внутреннюю структуру процесс а мышления, который реализуется в таких естественно сложившихся формах как понятие, суждение, умозаключение и доказательство.

Понятие

Понятие - это форма мышления, отражающая наиболее существенные свойства предмета, отличающие его от других предметов.

В структуре каждого понятия нужно различать две стороны: содержание и объем.

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков предмета. Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется.

Высказывание.

- Высказывание (суждение) - это форма мышления, выраженная с помощью понятий, посредством которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними.
- Высказывание может быть *истинным* или *ложным*. Истинным будет суждение, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. Ложным суждение будет в том случае, когда связь понятий искажает объективные отношения, не соответствует реальной действительности.
- В естественном языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением. Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.
- Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием. Высказывание, состоящее из простых высказываний, называются *составным* (сложным).

Умозаключение.

- *Умозаключение* - это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений, называемых *посылками*, по определенным правилам логического вывода получается новое знание о предметах реального мира (*вывод*).
- Умозаключения бывают *дедуктивные, индуктивные и по аналогии*. В дедуктивных умозаключениях рассуждения ведутся от общего к частному. Например, из двух суждений: «Все металлы электропроводны» и «Ртуть является металлом» путем умозаключения можно сделать вывод, что: «Ртуть электропроводна».
- В индуктивных умозаключениях рассуждения ведутся от частного к общему. Например, установив, что отдельные металлы - железо, медь, цинк, алюминий и т.д. - обладают свойством электропроводности, можно сделать вывод, что все металлы электропроводны.
- Умозаключение по аналогии представляет собой движение мысли от общности одних свойств и отношений у сравниваемых предметов или процессов к общности других свойств и отношений. Например, химический состав Солнца и Земли сходен по многим показателям, поэтому, когда на Солнце обнаружили неизвестный еще на Земле химический элемент гелий, то по аналогии заключили: такой элемент есть и на Земле.

Доказательство.

- Доказательство есть мыслительный процесс, направленный на подтверждение или опровержение какого-либо положения посредством других несомненных, ранее обоснованных доводов.
- Доказательство по своей логической форме не отличается от умозаключения. Однако, если в умозаключении заранее исходят из истинности посылок и следят только за правильностью логического вывода, в доказательстве подвергается логической проверке истинность самих посылок.

Алгебра высказываний

- *Алгебра* в широком смысле этого слова наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т.д.).
- Объектами алгебры логики являются высказывания.
- Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Ее интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.
- Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:

  A = {Аристотель - основоположник логики}

  B = {На яблонях растут бананы}.
- Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, *A* = 1, *B* = 0.
- Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции. Логические операции задаются таблицами истинности

Логическая операция
КОНЪЮНКЦИЯ
(логическое умножение):

A	B	A^B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- в естественном языке соответствует союзу **и**;
- в алгебре высказываний обозначение **&,^**;
- в языках программирования обозначение **And**.

- Конъюнкция - это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Логическая операция
ДИЗЪЮНКЦИЯ
(логическое сложение):

A	B	AVB
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

- в естественном языке соответствует союзу **или**;
- обозначение **V** ;
- в языках программирования обозначение **Or**.

- **Дизъюнкция** - это логическая операция, которая каждым двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Логическая операция
ИНВЕРСИЯ
(отрицание):

A	¬A
0	1
1	0

в естественном языке соответствует словам **неверно, что…** и частице **не**;

- обозначение ¬, ¯ **;**
- в языках программирования обозначение **Not**;

- **Отрицание** - это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

Логическая операция
ИМПЛИКАЦИЯ
(логическое следование):

A	B	
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- в естественном языке соответствует обороту **если …, то …**;
- обозначение → .

- **Импликация** - это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

Логическая операция
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ
(равнозначность):

A	B	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае**;
- обозначения ↔, **~** .

- **Эквивалентность** – это логическая
- операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Логические выражения и таблицы истинности

- Таблицу, показывающую, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют *таблицей истинности* составного высказывания.
- Составные высказывания в алгебре логики записываются с помощью логических выражений. Для любого логического выражения достаточно просто построить таблицу истинности.

Логические выражения и таблицы истинности

- *Алгоритм построения таблицы истинности:*
- 1) подсчитать количество переменных *n* в логическом выражении;
- 2) определить число строк в таблице, которое равно $m = 2^n$;
- 3) подсчитать количество логических операций в логическом выражении и определить количество столбцов в таблице, которое равно количеству переменных плюс количество операций;
- 4) ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
- 5) заполнить стобцы входных переменных наборами значений;
- 6) провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п.4 последовательностью.

Логические выражения и таблицы истинности

- Наборы входных переменных, во избежание ошибок, рекомендуют перечислять следующим образом:
- а) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки нулями, а нижнюю единицами;
- б) разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами нулей и единиц , начиная с группы нулей;
- в) продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами нулей или единиц до тех пор, пока группы нулей и единиц не будут состоять из одного символа.

Пример

- Для формулы *A*^(*B* V(¬B^ ¬C)) построить таблицу истинности алгебраически и с использованием электронных таблиц.
- Количество логических переменных 3, следовательно, количество строк в таблице истинности должно быть $2^3 = 8$.
- Количество логических операций в формуле 5, следовательно количество столбцов в таблице истинности должно быть 3 + 5 = 8.

A	B	C	¬B	¬C	¬B^¬ C	BV(¬B^¬ C)	A^(BV(¬B^¬ C))
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Логические функции

- *Логической* (булевой) *функцией* называют функцию $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$, аргументы которой $X_1, X_2, \dots, X_n$ (независимые переменные) и сама функция (зависимая переменная) принимают значения 0 или 1.
- Таблицу, показывающую, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее аргументов, называют таблицей истинности логической функции. Таблица истинности логической функции n аргументов содержит 2^n строк, n столбцов значений аргументов и 1 столбец значений функции.
- Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

Таблица 3.1. Логические функции двух переменных

Аргументы		Логические функции															
A	*B*	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Логические законы и правила преобразования логических выражений

1. *Закон двойного отрицания:*

$A = \neg\neg A$.

Двойное отрицание исключает отрицание.

2. *Переместительный (коммутативный) закон*:

— для логического сложения:

$A \vee B = B \vee A$;

— для логического умножения:

$A \wedge B = B \wedge A$.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

3. ***Сочетательный (ассоциативный) закон:***

— для логического сложения:

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

— для логического умножения:

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

4. ***Распределительный (дистрибутивный) закон*:**

— для логического сложения:

$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

— для логического умножения:

$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

5.*Закон общей инверсии (законы де Моргана):*

— для логического сложения

¬(AVB)=¬A^¬B;

— для логического умножения:

¬(A^B)=¬AV¬B

Логические законы и правила преобразования логических выражений

6.*Закон идемпотентности* (от латинских слов idem — тот же самый и potens — сильный; дословно — равносильный):

— для логического сложения:

$A \vee A = A$;

— для логического умножения:

$A \wedge A = A$.

Закон означает отсутствие показателей степени.

7.*Законы исключения констант:*

— для логического сложения:

$A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$;

— для логического умножения:

$A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

8.***Закон противоречия:***

A^¬*A*= 0.

Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.

9.***Закон исключения третьего*:**

*A*Ú¬A= 1.

Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

10.*Закон поглощения*:

— для логического сложения:

$$A \vee (A \wedge B) = A;$$

— для логического умножения:

$$A \wedge (A \vee B) = A.$$

11. *Закон исключения (склеивания)*:

— для логического сложения:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = B;$$

— для логического умножения:

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные формы мышления. Дайте им определения и приведите примеры
2. Что изучает алгебра высказываний?
3. Дайте определения для конъюнкции, дизъюнкции, инверсии.
4. Дайте определения для эквивалентности и импликации.
5. Сформулируйте основные логические законы
6. С… й … тм постр…

3.22. Какое тождество записано неверно:

1) $X \vee \overline{X} = 1$;

2) $X \vee X \vee X \vee X \vee X \vee X = 1$;

3) $X \& X \& X \& X \& X = X$.

3.9. Найдите значения логических выражений:

а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;

б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;

в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;

г) $(0 \& 1) \& 1$;

д) $1 \& (1 \& 1) \& 1$;

е) $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$;

ж) $((1 \& 0) \vee (1 \& 0)) \vee 1$;

з) $((1 \& \overline{1}) \vee 0) \& (\overline{0} \vee 1)$;

и) $((0 \& 0) \vee 0) \& (1 \vee 1)$.