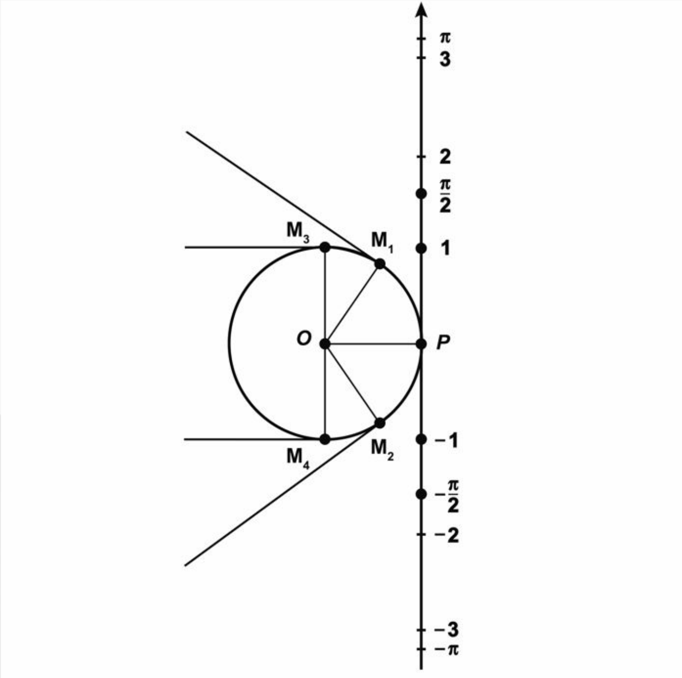
Поворот точки вокруг начала координат

Сегодня на уроке

1. Вспомним, что каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
2. Рассмотрим, как установить соответствие между действительными точками и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Вспомним

Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.



Вспомним

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}$$

Формула перехода от радианной меры к градусной

$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}$$

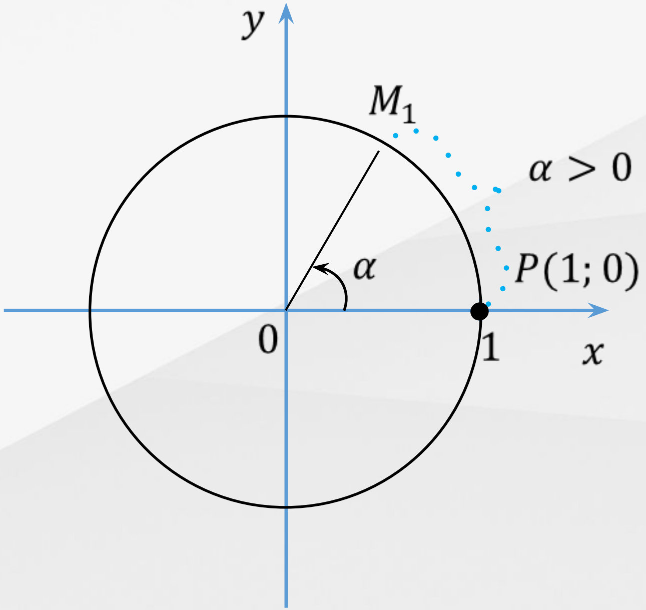
Формула перехода от градусной меры к радианной

Заполните таблицу.

Градусы		60	324	$\frac{90}{\pi}$	
Радианы	$\frac{2\pi}{5}$				$\frac{5\pi}{4}$

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.



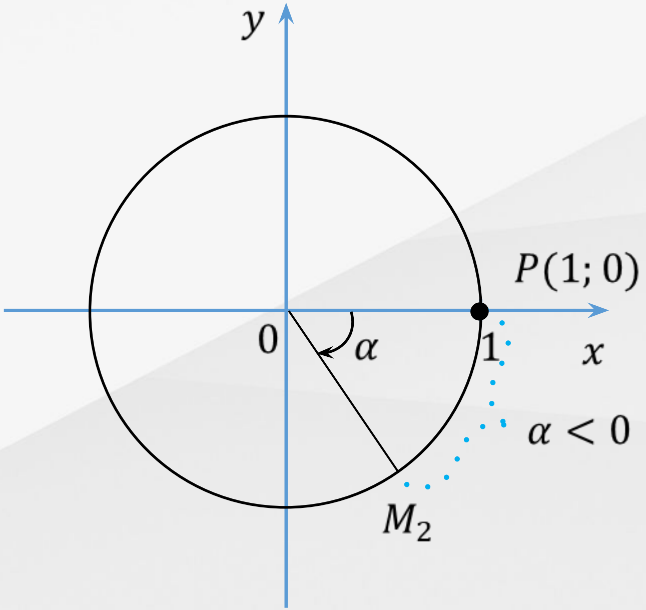
Единичная окружность

Пусть $\alpha > 0$.

Точка M_1 получена из точки P путём поворота на угол α рад вокруг начала координат.

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.



Единичная окружность

Пусть $\alpha < 0$.

Точка пройдёт путь длиной $|\alpha|$.

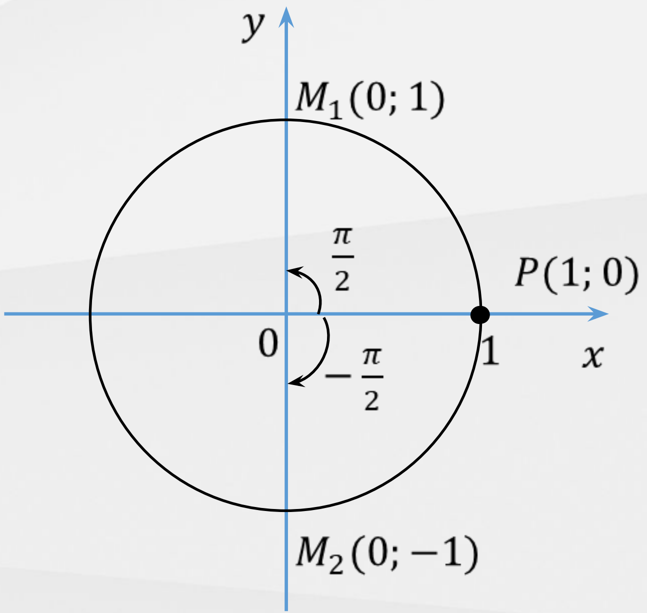
Если же $\alpha = 0$, то точка остаётся на месте.

Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1; 0)$ на некоторый угол α.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад получаем точку $M_1(0; 1)$.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад получаем точку $M_2(0; -1)$.

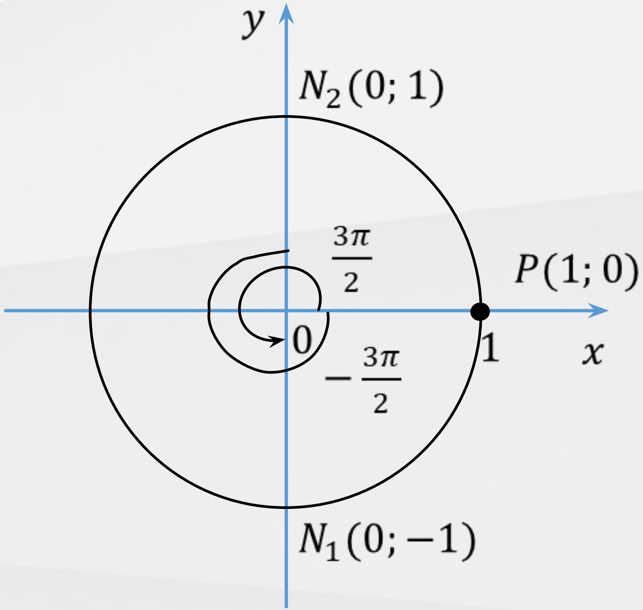


Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1;0)$ на некоторый угол α.

При повороте точки $P(1;0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад получаем точку $N_1(0;-1)$.

При повороте точки $P(1;0)$ на угол $-\frac{3\pi}{2}$ рад получаем точку $N_2(0;1)$.

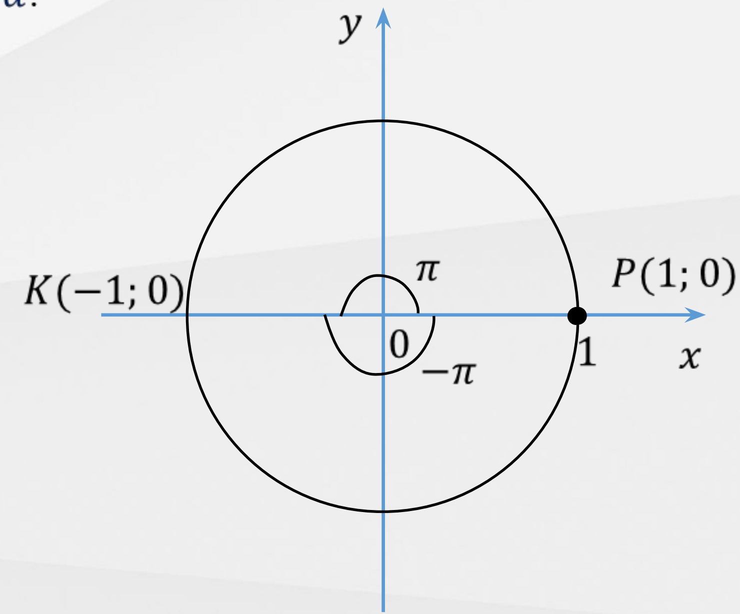


Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1; 0)$ на некоторый угол α.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол π рад получаем точку $K(-1; 0)$.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад получаем точку $K(-1; 0)$.



Поворот точки вокруг начала координат

В курсе геометрии мы рассматривали углы от $0°$ до $180°$.

Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, которые больше $180°$, а также отрицательные углы.

Угол поворота можно задавать и в градусах, и в радианах.

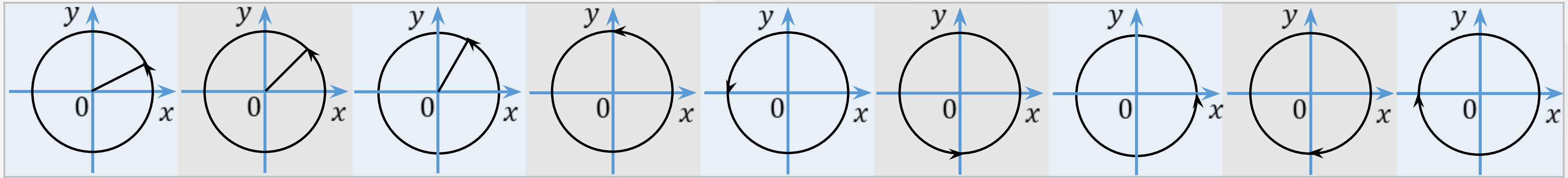
Поворот точки $P(1;0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ означает то же, что и поворот на $90°$.

Поворот точки $P(1;0)$ на угол $-\frac{3\pi}{2}$ означает то же, что и поворот на $-270°$.

А задавать угол поворота надо в градусах или радианах?

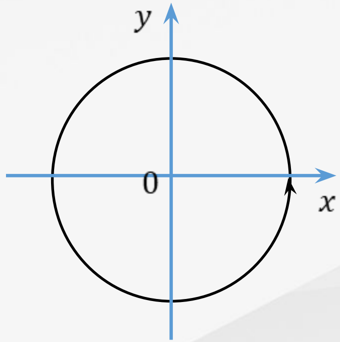
Поворот точки вокруг начала координат

Таблица поворотов на наиболее часто встречающиеся
углы, выраженные в радианной и градусной мере

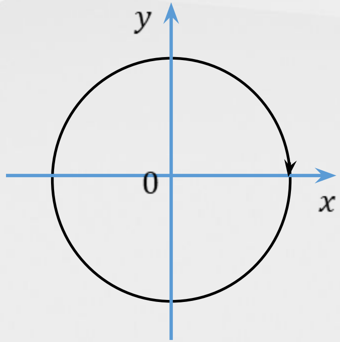


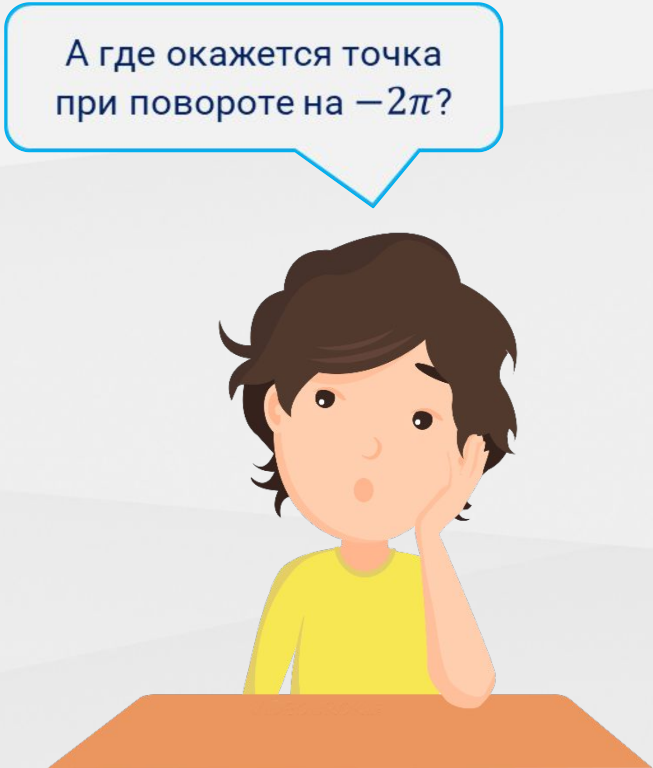
Поворот точки вокруг начала координат

При повороте на 2π, то есть на $360°$, точка возвращается в своё первоначальное положение.



При повороте на -2π, то есть на $-360°$, точка также возвращается в своё первоначальное положение.

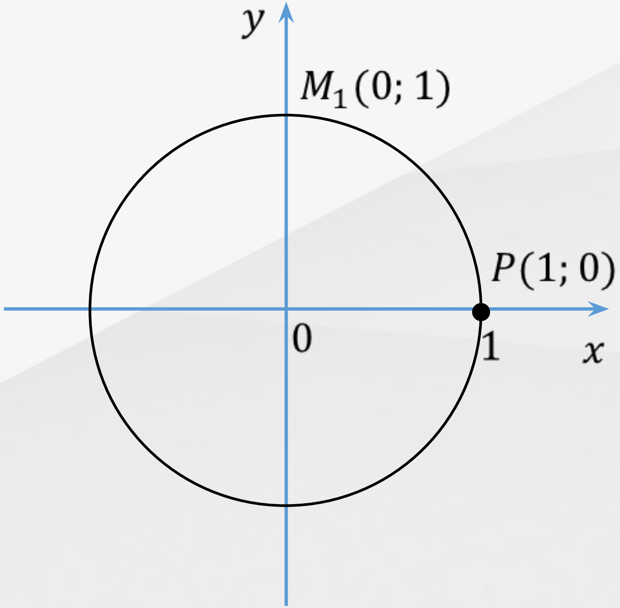




Поворот точки вокруг начала координат

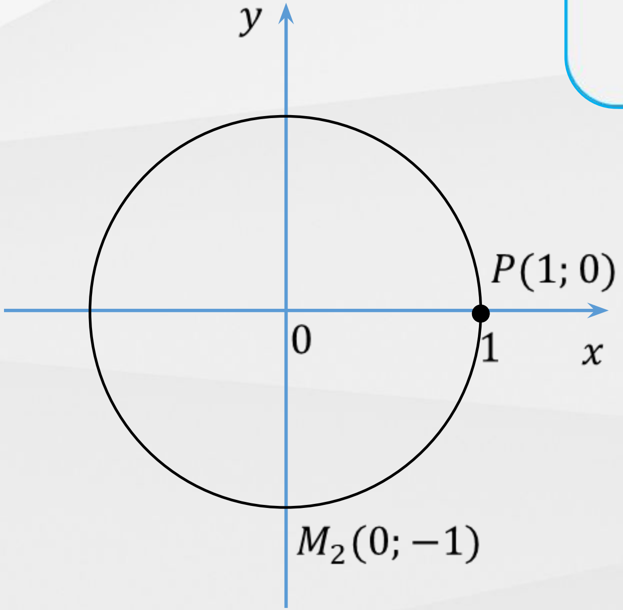
Поворот на угол, больший 2π

$$\frac{13\pi}{2} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$$



Поворот на угол, меньший -2π

$$-\frac{13\pi}{2} = -3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$$



При повороте точки P на угол $-\frac{13\pi}{2}$ получаем ту же точку, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$.

Поворот точки вокруг начала координат

Если угол α можно представить как $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$,
где k – целое число, то при повороте на угол α получаем
ту же самую точку, что и при повороте на угол α_0.

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1;0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1;0)$ в точку M.

Поворот точки вокруг начала координат

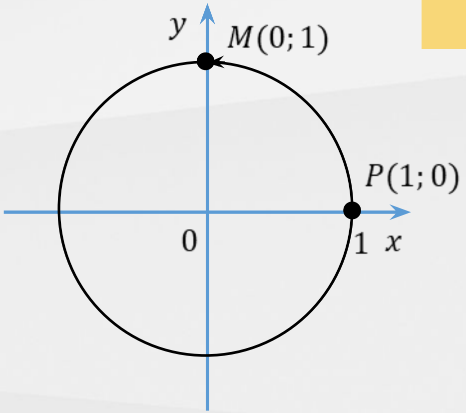
Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;0)$ на угол $\frac{17\pi}{2}$.

$$\frac{17\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 4$$

При повороте точки на угол $\frac{17\pi}{2}$ получим ту же самую точку, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0;1)$.

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где k – целое число.

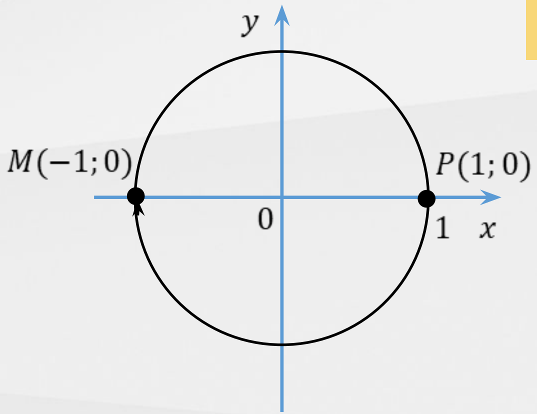


Поворот точки вокруг начала координат

Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;0)$ на угол -5π.

$$-5\pi = -\pi - 2\pi \cdot 2$$

При повороте на -5π получаем ту же самую точку, что и при повороте на $-\pi$, то есть точку с координатами $(-1;0)$.



$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$,
где k – целое число.

Поворот точки вокруг начала координат

Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;0)$ на угол $\frac{\pi}{6}$.

$\frac{\pi}{6} = 30°$,

ΔONM – прямоугольный.

Так как координаты точки M численно равны длинам катетов этого треугольника, то нам остаётся найти длины ON и MN.

$OM = 1$,

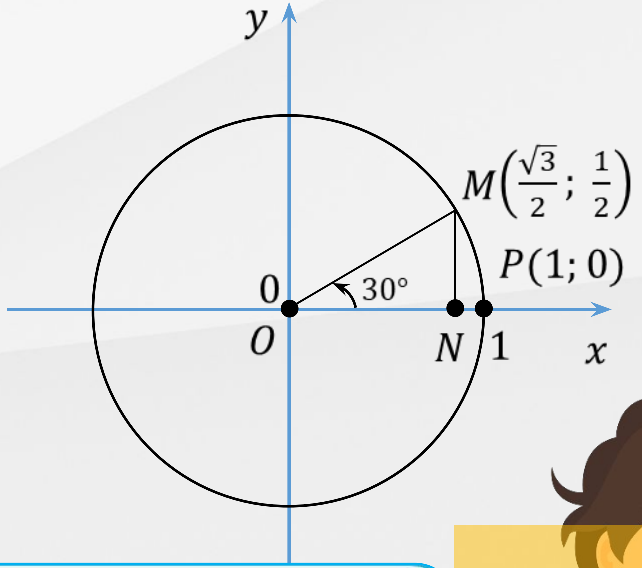
$\angle MON = 30°$,

$MN = OM : 2 = \frac{1}{2}$,

$OM^2 = ON^2 + MN^2$,

$ON = \sqrt{OM^2 - MN^2}$,

$ON = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



А мы ведь знаем из геометрии, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы.

Теорема Пифагора

$c^2 = a^2 + b^2$

Задание № 1

$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, $\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha$ рад

где k – целое число.

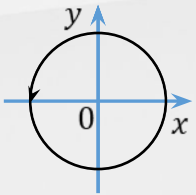
Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;0)$ на угол:

а) 9π; б) $\frac{-11\pi}{2}$; в) $450°$.

Решение:

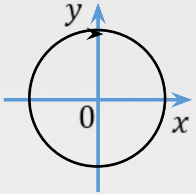
а) $9\pi = \pi + 2\pi \cdot 4$

При повороте точки на угол 9π получим ту же точку, что и при повороте на угол π, то есть точку с координатами $(-1;0)$.



б) $\frac{-11\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} - 2\pi \cdot 2$

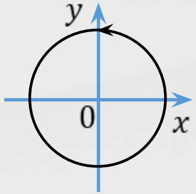
При повороте точки на угол $\frac{-11\pi}{2}$ получим ту же точку, что и при повороте на угол $-\frac{3\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0;1)$.



в) $450° = \frac{\pi}{\cancel{180}_{2}} \cdot \cancel{450}^{5} = \frac{5\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

При повороте точки на угол $450°$ получим ту же точку, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0;1)$.



Задание № 2

Найдите число x, где $0 \le x < 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

а) $a = 5{,}3\pi$; б) $a = \frac{9\pi}{4}$.

Решение:

а) $a = 5{,}3\pi,$

$a = x + 2\pi k,$

$5{,}3\pi = x + 2\pi k,$

$5{,}3\pi = 1{,}3\pi + 4\pi = 1{,}3\pi + 2\pi \cdot 2,$

$x = 1{,}3\pi,$

$k = 2.$

б) $a = \frac{9\pi}{4},$

$a = x + 2\pi k,$

$\frac{9\pi}{4} = x + 2\pi k,$

$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1,$

$x = \frac{\pi}{4},$

$k = 1.$

Итоги урока

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.

Пусть $\alpha > 0$.
Точка M_1 получена из точки P

Поворот точки вокруг начала координат

Таблица поворотов на наиболее часто встречающиеся углы, выраженные в радианной и градусной мере

Поворот точки вокруг начала координат

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1;0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1;0)$ в точку M.

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1;0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1;0)$ в точку M.