

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

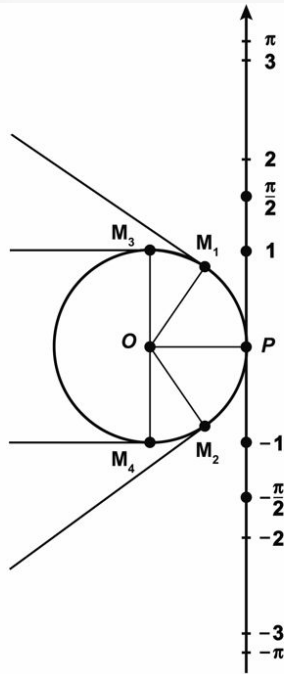
Поворот точки вокруг
начала координат

Сегодня на уроке

1. Вспомним, что каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
2. Рассмотрим, как установить соответствие между действительными точками и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Вспомним

Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.



Вспомним

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^\circ$$

Формула перехода
от радианной меры
к градусной

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад}$$

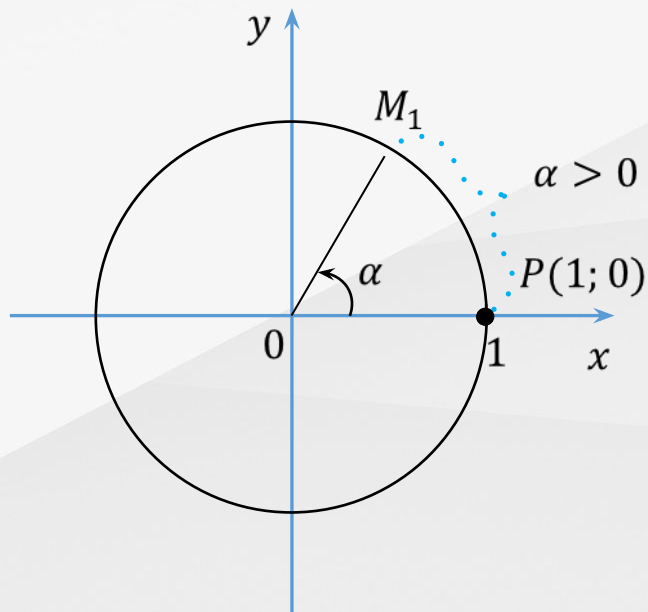
Формула перехода
от градусной меры
к радианной

Заполните таблицу.

Градусы	60	324	$\frac{90}{\pi}$	
Радианы	$\frac{2\pi}{5}$			$\frac{5\pi}{4}$

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.



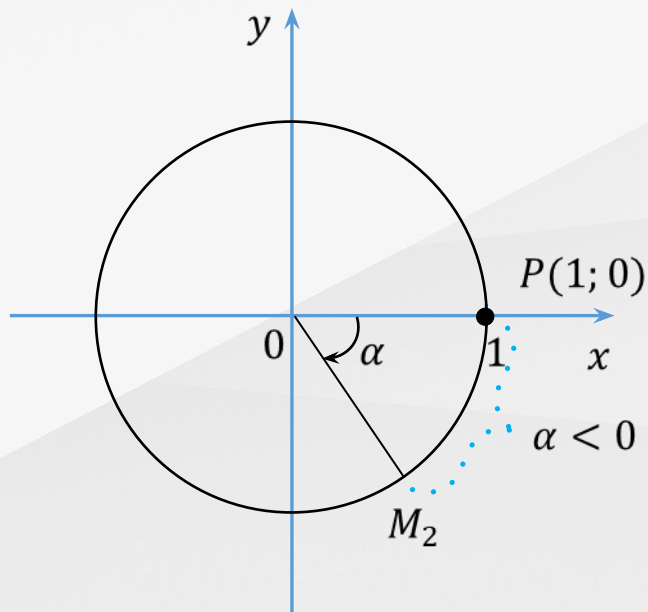
Единичная окружность

Пусть $\alpha > 0$.

Точка M_1 получена из точки P путём поворота на угол α рад вокруг начала координат.

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.



Единичная окружность

Пусть $\alpha < 0$.

Точка пройдёт путь длиной $|\alpha|$.

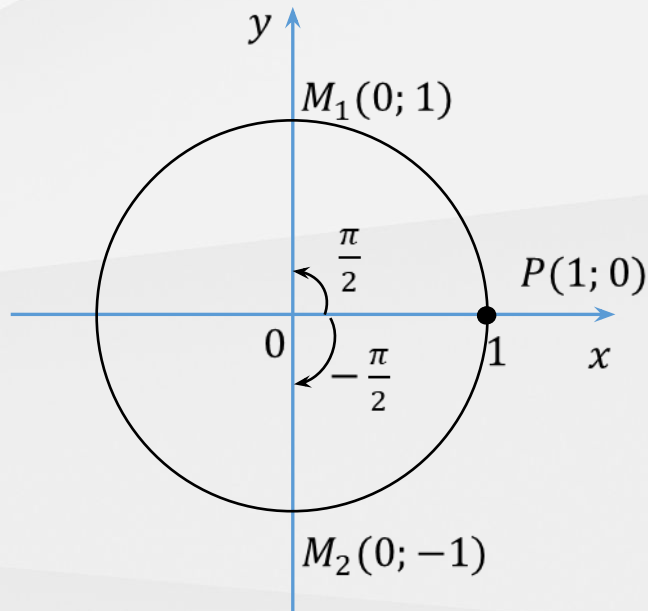
Если же $\alpha = 0$, то точка остаётся на месте.

Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1; 0)$ на некоторый угол α .

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад
получаем точку $M_1(0; 1)$.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад
получаем точку $M_2(0; -1)$.

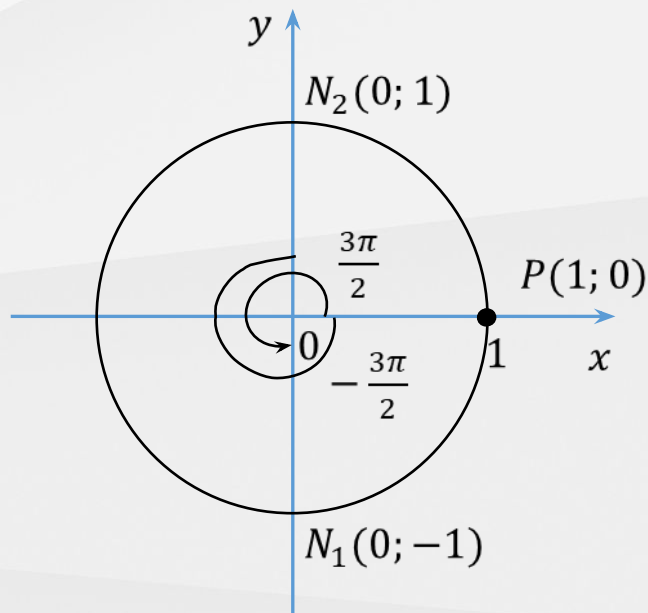


Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1; 0)$ на некоторый угол α .

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад получаем точку $N_1(0; -1)$.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{3\pi}{2}$ рад получаем точку $N_2(0; 1)$.

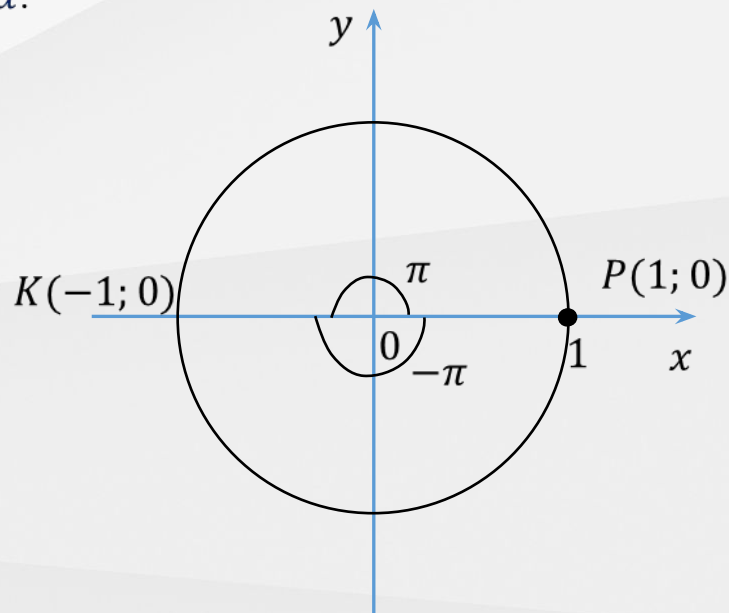


Поворот точки вокруг начала координат

Примеры поворотов точки $P(1; 0)$ на некоторый угол α .

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол π рад
получаем точку $K(-1; 0)$.

При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад
получаем точку $K(-1; 0)$.



Поворот точки вокруг начала координат

В курсе геометрии мы рассматривали углы от 0° до 180° .

Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, которые **больше 180°** , а также **отрицательные углы**.

Угол поворота можно задавать и в градусах, и в радианах.

Поворот точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ означает то же, что и поворот на 90° .

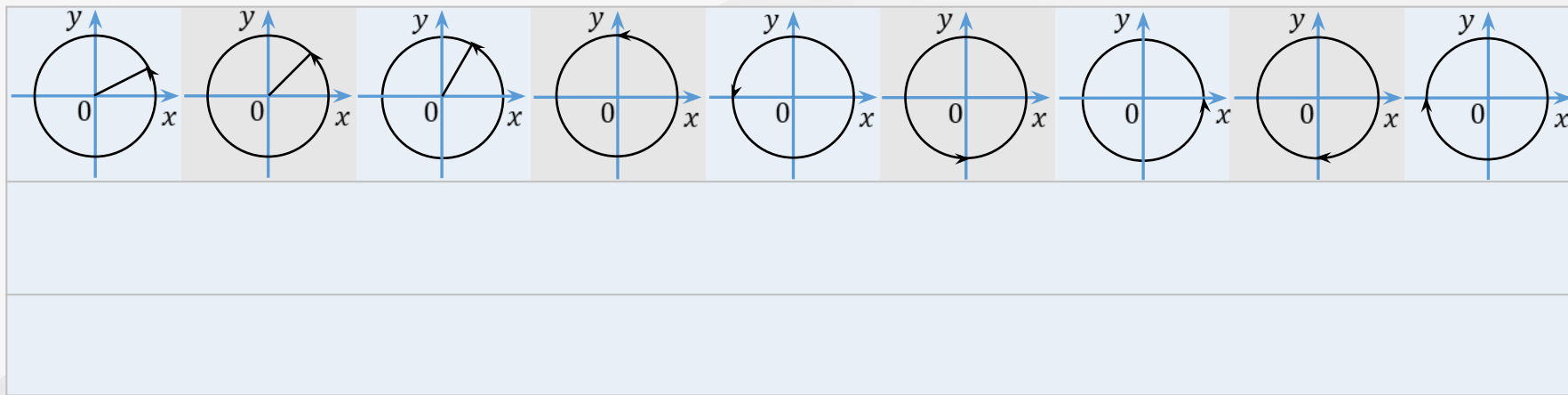
Поворот точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{3\pi}{2}$ означает то же, что и поворот на -270° .

А задавать угол поворота надо в градусах или радианах?



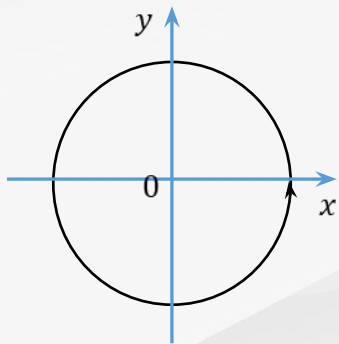
Поворот точки вокруг начала координат

Таблица поворотов на наиболее часто встречающиеся углы, выраженные в радианной и градусной мере

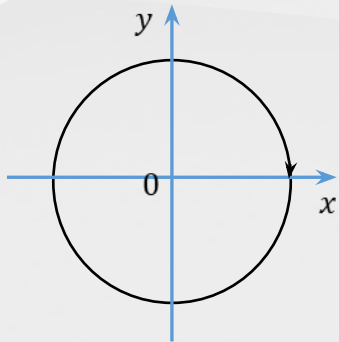


Поворот точки вокруг начала координат

При повороте на 2π , то есть на 360° , точка возвращается в своё первоначальное положение.



При повороте на -2π , то есть на -360° , точка также возвращается в своё первоначальное положение.



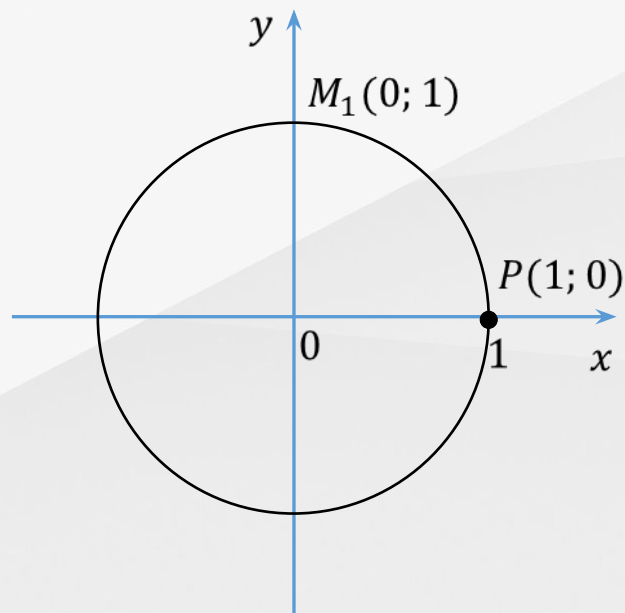
А где окажется точка при повороте на -2π ?



Поворот точки вокруг начала координат

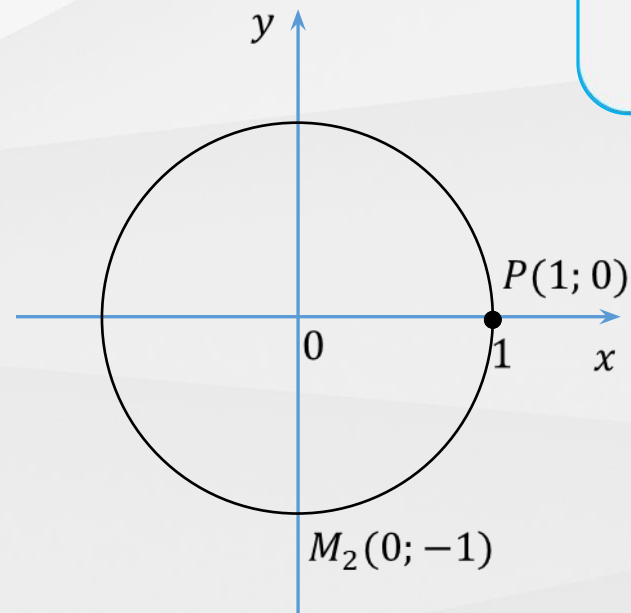
Поворот на угол, больший 2π

$$\frac{13\pi}{2} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$$



Поворот на угол, меньший -2π

$$-\frac{13\pi}{2} = -3 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$$



При повороте точки P на угол $-\frac{13\pi}{2}$ получаем ту же точку, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$.



Поворот точки вокруг начала координат

Если угол α можно представить как $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$,
где k – целое число, то при повороте на угол α получаем
ту же самую точку, что и при повороте на угол α_0 .

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M .

Поворот точки вокруг начала координат

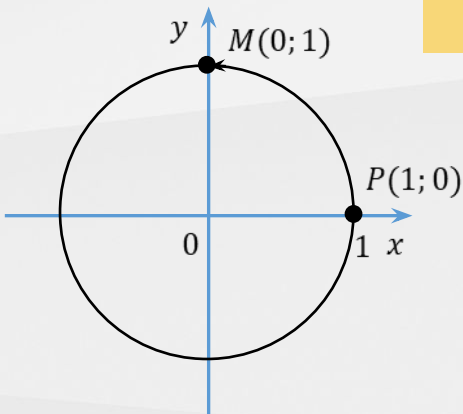
Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{17\pi}{2}$.

$$\frac{17\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 4$$

При повороте точки на угол $\frac{17\pi}{2}$ получим ту же самую точку, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0; 1)$.

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где k – целое число.

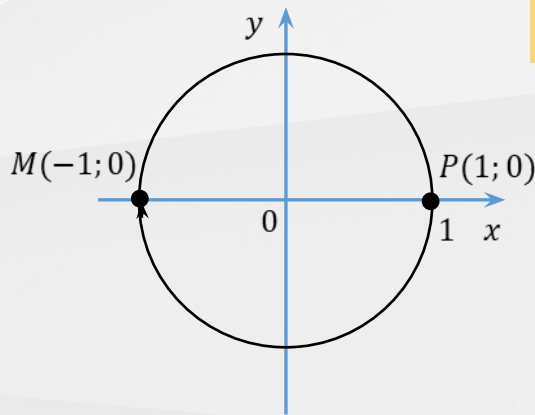


Поворот точки вокруг начала координат

Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол -5π .

$$-5\pi = -\pi - 2\pi \cdot 2$$

При повороте на -5π получаем ту же самую точку, что и при повороте на $-\pi$, то есть точку с координатами $(-1; 0)$.



$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где k – целое число.

Поворот точки вокруг начала координат

Найдём координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ,$$

$\triangle ONM$ – прямоугольный.

Так как координаты точки M численно равны длинам катетов этого треугольника, то нам остаётся найти длины ON и MN .

$$OM = 1,$$

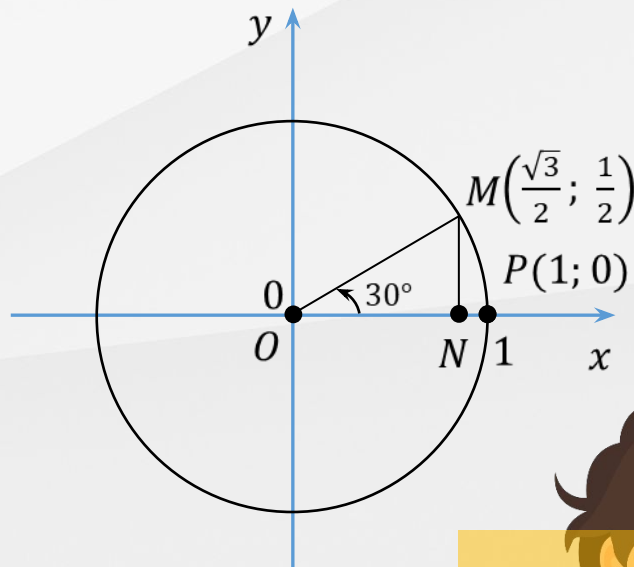
$$\angle MON = 30^\circ,$$

$$MN = OM : 2 = \frac{1}{2},$$

$$OM^2 = ON^2 + MN^2,$$

$$ON = \sqrt{OM^2 - MN^2},$$

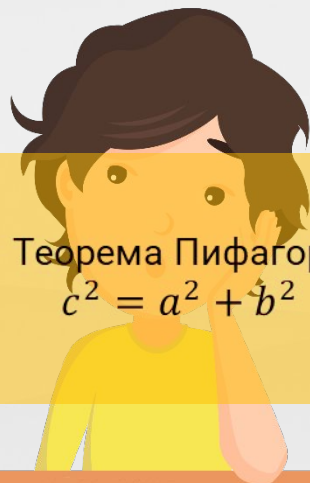
$$ON = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



А мы ведь знаем из геометрии, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Задание № 1

Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол:

а) 9π ; б) $\frac{-11\pi}{2}$; в) 450° .

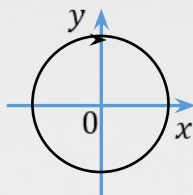
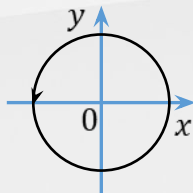
Решение:

$$\text{а) } 9\pi = \pi + 2\pi \cdot 4$$

При повороте точки на угол 9π получим ту же точку, что и при повороте на угол π , то есть точку с координатами $(-1; 0)$.

$$\text{б) } \frac{-11\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} - 2\pi \cdot 2$$

При повороте точки на угол $\frac{-11\pi}{2}$ получим ту же точку, что и при повороте на угол $-\frac{3\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0; 1)$.

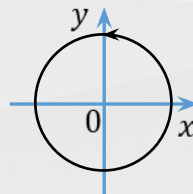


$\alpha \text{ } \alpha^\circ \in_0 \frac{\pi}{180} k \text{ рад}$
где k – целое число.

$$\text{в) } 450^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 450 = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

При повороте точки на угол 450° получим ту же точку, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть точку с координатами $(0; 1)$.



Задание № 2

Найдите число x , где $0 \leq x < 2\pi$, и натуральное число k , такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

а) $a = 5,3\pi$; б) $a = \frac{9\pi}{4}$.

Решение:

а) $a = 5,3\pi$,

$$a = x + 2\pi k,$$

$$5,3\pi = x + 2\pi k,$$

$$5,3\pi = 1,3\pi + 4\pi = 1,3\pi + 2\pi \cdot 2,$$

$$x = 1,3\pi,$$

$$k = 2.$$

б) $a = \frac{9\pi}{4}$,

$$a = x + 2\pi k,$$

$$\frac{9\pi}{4} = x + 2\pi k,$$

$$\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4},$$

$$k = 1.$$

Итоги урока

Поворот точки вокруг начала координат

Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α – это любое действительное число.



Пусть $\alpha > 0$.
Точка M_1 получена из точки P

Поворот точки вокруг начала координат

Таблица поворотов на наиболее часто встречающиеся углы, выраженные в радианной и градусной мере

α α α α α α α α α α

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M .

Поворот точки вокруг начала координат

Вывод

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан.

Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k – целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M .