

Комплексные числа

- Основные понятия
- Геометрическое изображение комплексных чисел
- Тригонометрическая форма записи комплексных чисел
- Действия над комплексными числами
- Показательная форма комплексного числа

Основные понятия

Комплексным числом z называют выражение:

$$z = a + i \cdot b,$$

где a и b – действительные числа, i – **мнимая единица**, определяемая равенством:

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1$$

a называется **действительной частью** числа z ,
 b – **мнимой частью**. Их обозначают так:

$$a = \operatorname{Re} z; \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Если $a = 0$, то число $i b$ называется **чисто мнимым**.

Если $b = 0$, то получается действительное число a .

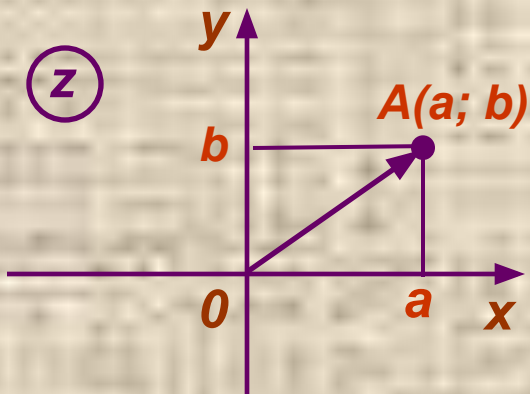
Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются **сопряженными**:

$$z = a + i \cdot b, \quad \bar{z} = a - i \cdot b,$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a; b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *плоскостью комплексной переменной*.



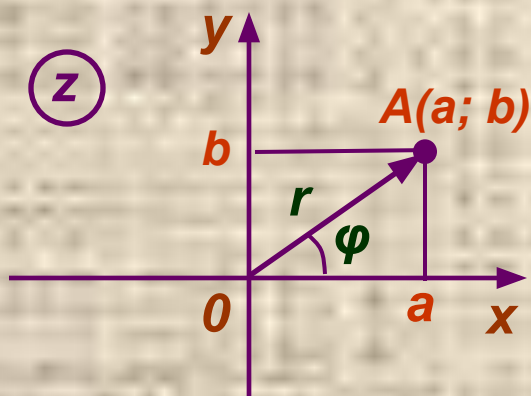
Точкам, лежащим на оси OX , соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют *действительной осью*.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют *мнимой осью*.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор \overline{OA}

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Обозначим через r модуль вектора \overline{OA} , через φ угол между вектором \overline{OA} и положительным направлением оси Ox .



Тогда имеют место равенства:

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$

Следовательно, комплексное число z можно представить в виде:

$$a + i \cdot b = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Модуль комплексного числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 аргумент комплексного числа $\varphi = \arg z = \arctg \frac{b}{a}$

$$\varphi = \arg z = \arctg \frac{b}{a}$$

Аргумент комплексного числа z считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Очевидно, что φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$.

Действия над комплексными числами

1 Равенство комплексных чисел.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называются **равными** : $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

Комплексное число $z = a + i \cdot b$ **равно нулю** , тогда и только тогда, когда $a = 0$, $b = 0$

2 Сложение и вычитание комплексных чисел.

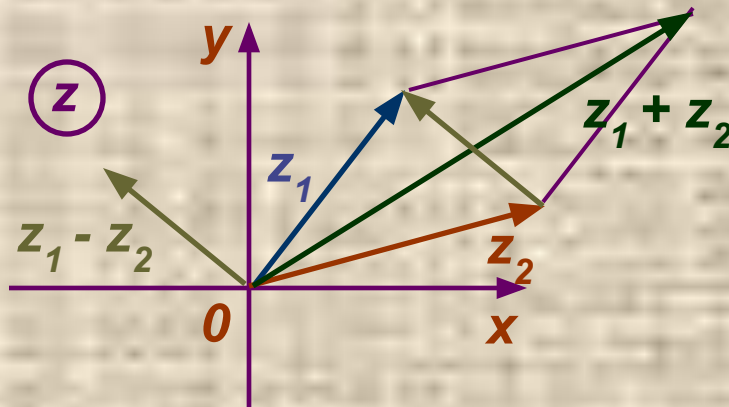
Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

$$\left[z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2) \right]$$

Действия над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел, изображенных векторами производится по правилу сложения или вычитания векторов:



3 Умножение комплексных чисел.

Умножением комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется число, получаемое при умножении этих чисел по правилам алгебры как двучлены, учитывая что

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = -i \cdot i = 1; \quad i^5 = i$$

При любом целом k :

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i$$

Действия над комплексными числами

На основании этого правила получим:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = \\ &= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot b_2 \cdot a_1 + i^2 \cdot b_1 \cdot b_2\end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1)$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

тогда произведение находится по формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Произведение сопряженных комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Действия над комплексными числами

4 Деление комплексных чисел.

Чтобы разделить $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ необходимо умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \boxed{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} \end{aligned}$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 - 4i$$

$$= -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 + 3i - 8i - 12i^2 =$$

$$= 2 + 3i - 8i + 12 = 14 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 4i)}{(1 - 4i) \cdot (1 + 4i)} = \frac{2 + 3i + 8i + 12i^2}{1^2 + 4^2} =$$

$$\frac{2 + 3i + 8i - 12}{17} = \frac{-10 + 11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

Действия над комплексными числами

5 Возведение в степень комплексного числа.

При возведении комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра)

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

6 Извлечение корня из комплексного числа.

Корень n -ой степени из комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Арифметическое значение корня из
положительного числа r

Действия над комплексными числами

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня.

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π , и, следовательно, будут получаться значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Корень n -ой степени из действительного числа также имеет n значений, так как действительное число – частный случай комплексного числа и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$A = |A|(\cos 0 + i \sin 0) \quad (A > 0)$$

$$A = |A|(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (A < 0)$$

Действия над комплексными числами

Найти все значения кубического корня из единицы

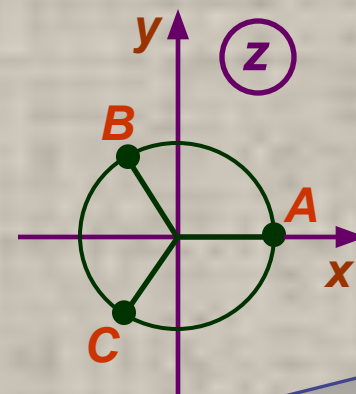
$$1 = \cos 0 + i \sin 0 \quad (r = 1; \quad \varphi = 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1 \quad \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad \sqrt[3]{1} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Показательная форма комплексного числа

Пусть $z = x + i \cdot y$. Если x и y – действительные переменные, то z называется комплексной переменной.

Рассмотрим показательную функцию от комплексной переменной z .

$$w = e^z \quad \text{или} \quad w = e^{x+i \cdot y}$$

Комплексные значения функции w определяются по формуле:

$$e^{x+i \cdot y} = e^x (\cos y + i \cdot \sin y) \quad (1)$$

Пример: $z = 2 + i \cdot \frac{\pi}{4}$

$$e^{2+i \cdot \frac{\pi}{4}} = e^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{e^2 \sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{e^2 \sqrt{2}}{2}$$

Показательная форма комплексного числа

Если в формуле (1) положим $x = 0$, то получим:

$$e^{i \cdot y} = \cos y + i \cdot \sin y \quad (2)$$

Эта формула называется **формулой Эйлера**, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменяем в формуле (2) y на $-y$:

$$e^{-i \cdot y} = \cos(-y) + i \cdot \sin(-y) \Rightarrow e^{-i \cdot y} = \cos y - i \cdot \sin y \quad (3)$$

Складывая и вычитая равенства (2) и (3) получим :

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Показательная форма комплексного числа

Представим комплексное число z в тригонометрической форме::

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

По формуле Эйлера: $\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi = e^{i\varphi}$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в **показательной форме**:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть имеем: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$