



Формы мышления.
Алгебра высказываний.
Логические выражения и таблицы
ИСТИННОСТИ.

Формы мышления



- Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные в 4 веке до нашей эры древне-греческими мыслителями.
- Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы речи от ее содержания. Он исследовал терминологию логики, подробно разобрал теорию умозаключений и доказательств, описал ряд логических операций, сформулировал основные законы мышления.
- Логика изучает внутреннюю структуру процесса мышления, который реализуется в таких естественно сложившихся формах как понятие, суждение, умозаключение и доказательство.

Понятие

Понятие - это форма мышления, отражающая наиболее существенные свойства предмета, отличающие его от других предметов.

В структуре каждого понятия нужно различать две стороны: содержание и объем.

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков предмета. Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется.

Высказывание.

- Высказывание (суждение) - это форма мышления, выраженная с помощью понятий, посредством которой что-либо утверждают или отрицают о предметах, их свойствах и отношениях между ними.
- Высказывание может быть *истинным* или *ложным*. Истинным будет суждение, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей. Ложным суждение будет в том случае, когда связь понятий искажает объективные отношения, не соответствует реальной действительности.
- В естественном языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением. Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.
- Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием. Высказывание, состоящее из простых высказываний, называется *составным* (сложным).

Умозаключение.

- *Умозаключение* - это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений, называемых *посылками*, по определенным правилам логического вывода получается новое знание о предметах реального мира (*вывод*).
- Умозаключения бывают *дедуктивные, индуктивные и по аналогии*. В дедуктивных умозаключениях рассуждения ведутся от общего к частному. Например, из двух суждений: «Все металлы электропроводны» и «Ртуть является металлом» путем умозаключения можно сделать вывод, что: «Ртуть электропроводна».
- В индуктивных умозаключениях рассуждения ведутся от частного к общему. Например, установив, что отдельные металлы - железо, медь, цинк, алюминий и т.д. - обладают свойством электропроводности, можно сделать вывод, что все металлы электропроводны.
- Умозаключение по аналогии представляет собой движение мысли от общности одних свойств и отношений у сравниваемых предметов или процессов к общности других свойств и отношений. Например, химический состав Солнца и Земли сходен по многим показателям, поэтому, когда на Солнце обнаружили неизвестный еще на Земле химический элемент гелий, то по аналогии заключили: такой элемент есть и на Земле.

Доказательство.

- Доказательство есть мыслительный процесс, направленный на подтверждение или опровержение какого-либо положения посредством других несомненных, ранее обоснованных доводов.
- Доказательство по своей логической форме не отличается от умозаключения. Однако, если в умозаключении заранее исходят из истинности посылок и следят только за правильностью логического вывода, в доказательстве подвергается логической проверке истинность самих посылок.

Алгебра высказываний

- *Алгебра* в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т.д.).
- Объектами алгебры логики являются высказывания.
- Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Ее интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.
- Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:
 $A = \{\text{Аристотель - основоположник логики}\}$
 $B = \{\text{На яблонях растут бананы}\}.$
- Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, $A = 1, B = 0.$
- Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции. Логические операции задаются таблицами истинности

Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение):

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- в естественном языке соответствует союзу **и**;
 - в алгебре высказываний обозначение **&, ^**;
 - в языках программирования обозначение **And**.
- Конъюнкция - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение):

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- в естественном языке соответствует союзу **или**;
- обозначение \vee ;
- в языках программирования обозначение **Or**.

- **Дизъюнкция** - это логическая операция, которая каждому двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Логическая операция

ИНВЕРСИЯ

(отрицание):

A	$\neg A$
0	1
1	0

в естественном языке соответствует словам **неверно**, **что...** и частице **не**;

· обозначение $\neg, \bar{}$;

· в языках программирования обозначение **Not**;

- **Отрицание** - это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

Логическая операция
ИМПЛИКАЦИЯ
(логическое следование):

A	B	
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- в естественном языке соответствует обороту **если ... , то ... ;**
- обозначение \rightarrow .
- **Импликация** - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

Логическая операция **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** (равнозначность):

A	B	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

· в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**

· обозначения \leftrightarrow, \sim .

- **Эквивалентность** – это логическая
- операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Логические выражения и таблицы ИСТИННОСТИ

- Таблицу, показывающую, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют *таблицей истинности* составного высказывания.
- Составные высказывания в алгебре логики записываются с помощью логических выражений. Для любого логического выражения достаточно просто построить таблицу истинности.

Логические выражения и таблицы истинности

- *Алгоритм построения таблицы истинности:*
 - 1) подсчитать количество переменных n в логическом выражении;
 - 2) определить число строк в таблице, которое равно $m = 2^n$;
 - 3) подсчитать количество логических операций в логическом выражении и определить количество столбцов в таблице, которое равно количеству переменных плюс количество операций;
 - 4) ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
 - 5) заполнить столбцы входных переменных наборами значений;
 - 6) провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п.4 последовательностью.

Логические выражения и таблицы ИСТИННОСТИ

- Наборы входных переменных, во избежание ошибок, рекомендуют перечислять следующим образом:
- а) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки нулями, а нижнюю единицами;
- б) разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами нулей и единиц, начиная с группы нулей;
- в) продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами нулей или единиц до тех пор, пока группы нулей и единиц не будут состоять из одного символа.

Пример

- Для формулы $A \wedge (B \vee (\neg B \wedge \neg C))$ построить таблицу истинности алгебраически и с использованием электронных таблиц.
- Количество логических переменных 3, следовательно, количество строк в таблице истинности должно быть $2^3 = 8$.
- Количество логических операций в формуле 5, следовательно количество столбцов в таблице истинности должно быть $3 + 5 = 8$.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg C$	$B \vee (\neg B \wedge \neg C)$	$A \wedge (B \vee (\neg B \wedge \neg C))$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Логические законы и правила преобразования логических выражений

1. Закон двойного отрицания:

$$A = \neg\neg A.$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

2. Переместительный (коммутативный) закон:

— для логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A;$$

— для логического умножения:

$$A \wedge B = B \wedge A.$$

Логические законы и правила преобразования логических выражений

3. Сочетательный (ассоциативный) закон:

— для логического сложения:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C);$$

— для логического умножения:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

4. Распределительный (дистрибутивный) закон:

— для логического сложения:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C);$$

— для логического умножения:

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

5. Закон общей инверсии (законы де Моргана):

— для логического сложения

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B;$$

— для логического умножения:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

Логические законы и правила преобразования логических выражений

6. Закон идемпотентности (от латинских слов *idem* — тот же самый и *potens* — сильный; дословно — равносильный):

— для логического сложения:

$$A \vee A = A;$$

— для логического умножения:

$$A \wedge A = A.$$

Закон означает отсутствие показателей степени.

7. Законы исключения констант:

— для логического сложения:

$$A \vee 1 = 1, A \vee 0 = A;$$

— для логического умножения:

$$A \wedge 1 = A, A \wedge 0 = 0.$$

Логические законы и правила преобразования логических выражений

8. Закон противоречия:

$$A \wedge \neg A = 0.$$

Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.

9. Закон исключения третьего:

$$A \vee \neg A = 1.$$

Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

10. Закон поглощения:

— для логического сложения:

$$A \vee (A \wedge B) = A;$$

— для логического умножения:

$$A \wedge (A \vee B) = A.$$

11. Закон исключения (склеивания):

— для логического сложения:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = B;$$

— для логического умножения:

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B.$$

- # Контрольные вопросы и задания
1. Назовите основные формы утверждения и приведите примеры
 2. Что изучает алгебра высказываний?
 3. Дайте определения для конъюнкции, дизъюнкции, инверсии.
 4. Дайте определения для эквивалентности и импликации.
 5. Сформулируйте основные логические законы

3.22. Какое тождество записано неверно:

- 1) $X \vee \bar{X} = 1$;
- 2) $X \vee X \vee X \vee X \vee X \vee X = 1$;
- 3) $X \& X \& X \& X \& X = X$.

3.9. Найдите значения логических выражений:

- а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;
- б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;
- в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;
- г) $(0 \& 1) \& 1$;
- д) $1 \& (1 \& 1) \& 1$;
- е) $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$;
- ж) $((1 \& 0) \vee (1 \& 0)) \vee 1$;
- з) $((1 \bar{\& 1}) \vee 0) \& (0 \bar{\vee} 1)$;
- и) $((0 \& 0) \vee 0) \& (1 \vee 1)$.